Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny
w Poznaniu

Tytuł zajęć

„Elementy geometrii analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni z wykorzystaniem nowych technologii"

Autor opracowania

dr Krzysztof Nowakowski

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:
„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki*
w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych
Metropolii Poznań"

Poznań 2021

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1	Punkt. Odcinek. Wektor. Kąt dwóch wektorów	2
2	Zastosowanie wektorów	2
3	Prosta – postać wektorowa, parametryczna, ogólna. Kąt między prostymi	2
4	Odległość punktu od prostej. Odległość między prostymi równoległymi. Dwusieczna kąta między prostymi	2
5	Ważne punkty związane z trójkątem: ortocentrum, środek ciężkości, środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego. Prosta Eulera	4
6	Okrąg. Styczna do okręgu.	4
7	Elipsa. Styczna do elipsy. Równanie parametryczne elipsy	4
8	Hiperbola. Styczna do hiperboli	2
9	Parabola. Styczna do paraboli	2
10	Zbiór punktów na płaszczyźnie	4
11	Płaszczyzna w przestrzeni. Przekroje brył płaszczyznami	2
	Łączna liczba godzin:	30

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1. Punkt. Odcinek. Wektor. Kąt dwóch wektorów.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

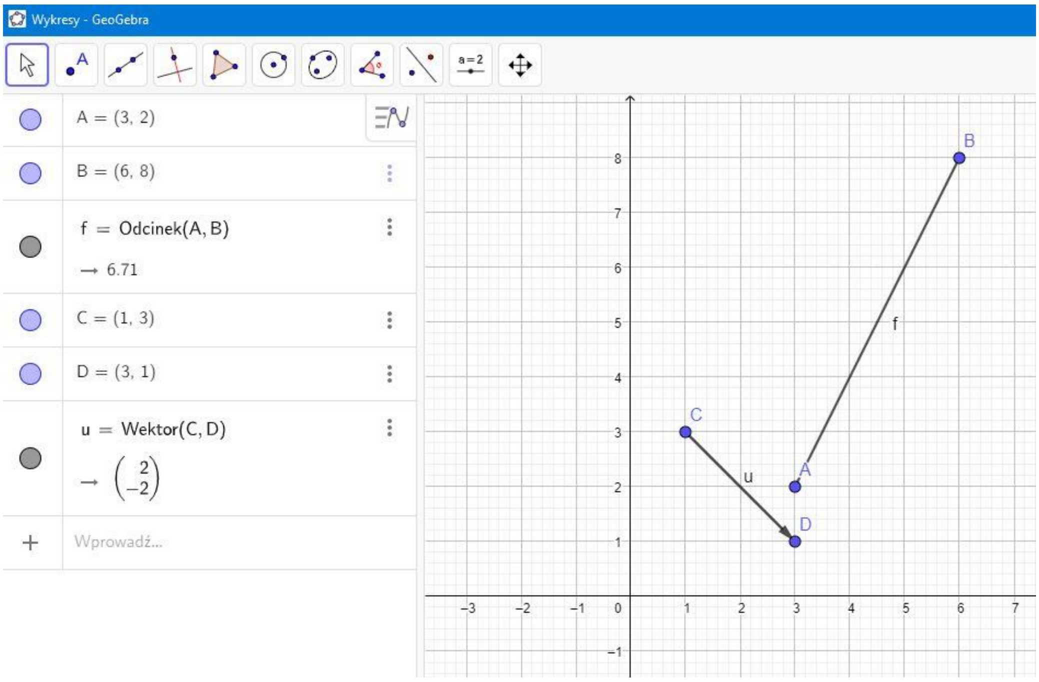
punkt – $A = (x_A, y_A)$

odcinek – $\overline{AB}$

długość odcinka – AB

wektor – $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A; y_B - y_A]$

Odpowiednio w programie Geogebra:



Zadanie 1. Niech $\vec{a} = [1,2], \vec{b} = [0,1], \vec{c} = [-1,1]$. Znajdź

a) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{e} = 2\vec{a} - \vec{b} + 0{,}5\vec{c}$

c) $\vec{f} = 5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$

d) współrzędne takiego wektora $\vec{x}$, aby $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{x} = 0$

Zadanie 2. Wyraź wektor $\vec{c}$ za pomocą wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$, jeżeli

a) $\vec{a} = [1,-1], \vec{b} = [4,3], \vec{c} = [-10,-11]$

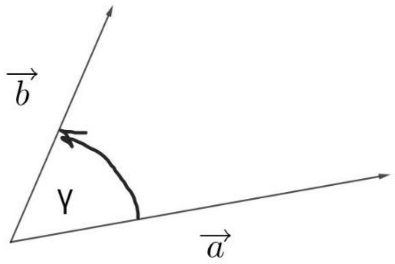
b) $\vec{a} = [-3,4], \vec{b} = [6,-8], \vec{c} = [-12,16]$

c) $\vec{a} = [2,-5], \vec{b} = [-1; 2{,}5], \vec{c} = [3,7]$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3. Punkty $A = (0,0)$, $B = (3,1)$, $C = (1,5)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka.

Kąt dwóch wektorów



$$\vec{a} = [x_a; y_a]$$
$$\vec{b} = [x_b; y_b]$$

$$\cos\gamma = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$\sin\gamma = \frac{x_a y_b - x_b y_a}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

warunek prostopadłości wektorów: $x_a x_b + y_a y_b = 0$
warunek równoległości wektorów: $x_a y_b - x_b y_a = 0$

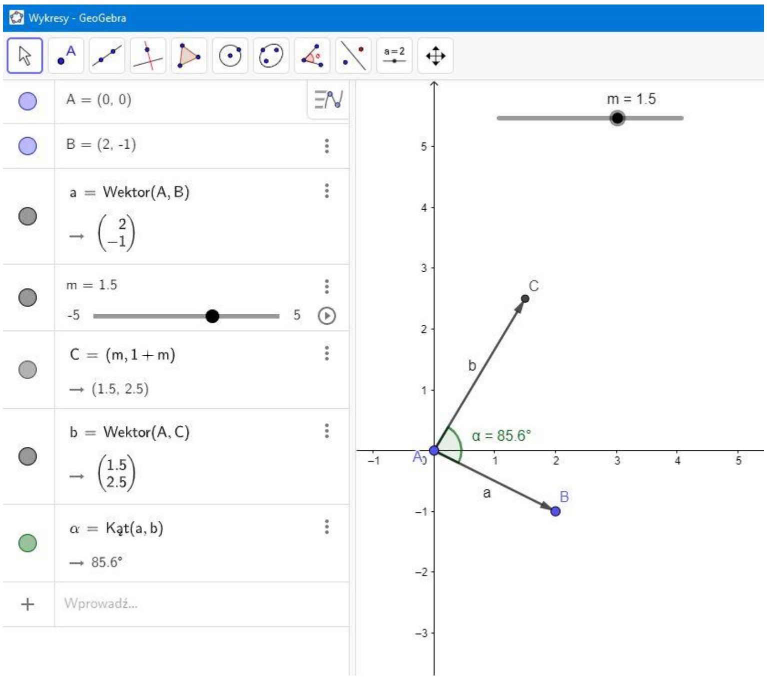
Liczbę $\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = x_a y_b - x_b y_a$ nazywamy wyznacznikiem pary wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i oznaczamy symbolem $\det(\vec{a}, \vec{b})$.
Możemy więc zapisać, że

$$\sin\gamma = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Zadanie 4. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (1,0), B = (-1,1), C = (3,4)$ jest prostokątny. Znajdź miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Zadanie 5. Dla jakich wartości parametru m, wektory $\vec{a} = [2, -1]$ oraz $\vec{b} = [m, 1 + m]$ są prostopadłe, a dla jakich są równoległe?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020



2. Zastosowanie wektorów.

Zadanie 1. Wyprowadź wzór na współrzędne środka odcinka o danych końcach.

Zadanie 2. Dany odcinek $\overline{AB}$, gdzie $A = (-1,4)$ oraz $B = (7,-2)$, podziel na trzy równe części.

