Fundusze Europejskie
Program Regionalny

SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny w Poznaniu

Tytuł zajęć

„ Matematyka na usługach ekonomii ”

Autor opracowania

Mieczysław Kulas

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:
„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki
w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych
Metropolii Poznań*”

Poznań 2021

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Zadanie o suplementach diety, jako praktyczny przykład wykorzystania metod algebry liniowej w zagadnieniach ekonomicznych.	2
2.	Macierze i ich typy. Wybrane operacje na macierzach 2.1 Wprowadzenie. 2.2 Określenie macierzy i jej cechy charakterystyczne. 2.3 Zasadnicze rodzaje macierzy. 2.3.1 Macierz zerowa. 2.3.2 Macierz jednostkowa. 2.3.3 Macierz współczynników układu równań liniowych, macierz rozszerzona układu równań liniowych. 2.4 Podstawowe operacje na macierzach. 2.4.1 Równość macierzy. 2.4.2 Operacja transponowania macierzy. 2.4.3 Operacje elementarne na macierzach (OE1, OE2, OE3). 2.4.4 Postać zredukowana macierzy, postać całkowicie zredukowana macierzy.	3
3.	Metoda eliminacji Jordana - Gaussa w odniesieniu do układów równań liniowych. 3.1 Wprowadzenie. 3.2 Metoda eliminacji Jordana – Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych w ujęciu praktycznym. 3.2.1 Przykład układu sprzecznego. 3.2.2 Przykład układu równań posiadającego dokładnie jedno rozwiązanie. 3.2.3 Przykład układu równań liniowych, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru. Zastosowanie ekonomiczne. 3.2.4 Przykład układu równań liniowych, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów. Zastosowanie ekonomiczne. 3.3 Rozwiązania bazowe.	5
4.	Metoda eliminacji Jordana - Gaussa w odniesieniu do układów nierówności liniowych 4.1 Co to jest układ nierówności liniowych. 