Zadanie 3. Wykaż, że odcinek łączący środki ramion trójkąta jest równoległy do podstawy tego trójkąta i o połowę od niej krótszy.

Zadanie 4. Wykaż, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, zaś jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw tego trapezu.

Zadanie 5. Wykaż, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Czy ten równoległobok może być prostokątem? Kwadratem?

Zadanie 6. Wykaż, że odcinki łączące środki boków przeciwległych dowolnego czworokąta połowią się.

Zadanie 7. W kwadracie ABCD na boku $\overline{AB}$ obrano punkt P tak, że $AP = \frac{1}{3}AB$, na boku $\overline{BC}$ obrano punkt Q tak, że $BQ = \frac{1}{3}BC$, na boku $\overline{CD}$ obrano punkt R tak, że $CR = \frac{1}{3}CD$, na boku $\overline{DA}$ obrano punkt S tak, że $DS = \frac{1}{3}DA$. Jaką figurą jest czworokąt PQRS?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Chcąc obliczyć pole danego trójkąta ABC, możemy na przykład skorzystać ze wzoru

$$P(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\gamma = \frac{1}{2}|\det(\vec{a},\vec{b})|$$

Zadanie 8. Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach: $A = (0,0), B = (4,1), C = (1,2)$. Znaleźć pole, obwód oraz miary kątów tego trójkąta.

3. Prosta – postać wektorowa, parametryczna, ogólna. Kąt między prostymi.

Dany jest punkt $A = (-1,3)$ oraz wektor zaczepiony w punkcie A na przykład $\vec{w}$=[2,1]. Możemy łatwo wyznaczyć współrzędne takiego punktu B, żeby $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$. Podobnie możemy wyznaczyć współrzędne takiego punktu C, żeby $\overrightarrow{AC} = 2\vec{w}$, punktu D, aby $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{3w}$ itd. Ogólnie, jeżeli $t \in \mathbb{R}$ wówczas istnieje taki punkt $P = (x, y)$, że

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{w}$$

Wobec tego

$$[x + 1; y - 3] = t \cdot [2,1]$$
$$[x + 1; y - 3] = [2t, t]$$

więc

$$x + 1 = 2t \quad \text{oraz} \quad y - 3 = t$$

i ostatecznie możemy zapisać równanie prostej w postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

W przypadku ogólnym, przyjmijmy: $A = (x_A, y_A), \vec{w} = [x_w, y_w]$ oraz $P = (x, y)$.
Rozumując jak wyżej, otrzymamy

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot x_w \\ y = y_A + t \cdot y_w \end{cases}$$

co można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \end{bmatrix}$$

czy też po prostu

$$P = A + t \cdot \vec{w}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $x_w \neq 0$, to z powyższego układu z pierwszego równania możemy wyznaczyć t i podstawić do drugiego równania, otrzymując:

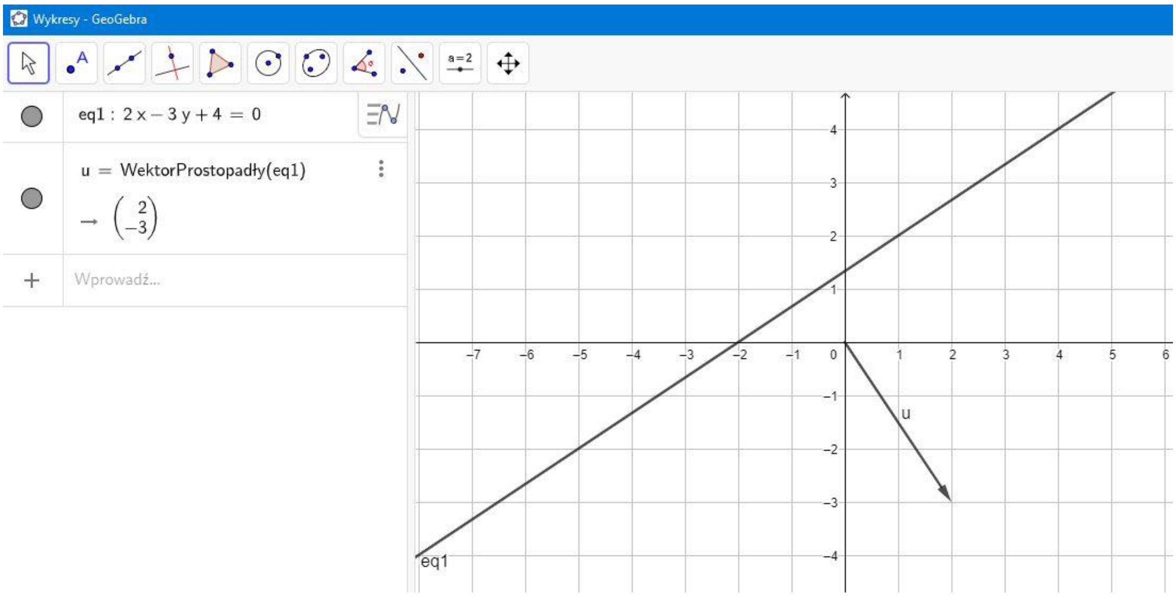
$$y = y_A + \frac{x - x_A}{x_w} \cdot y_w$$
$$x_w \cdot y = x_w \cdot y_A + y_w \cdot x - x_A \cdot y_w$$
$$y_w \cdot x - x_w \cdot y + x_w \cdot y_A - x_A \cdot y_w = 0$$

czyli równanie prostej w postaci ogólnej

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$Ax + By + C = 0$$

Zauważmy przy tym, że wektory $\vec{w} = [x_w, y_w]$ oraz $\vec{v} = [y_w, -x_w]$ są prostopadłe!
Zatem w równaniu ogólnym prostej „widać” wektor prostopadły do tej prostej o współrzędnych $[A, B]$.
Doskonale możemy to zilustrować za pomocą Geogebry, pisząc równanie prostej w postaci ogólnej oraz wektor prostopadły.



Możemy tę własność wykorzystać do znalezienia kąta między dwiema prostymi. Zauważmy, że ten kąt jest równy kątowi między wektorami, które do tych prostych są odpowiednio prostopadłe.

równanie prostej	wektor prostopadły
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$	$\vec{w} = [A_1, B_1]$
$A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\vec{v} = [A_2, B_2]$

Jeżeli przez γ oznaczymy miarę kąta między podanymi wektorami, to

$$\cos\gamma = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

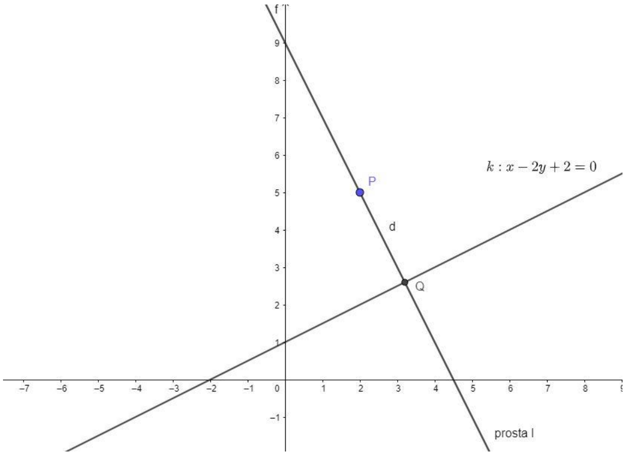
Uwaga. Można powiedzieć, że proste przecinają się pod dwoma kątami, które w sumie dają kąt półpełny. Mówiąc „kąt między prostymi” myślimy o mniejszym z nich.

Zadanie. Znaleźć kąt między prostymi $2x + 3y - 4 = 0$ oraz $-x + 2y + 11 = 0$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

4. Odległość punktu od prostej. Odległość między prostymi równoległymi. Dwusieczna kąta między prostymi.

Zadanie 1. Znaleźć odległość punktu $P = (2,5)$ od prostej $x - 2y + 2 = 0$.



Znajdziemy równanie prostej l, prostopadłej do danej prostej, następnie współrzędne punktu przecięcia prostych Q, wreszcie odległość między tymi prostymi jest szukaną odległością punktu P od podanej prostej.
Wektor prostopadły do prostej k ma współrzędne $[1, -2]$.
Równanie macierzowe prostej l:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Stąd po krótkich przekształceniach dostajemy

$$\text{prosta l: } 2x + y - 9 = 0$$

Punkt Q otrzymamy, kiedy rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

A więc

$$Q = \left(\frac{16}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

Zatem

$$d = PQ = \sqrt{\left(\frac{16}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{13}{5} - 5\right)^2} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

Zamiast wykonywać te rachunki, możemy skorzystać z gotowego wzoru na odległość punktu $P = (x_P, y_P)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

W naszym zadaniu mamy:

$$d = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

Zadanie 2. Znaleźć odległość między prostymi równoległymi o równaniach:
$x - 2y + 2 = 0$ oraz $x - 2y - 6 = 0$.
Od razu skorzystamy ze wzoru na odległość między prostymi równoległymi o równaniach $Ax + By + C_1 = 0$ oraz $Ax + By + C_2 = 0$:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Więc w naszym przypadku

$$d = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

Zadanie 3. Dla jakich wartości współczynników A i B prosta $Ax + By + 1 = 0$ tworzy z osią OX kąt 45^0 ?

Zadanie 4. Dane są równania boków równoległoboku: $8x + 3y + 1 = 0, 2x + y - 1 = 0$ oraz równanie jednej przekątnej: $3x + 2y + 3 = 0$. Znajdź wierzchołki tego równoległoboku.

Równania dwusiecznych kątów między prostymi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ znajdziemy przyrównując wzory na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Zatem w praktycznie każdym zadaniu czekają nas uciążliwe rachunki z liczbami niewymiernymi. Pamiętamy (?), że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

Zadanie 5. Napisz równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste $3x + 4y = 0$ oraz $6x - 8y + 7 = 0$.

5. Ważne punkty związane z trójkątem: ortocentrum, środek ciężkości, środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego. Prosta Eulera.

Ortocentrum – punkt, w którym przecinają się wysokości w trójkącie
Środek ciężkości – punkt, w którym przecinają się środkowe boków trójkąta
Środek okręgu opisanego – punkt, w którym przecinają się symetralne boków trójkąta
Środek okręgu wpisanego – punkt, w którym przecinają się dwusieczne kątów trójkąta

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie (Geogebra). Narysuj dowolny trójkąt o wierzchołkach A, B oraz C, a następnie skonstruuj ortocentrum, środek ciężkości, środek okręgu opisanego i środek okręgu wpisanego. Ukryj wszystkie pomocnicze linie i pozostaw jedynie dany trójkąt oraz cztery skonstruowane punkty. Przesuwając jeden z wierzchołków trójkąta zobacz, co dzieje się z tymi punktami. Co zauważył Euler?

6. Okrąg. Styczna do okręgu.

Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny oddalonych od S o r.

Niech $S = (a, b)$ oraz $P = (x, y)$ będzie punktem leżącym na okręgu. Zatem $PS = r$, więc

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Możemy powiedzieć, że to jest postać kanoniczna równania okręgu.
Po wykonaniu potęgowania i przeniesieniu wyrazów na jedną stronę, otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

czyli równanie okręgu w postaci ogólnej.
Często dane jest równanie okręgu w postaci ogólnej i wtedy należy je sprowadzić do postaci kanonicznej przez „uzupełnianie do kwadratu dwumianu", co przedstawimy na poniższym przykładzie.

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$$
$$x^2 - 10x + \boxed{} + y^2 - 4y + \boxed{} + 4 = 0 + \boxed{} + \boxed{}$$
$$x^2 - 10x + \boxed{25} + y^2 - 4y + \boxed{4} + 4 = 0 + \boxed{25} + \boxed{4}$$
$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Zadanie 1. Znaleźć środek i promień okręgu:
a) $x^2 - 2x + y^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$

Zadanie 2. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty:

$$A = (2,6), B = (5,-3), C = (9,5).$$

Okrąg a prosta.
Prosta przecina okrąg w dwóch punktach, w jednym lub w żadnym, zależnie od tego, czy jej odległość od środka okręgu jest mniejsza, równa bądź większa od promienia tego okręgu.

Zadanie 3. Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu:
a) $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 100$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

b) $x + 2y + 3 = 0$, $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$
c) $x - my - 1 = 0$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$ w zależności od wartości parametru m.

Zadanie 4. Napisać równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ i równoległych do prostej $y = 2x$.

Zadanie 5. Napisać równania stycznych do okręgu $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$ i prostopadłych do prostej $x + y + 1 = 0$.

Zadanie 6. Napisać równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 4$ przechodzących przez punkt $P = (0,4)$.

Zadanie 7. Na osi OX znaleźć taki punkt, z którego „widać" okrąg $x^2 + y^2 = 9$ pod kątem prostym.

Zadanie 8. Napisać równania wspólnych stycznych do okręgów o równaniach $x^2 + y^2 = 4$ i $(x-8)^2 + y^2 = 16$.

Sposób 1. Niech $S_1 = (0,0)$ i $S_2 = (8,0)$ będą środkami okręgów oraz $y = ax + b$ będzie równaniem wspólnej stycznej. Środek okręgu leży w odległości promienia od stycznej, zatem $\frac{|Ax_S + By_S + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = R$, przy czym $ax - y + b = 0$.
W naszym zadaniu mamy dla obu okręgów układ równań:

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \quad \text{oraz} \quad \frac{|8a+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 4.$$

Wobec tego

$$|b| = 2\sqrt{a^2+1} \text{ oraz } |8a+b| = 4\sqrt{a^2+1}$$

czyli $|8a+b| = |2b|$. Wynika z tego, że albo $8a + b = 2b$ albo $8a + b = -2b$. Pierwsza zależność daje $b = 8a$, druga - $b = -\frac{8}{3}a$.
Wstawiając do powyższego układu $b = 8a$, dostajemy $|8a| = 2\sqrt{a^2+1}$ i po podniesieniu do kwadratu mamy $64a^2 = 4a^2 + 4$, a stąd

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{15}} \to b = \pm 8\sqrt{\frac{1}{15}} \to y = \pm\sqrt{\frac{1}{15}}\,x \pm 8\sqrt{\frac{1}{15}} \text{ (równania dwóch stycznych)}$$

Analogicznie, wstawiając do powyższego układu $b = -\frac{2}{3}a$, dostajemy $\left|-\frac{8}{3}a\right| = 2\sqrt{a^2+1}$ i po podniesieniu do kwadratu mamy $\frac{64}{9}a^2 = 4a^2 + 4$, czyli $a^2 = \frac{9}{7}$, a stąd

$$a = \pm\sqrt{\frac{9}{7}} \to b = \mp\frac{8}{3}\sqrt{\frac{9}{7}} \to y = \pm\sqrt{\frac{9}{7}}\,x \mp \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9}{7}} \text{ (równania dwóch stycznych)}$$

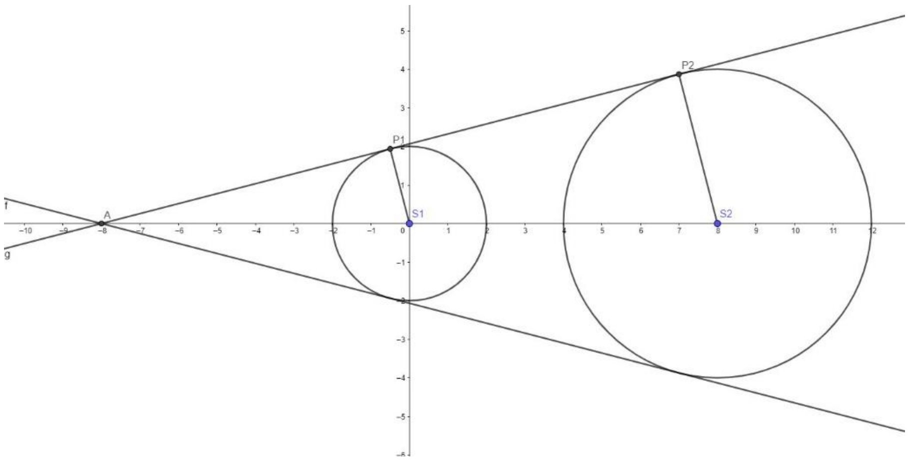
Zapiszemy otrzymane równania stycznych w postaci ogólnej:

styczna 1: $x - \sqrt{15}y + 8 = 0$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

styczna 2: $x + \sqrt{15}y + 8 = 0$
styczna 3: $3x - \sqrt{7}y - 8 = 0$
styczna 4: $3x + \sqrt{7}y - 8 = 0$

Sposób 2.



$S_1 = (0,0), S_2 = (8,0), A = (-a, 0)$, P_1 i P_2 to punkty styczności
Trójkąty AS_1P_1 i AS_2P_2 są podobne (dlaczego?), zatem

$$\frac{S_1P_1}{AS_1} = \frac{S_2P_2}{AS_2}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{4}{a+8}$$

stąd $a = 8$, więc $A = (-8,0)$.
Dalej, z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AS_1P_1, mamy $AP_1 = \sqrt{64-4} = 2\sqrt{15}$.
Możemy więc obliczyć tangens kąta S_1AP_1

$$\tan S_1AP_1 = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

który przecież jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej AP_1P_2. Wobec tego równanie tej prostej $y = ax + b$ można zapisać w postaci $y = \frac{\sqrt{15}}{15}x + b$. Uwzględniając, że prosta przechodzi przez punkt A, znajdziemy $b = \frac{8}{15}\sqrt{15}$.
W ten sposób otrzymaliśmy równanie pierwszej stycznej w postaci kierunkowej

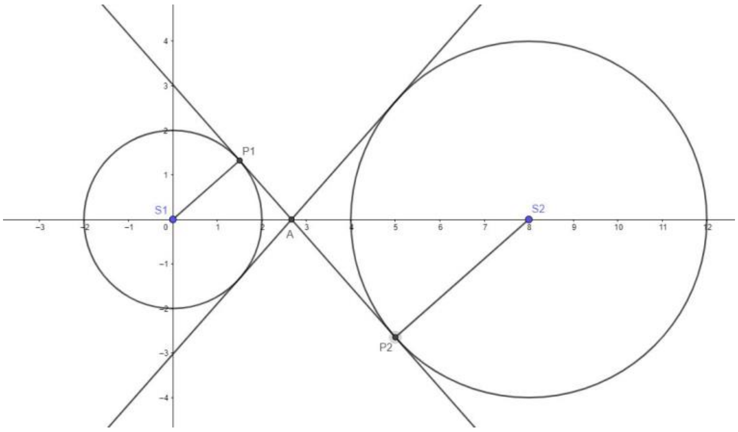
$$y = \frac{\sqrt{15}}{15}x + \frac{8}{15}\sqrt{15}$$

równoważne otrzymanemu wcześniej równaniu stycznej 1 w postaci ogólnej.
Zauważmy, że styczna 2 jest symetryczna do stycznej 1 względem osi OX, stąd natychmiast wynika, że styczna 2 ma równanie

$$y = -\frac{\sqrt{15}}{15}x - \frac{8}{15}\sqrt{15}$$

Musimy jeszcze znaleźć równania pozostałych stycznych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020



$S_1 = (0,0), S_2 = (8,0), A = (a, 0)$, P_1 i P_2 to punkty styczności
Trójkąty AS_1P_1 i AS_2P_2 są podobne (dlaczego?), zatem

$$\frac{S_1P_1}{AS_1} = \frac{S_2P_2}{AS_2}$$
$$\frac{2}{a} = \frac{4}{8-a}$$

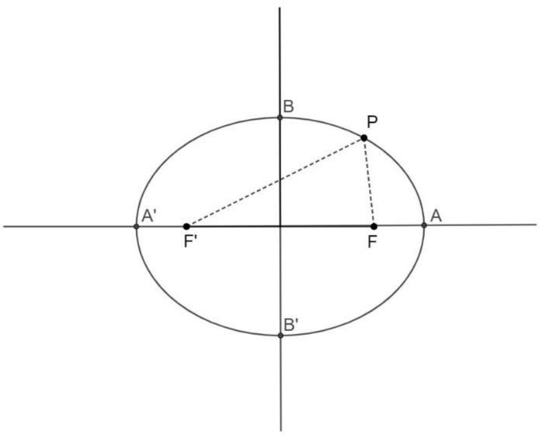
a stąd mamy $a = \frac{8}{3}$, czyli $A = (\frac{8}{3}, 0)$. Pozostaje tylko znaleźć tangens kąta P_1AS_1.
W ten sposób otrzymamy równania dwóch stycznych, czyli zadanie zostało rozwiązane.

7. Elipsa. Styczna do elipsy. Równanie parametryczne elipsy.

Elipsa jest miejsce geometryczne punktu P, którego odległości od dwóch punktów stałych F i F', zwanych ogniskami, spełniają warunek

$$PF + PF' = 2a,$$

gdzie $2a$ jest stałą większą niż odległość ognisk.
Odległość FF' nazywamy ogniskową elipsy, zaś odcinki PF i PF' nazywamy promieniami wodzącymi punktu P.



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $P=(x,y), F=(c,0), F'=(-c,0)$.

$$PF+PF'=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2+x^2+2cx+c^2+y^2+2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}=4a^2$$
$$2x^2+2y^2+2c^2+2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}=4a^2$$

$$\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}=2a^2-x^2-y^2-c^2$$
$$((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)=(2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$
$$(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)=(2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$

Podstawienie: $x^2+y^2+c^2=t$

$$(t-2cx)(t+2cx)=(2a^2-t)^2$$
$$t^2-4c^2x^2=4a^4-4a^2t+t^2$$
$$4a^2t-4c^2x^2=4a^4$$
$$a^2t-c^2x^2=a^4$$
$$a^2x^2+a^2y^2-c^2x^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Podstawienie: $a^2-c^2=b^2$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Zauważmy, że $AA'=2a, FB=BF'=a, BB'=2b$.

Odcinek AA' nazywamy oś wielką elipsy, BB'– oś mała elipsy, punkty A, A', B i B' to wierzchołki elipsy, a liczbę c nazywamy półogniskową elipsy.

Dodatkowo, liczbę

$$e=\frac{c}{a}$$

Nazywamy mimośrodem elipsy.

Jak łatwo zauważyć, $e<1$.

Pole powierzchni ograniczone elipsą o równaniu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ jest równe πab.

Proste o równaniach

$$x=\pm\frac{a^2}{c}$$

Nazywamy kierownicami elipsy.

Zadanie 1. Naszkicuj elipsę oraz wyznacz współrzędne ognisk, mimośród i równania kierownic elipsy danej równaniem:

a) $4x^2+9y^2=36$ b) $2x^2+5y^2=6$ c) $x^2+5y^2=1$

Zadanie 2. Punkty $A = (-6, -4), B = (8, -3)$ należą do elipsy, której osiami symetrii są osie układu współrzędnych. Napisz równanie tej elipsy.

Zadanie 3. Oblicz pole kwadratu wpisanego w elipsę.

Zadanie 4. W elipsę $x^2 + 4y^2 = 36$ wpisano trójkąt równoboczny w ten sposób, że jednym z jego wierzchołków jest wierzchołek elipsy znajdujący się w dodatniej części osi OX. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 5. Napisz równania stycznych do elipsy

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

i przechodzących przez punkt $P = \left(4; \frac{12}{5}\right)$.

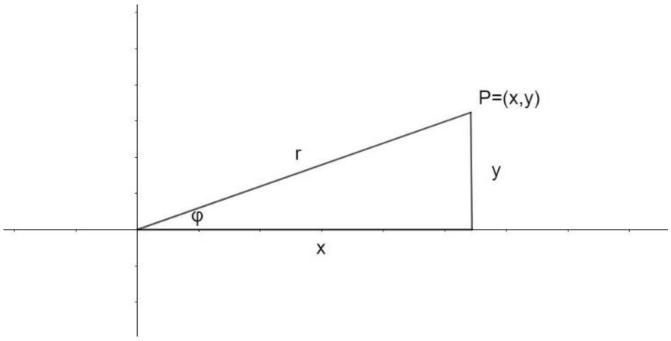
Zadanie 6. Na osi OX znajdź punkt, z którego widać elipsę

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

pod kątem prostym.

Zadanie 7. Narysuj dowolną elipsę, oznacz jej ogniska. Zaznacz na elipsie dowolny punkt P. Skonstruuj styczną do elipsy w punkcie P oraz dwusieczną kąta między promieniami wodzącymi punktu P. Poruszaj punktem P. Co ciekawego zauważyłeś? Sformułuj odpowiednią hipotezę.

Równanie parametryczne okręgu i elipsy.



$$P = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Na przykład

- dla okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ mamy $\begin{cases} x = 1 \cos \varphi = \cos \varphi \\ y = 1 \sin \varphi = \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in \langle 0^0, 360^0 \rangle$,

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

- dla okręgu o równaniu $x^2+y^2=R^2$ mamy $\begin{cases} x=R\cos\varphi \\ y=R\sin\varphi \end{cases}, \varphi\in\langle 0^0, 360^0\rangle$,
- dla okręgu o równaniu $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ mamy $\begin{cases} x=a+R\cos\varphi \\ y=b+R\sin\varphi \end{cases}, \varphi\in\langle 0^0, 360^0\rangle$,
- dla elipsy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

mamy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

więc

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi \quad \text{oraz} \quad \frac{y}{b}=\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases}, \ \varphi\in\langle 0^0, 360^0\rangle.$$

8. Hiperbola. Styczna do hiperboli.

Hiperbola jest to miejsce geometryczne punktu P, którego odległości od dwóch punktów stałych F i F', zwanych ogniskami, spełniają warunek

$$|PF-PF'|=2a,$$

gdzie $2a$ jest stałą mniejszą niż odległość ognisk 2c.

Niech $P=(x,y)$ będzie punktem na hiperboli oraz $F=(c,0)\ i\ F'=(-c,0)$ będą jej ogniskami. Wówczas warunek $|PF-PF'|=2a$ jest równoważny warunkowi

$$(PF-PF')^2=4a^2$$

i dalej

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=4a^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2+x^2+2cx+c^2+y^2-2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}=4a^2$$

$$2x^2+2y^2+2c^2-2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}=4a^2$$

$$x^2+y^2+c^2-\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}=2a^2$$

Podstawmy teraz $x^2+y^2+c^2=t$, zatem

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=t-2a^2$$

$$(x^2-2cx+c^2+y^2)(x^2+2cx+c^2+y^2)=(t-2a^2)^2$$

$$(t-2cx)(t+2cx)=(t-2a^2)^2$$

$$t^2-4c^2x^2=t^2-4a^2t+4a^4$$

$$a^2t-c^2x^2=a^4$$

$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2-c^2x^2=a^4$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

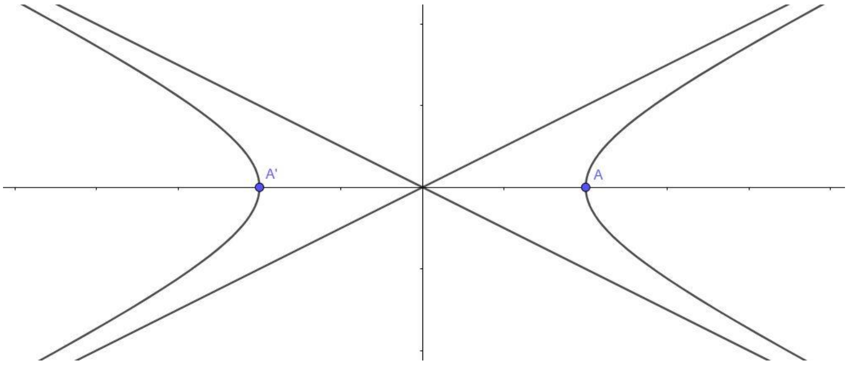
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Podstawienie: $c^2 - a^2 = b^2$ daje nam teraz

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

czyli ostatecznie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Punkty A i A' nazywamy wierzchołkami hiperboli.

Proste o równaniach $y = \pm\frac{b}{a}x$ są asymptotami hiperboli.

Zadanie 1. Uzupełnij tabelkę zgodnie z przykładem i narysuj podane krzywe:

równanie	$9x^2 - 16y^2 = 144$	$x^2 - y^2 = 1$	$4y^2 - 2x^2 = 4$
równanie osiowe	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$		
półoś rzeczywista	$a = 4$		
półoś urojona	$b = 3$		
asymptoty	$y = \pm\frac{3}{4}x$		
wierzchołki	$A = (4,0)$, $A' = (-4,0)$		
półogniskowa	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$		
ogniska	$F = (5,0)$, $F' = (-5,0)$		

Zadanie 2. Napisz równanie hiperboli znając jej asymptoty $y = \pm\frac{1}{2}x$ i jej jeden punkt $P = (5,2)$.

Zadanie 3. Oblicz miarę kąta między asymptotami hiperboli

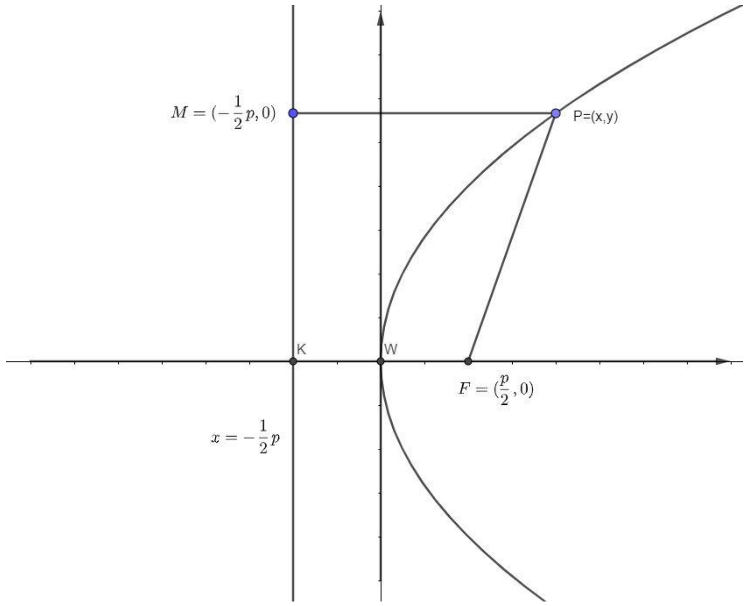
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4. Napisz równanie stycznej do hiperboli $x^2 - 2y^2 = 8$ i równoległej do prostej $y = 2x - 3$.

9. Parabola. Styczna do paraboli.

Parabola jest to miejsce geometryczne punktu, którego odległości od punktu stałego F, zwanego ogniskiem, i od prostej k ($F \notin k$), zwanej kierownicą, są równe.



$KF = p$ to tzw. półparametr
Z definicji paraboli dostajemy $MP = PF$, zatem

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 + y^2$$

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + y^2$$

$$y^2 = 2px$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie wierzchołkowe paraboli.

Jak wykreślić parabolę za pomocą np. programu Geonext?
1. Rysujemy kierownicę i ognisko F.
2. Na kierownicy zaznaczamy dowolny punkt M.
3. Kreślimy prostą prostopadłą do kierownicy i przechodzącą przez punkt M.
4. Konstruujemy symetralną odcinka FM (dlaczego?)
5. Punkt przecięcia tych prostych leży na paraboli.

Zadanie 1. Znajdź ognisko i kierownicę paraboli o równaniu
a) $y^2 = 3x$, b) $y^2 = -2x$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

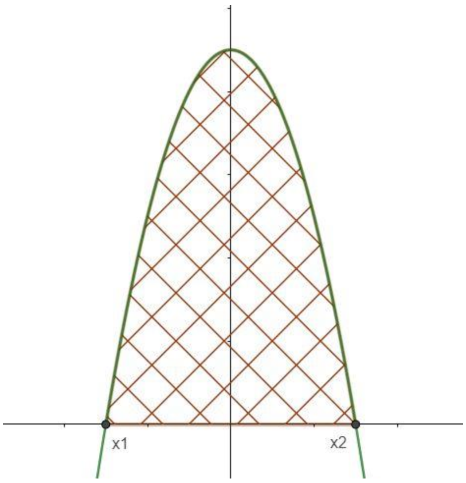
Zadanie 2. W jaki sposób znaleźć wierzchołek, ognisko i kierownicę paraboli o równaniu $y = x^2 + 2x + 2$?

Zadanie 3. Napisz równanie prostej, zawierającej tę cięciwę paraboli $y^2 = 4x$, której środkiem jest punkt $M = (2,1)$.

Zadanie 4. Napisz równanie prostej stycznej do paraboli $y^2 = \frac{3}{4}x$ i równoległej do prostej $y = \frac{1}{4}x$.

Zadanie 5. Napisz równanie stycznych do paraboli $y^2 = 12x$ wyprowadzonych z punktu $M = (-2,1)$ oraz znajdź kąt, pod którym widać parabolę z tego punktu.

Zadanie 6. Na osi OX znajdź taki punkt, z którego widać parabolę $y^2 = 2px$ pod kątem prostym.



Pole obszaru ograniczonego parabolą o równaniu

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

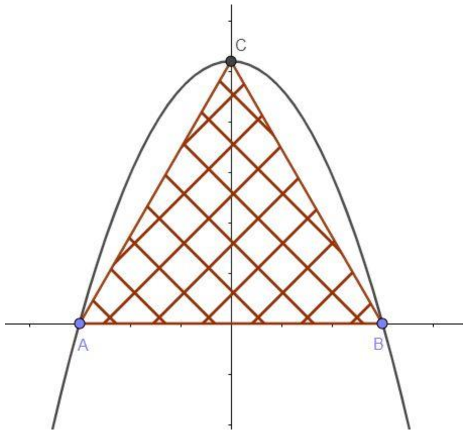
oraz osią odciętych można obliczyć wg wzoru

$$P = \frac{1}{6}|a|(x_2 - x_1)^3$$

Zadanie 7. Oblicz pole P obszaru ograniczonego parabolą $f(x) = -x^2 + 9$ i osią odciętych. Niech A i B będą punktami przecięcia tej paraboli z osią odciętych, a W jej wierzchołkiem. Ile razy P jest większe od pola trójkąta ABW?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.



Na trójkącie równobocznym T o boku 2a opisano parabolę. Dobierzmy układ współrzędnych w ten sposób, aby wierzchołek C leżał na osi rzędnych, a wierzchołki A i B leżały na osi odciętych.

a) Napisz równanie tej paraboli.

b) Oblicz pole P powierzchni ograniczonej tą parabolą i osią odciętych.

c) Oblicz stosunek P do pola trójkąta T.

10. Zbiór punktów na płaszczyźnie.

Zadanie 1. Co to za krzywa:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 = 0$ b) $x^2 - y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$ d) $y^2 - 4x^2 = 0$

e) $xy^2 - 4x^2 = 0$ f) $xy - y - x + 1 = 0$

Zadanie 2. Wyznacz zbiór środków tych cięciw paraboli $y = 3x^2$, do których należy punkt $A = (0,2)$.

Niech punkty $M = (x_M, y_M)$ oraz $K = (x_K, y_K)$ leżą na danej paraboli, a punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na środku cięciwy KM. Skoro tak, to $x_K + x_M = 2x_P$ oraz $y_K + y_M = 2y_P$.
Cięciwa KM leży na prostej o równaniu $y = ax + b$, a punkt A leży na tej prostej, więc $b = 2$.
Zatem $y = ax + 2$. Punkty K i M leżą na paraboli $y = 3x^2$ i na prostej $y = ax + 2$, więc ich współrzędne są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = ax + 2 \end{cases}$$

czyli

$$3x^2 - ax - 2 = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są x_K i x_M, więc ze wzorów Viete'a dostajemy

$$x_K + x_M = \frac{a}{3} = 2x_P$$

Z drugiej strony mamy

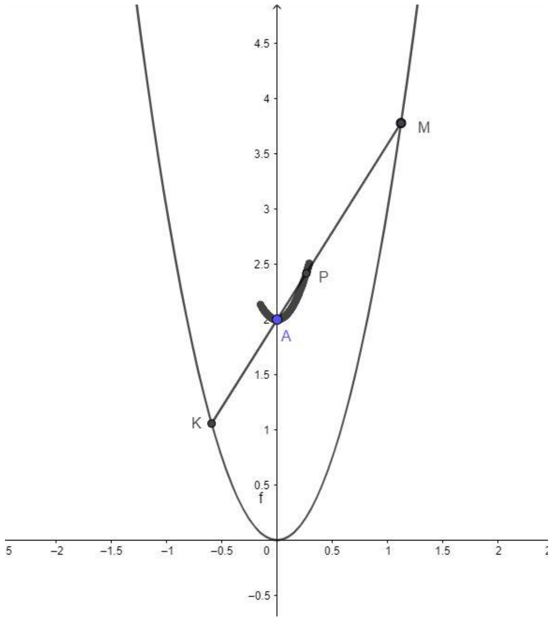
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$2y_P = y_K + y_M = 3x_K^2 + 3x_M^2 = 3(x_K + x_M)^2 - 6x_K x_M = 3 \cdot 4x_P^2 - 6\left(-\frac{2}{3}\right) = 12x_P^2 + 4$$

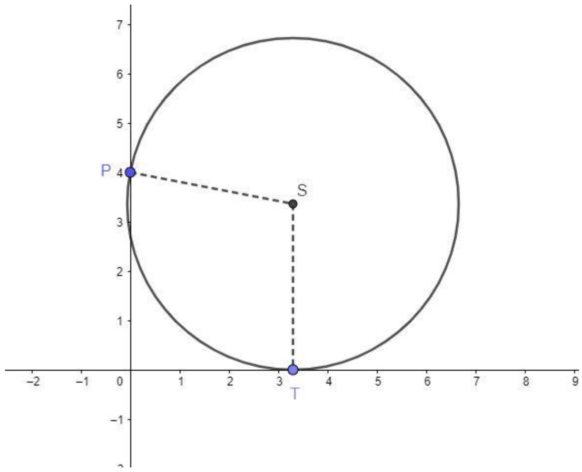
Zatem

$$y_P = 6x_P^2 + 2$$

Jak teraz łatwo zauważyć, punkt P leży na paraboli o równaniu $y = 6x^2 + 2$.



Zadanie 3. Znaleźć zbiór środków okręgów przechodzących przez punkt $P = (0,4)$ i stycznych do osi OX.



Niech $S = (x_S, y_S)$, więc $T = (x_S, 0)$.
Z treści zadania wynika, że $SP = PT$, więc

$$x_S^2 + (y_s - 4)^2 = y_S^2$$

czyli po niezbędnych przekształceniach

$$y_S = \frac{1}{8}x_S^2 + 2$$

Jak widać, punkt S leży na paraboli o równaniu

$$y = \frac{1}{8}x^2 + 2$$

Zadanie 4. Znaleźć zbiór punktów, których odległość od punktu $F = (6,0)$ jest równa połowie odległości od osi OY.

Zadanie 5. Napisać równanie zbioru punktów jednakowo odległych od początku układu współrzędnych i od punktu $P = (1,4)$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6. Znaleźć zbiór punktów jednakowo oddalonych od okręgu $x^2 + y^2 = 100$ i od punktu $P = (6,0)$.

Zadanie 7. Napisz równanie krzywej będącej zbiorem wszystkich środków okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $x^2 + (y-2)^2 = 1$ i stycznych do prostej $y = -2$.

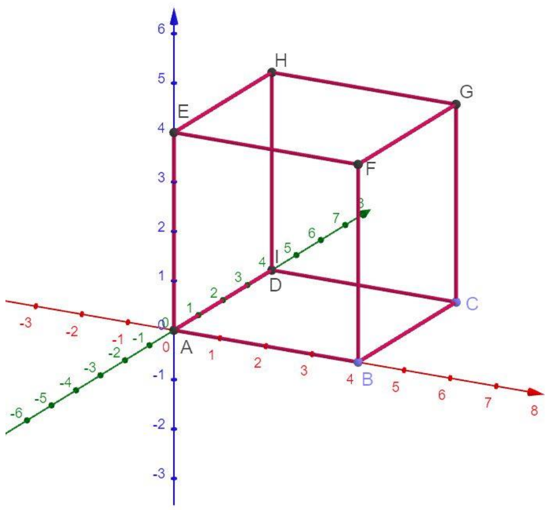
Zadanie 8. Napisz równanie krzywej, która jest zbiorem wszystkich środków okręgów stycznych jednocześnie do okręgu $x^2 + y^2 = 9$ i do osi OX.

Zadanie 9. Znaleźć równanie prostej zawierającej cięciwę okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ wiedząc, że punkt $A = (2, -\frac{1}{2})$ jest środkiem tej cięciwy.

Zadanie 10. Dany jest zbiór trójkątów o wspólnym wierzchołku $A = (0,4)$. Boki tych trójkątów przeciwległe wierzchołkowi A zawierają się w prostej o równaniu $y + 4 = 0$ i każdy z nich ma długość 4. Napisz równanie krzywej, która jest zbiorem środków okręgów opisanych na tych trójkątach.

11. Płaszczyzna w przestrzeni. Przekroje brył płaszczyznami.

W tym ostatnim już punkcie naszego kursu skupimy się na sześcianie i wielkościach z nim związanych.



$A = (0,0,0), B = (4,0,0)$ punkty leżą na osi OX
$D = (0,4,0)$ leży na osi OY
$E = (0,0,4)$ leży na osi OZ
ponadto

$$C = (4,4,0)$$
$$F = (4,0,4)$$
$$G = (4,4,4)$$
$$H = (0,4,4)$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Długość odcinka liczymy tak samo jak na płaszczyźnie, na przykład policzymy długość przekątnej sześcianu:

$$AG = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

Wektor w przestrzeni ma trzy współrzędne, na przykład

$$\overrightarrow{BG} = [x_G - x_B, y_G - y_B, z_G - z_B] = [0,4,4] \to |\overrightarrow{BG}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BE} = [x_E - x_B, y_E - y_B, z_E - z_B] = [-4,0,4] \to |\overrightarrow{BE}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Analogicznie,

$$\vec{a} = [x_a; y_a; z_a]$$
$$\vec{b} = [x_b; y_b; z_b]$$

$$\cos\gamma = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

więc

$$\cos(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BE}) = \frac{0 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 4}{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \to \gamma = 60°$$

Zauważmy, że trójkąt BGE jest równoboczny (dlaczego?), więc powyższy wynik jest oczywisty bez rachunków…

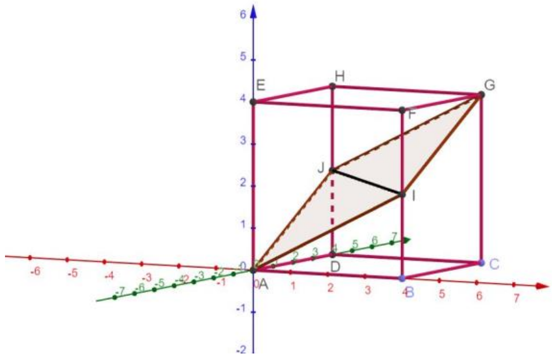
Zadanie 1. Znajdziemy miarę kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

Szukamy miary kąta CAG.

$$\overrightarrow{AC} = [4,4,0] \to AC = 4\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{AG} = [4,4,4] \to AG = 4\sqrt{3}$$
$$\cos CAG = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{16 + 16 + 0}{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{32}{16\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \to \angle CAG \approx 35°15'52''$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 2.



$I=(4,0,2), J=(0,4,2)$ (środki krawędzi bocznych)

Napiszemy równanie płaszczyzny zawierającej trójkąt AIJ i sprawdzimy, czy punkt G leży na tej płaszczyźnie.
Równanie ogólne płaszczyzny

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Wstawiamy kolejno punkty A, I oraz J do równania płaszczyzny:

$$\begin{cases} A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \\ A\cdot 4+B\cdot 0+C\cdot 2+D=0 \\ A\cdot 0+B\cdot 4+C\cdot 2+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=0 \\ 4A+2C+D=0 \\ 4B+2C+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=0 \\ 4A=-2C \\ 4B=-2C \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=0 \\ A=-\frac{1}{2}C \\ B=-\frac{1}{2}C \end{cases}$$

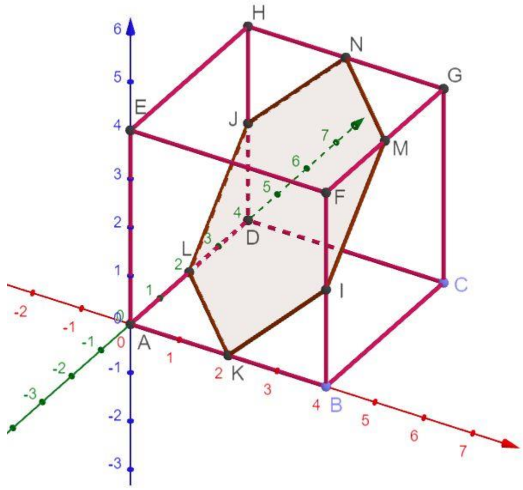
zatem

$$-\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{2}Cy+Cz=0$$

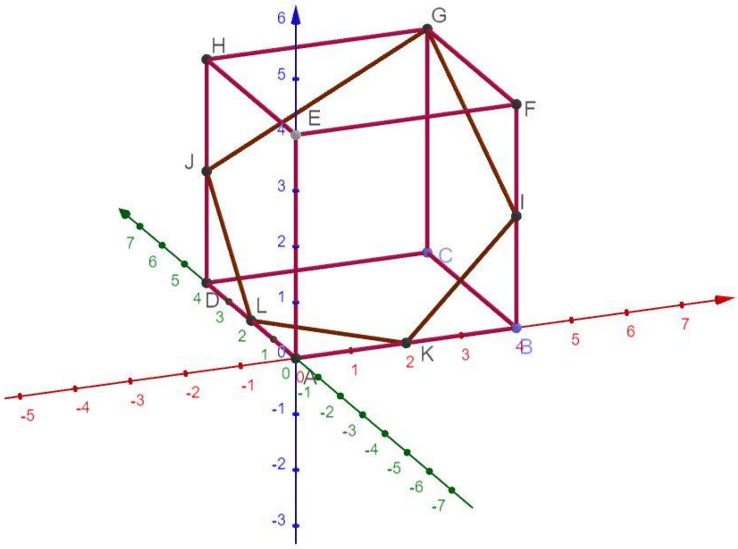
czyli równanie płaszczyzny to $x+y-2z=0$.
Punkt G ma współrzędne $(4,4,4)$, więc $4+4-8=0$, czyli należy do płaszczyzny zawierającej trójkąt AIJ.

Zadanie 3. W sześcianie zaznaczono środki odpowiednich boków i otrzymano sześciokąt KIMNJL. Podaj współrzędne wierzchołków tego sześciokąta i napisz równanie płaszczyzny, która zawiera ten sześciokąt. Czy figura jest wielokątem foremnym?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

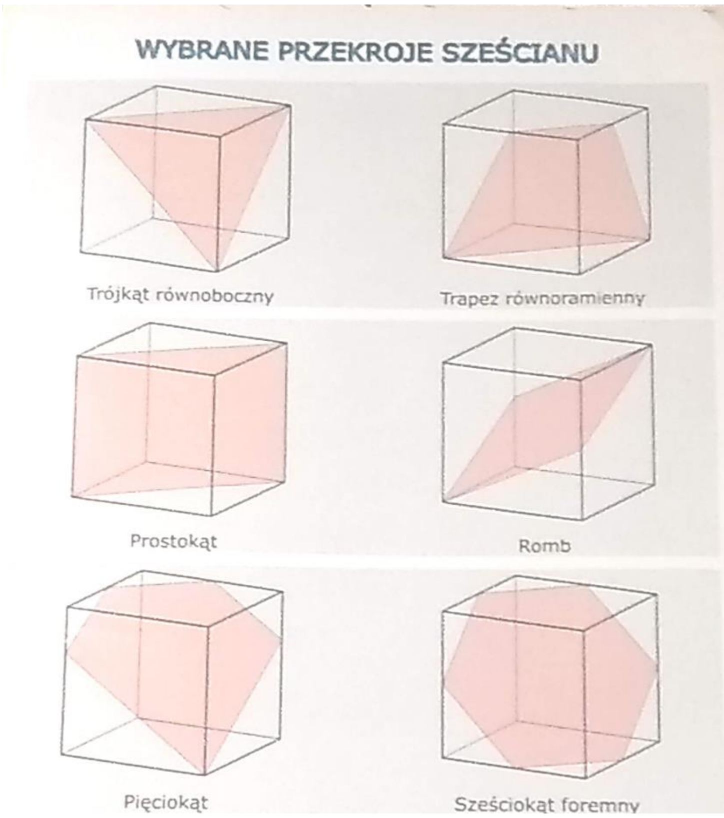


Zadanie 4. Na poniższym rysunku przedstawiono sześcian oraz punkty K, I, J, L, które połowią odpowiednie krawędzie sześcianu. Wykaż, że figura KIGJL nie leży na płaszczyźnie, tzn. poniższy rysunek jest swego rodzaju iluzją.



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 5.



Ta plansza wisi w sali 12. Przyjrzyjmy się bliżej pięciokątowi, który przypomina ten (nieudany) z zadania 4. Na jakiej wysokości są wierzchołki lewy i prawy, jeżeli przyjmiemy, że dwa wierzchołki w głębi rysunku leżą na środkach krawędzi sześcianu?

Odpowiedzi do wybranych zadań

1.1a. $\vec{d} = [0,4]$

1.1b. $\vec{e} = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

1.1c. $\vec{f} = [3,9]$

1.1d. $\vec{x} = [-3,-4]$

1.2a. $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

1.2b. $\vec{c} = (4+2p)\vec{a} + p\vec{b}$, gdzie $p \in R$

1.2c. nie da się

1.3 $D = (-2,4)$

1.4 $\alpha = 90°, \beta \approx 63°, \gamma \approx 27°$

1.5 dla $m = 1$ wektory są prostopadłe, dla $m = -\frac{2}{3}$ wektory są równoległe

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.1 $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B) \to S_{AB} = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

2.2 $P = \left(\frac{5}{3}, 2\right), Q = (\frac{13}{3}, 0)$

2.8 $pole = 3{,}5\ [j^2], obwód \approx 9{,}52[j], \alpha \approx 49°, \beta \approx 32°, \gamma \approx 98°$

4.3 $B = -A,\ A \neq 0$

4.4 $A = (-2{,}5), B = (1, -3), C = (8, -17), D = (5, -9)$

4.5 $x = -\frac{7}{12}, y = \frac{7}{16}$

6.1a. $S = (1{,}0), R = 1$

6.1b. $S = (1{,}1), R = 3$

6.1c. $S = (4, -1), R = 1$

6.2 $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$

6.3a. prosta zawiera średnicę okręgu

6.3b. prosta zawiera średnicę okręgu

6.3c. $m = \frac{3}{4} \to$ prosta styczna do okręgu

$m > \frac{3}{4} \to$ prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem

$m < \frac{3}{4} \to$ prosta przecina okrąg w dwóch punktach

6.4 $y = 2x - 3 \pm 2\sqrt{5}$

6.5 $y = x + 1 \pm 3\sqrt{2}$

6.6 $y = \pm\sqrt{3}x + 4$

6.7 $A = \left(-3\sqrt{2}, 0\right),\ B = (3\sqrt{2}, 0)$

7.1

równanie elipsy	$4x^2 + 9y^2 = 36$	$2x^2 + 5y^2 = 6$	$x^2 + 5y^2 = 1$
ogniska	$F = \left(\sqrt{5}, 0\right)$, $F' = (-\sqrt{5}, 0)$	$F = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $F' = (-\frac{3\sqrt{5}}{5}, 0)$	$F = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $F' = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0)$
mimośród	$e = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$	$e = \frac{\sqrt{15}}{15} \approx 0{,}77$	$e = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}89$
kierownice	$x = \pm\frac{9\sqrt{5}}{5}$	$x = \pm\sqrt{5}$	$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

7.2 $x^2 + 4y^2 = 100$

7.3 $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

7.4 $\left(\frac{6}{7}, \pm\frac{12}{7}\sqrt{3}\right)$

7.5 $16x + 15y - 100 = 0$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

7.6 $A = \left(-\sqrt{13}, 0\right), B = (\sqrt{13}, 0)$

8.1

równanie	$x^2 - y^2 = 1$	$4y^2 - 2x^2 = 4$
równanie osiowe	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{2} = 1$
półoś rzeczywista	$a = 1$	$b = 1$
półoś urojona	$b = 1$	$a = \sqrt{2}$
asymptoty	$y = \pm x$	$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$
wierzchołki	$A = (1,0)$, $A' = (-1,0)$	$A = (0,1)$, $A' = (0,-1)$
półogniskowa	$c = \sqrt{2}$	$c = \sqrt{3}$
ogniska	$F = \left(\sqrt{2}, 0\right)$, $F' = (-\sqrt{2}, 0)$	$F = \left(0, \sqrt{3}\right)$, $F' = (0, -\sqrt{3})$

8.2 $x^2 - 4y^2 = 9$

8.3 $\gamma \approx 84°$

8.4 $y = 2x \pm 2\sqrt{7}$

9.1a $F = \left(\frac{3}{4}, 0\right), x = -\frac{3}{4}$

9.1b $F = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), x = \frac{1}{2}$

9.2 $y = (x+1)^2 + 1$ to parabola $y = x^2$, o ognisku $F = (0, \frac{1}{4})$ i kierownicy $y = -\frac{1}{4}$, przesunięta o wektor $\vec{w} = [-1,1]$, czyli $F' = \left(-1, \frac{5}{4}\right), y' = \frac{3}{4}$.

9.3 $2x - y - 3 = 0$

9.4 $x - 4y + 3 = 0$

9.5 $x - y + 3 = 0, 3x + 2y + 4 = 0, \gamma \approx 79°$

9.6 $M = (-\frac{p}{2}, 0)$

9.7 $P = 36[j^2] = \frac{4}{3}P(\Delta ABW)$

9.8a. $y = -\frac{\sqrt{3}}{a}x^2 + a\sqrt{3}$

9.8b. $P = \frac{4}{3}\sqrt{3}a^2[j^2]$

9.8c. 4:3

10.1a. okrąg

10.1b. hiperbola

10.1c. elipsa

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

10.1d. dwie proste przecinające się
10.1e. parabola i prosta
10.1f. dwie proste prostopadłe
10.4 elipsa $\frac{(x-8)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$
10.5 symetralna odcinka OP: $2x+8y-17=0$
10.6 elipsa: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
10.7 parabola: $y=\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{2}$
10.8 parabole: $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}$ i $y=\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}$
10.9 prosta: $2x-y-4{,}5=0$
10.10 parabola: $y=\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{4}$
11.3 $K=(2,0,0), I=(4,0,2), M=(4,2,4), N=(2,4,4), J=(0,4,2), L=(0,2,0)$
równanie płaszczyzny: $x+y-z-2=0$
figura jest sześciokątem foremnym
11.4 płaszczyzna zawierająca punkty K, I, J oraz L ma równanie $x+y-z-2=0$, natomiast punkt $G=(4,4,4)$ nie spełnia tego równania
11.5 wierzchołki leżą na wysokości 2/3 długości krawędzi bocznej

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020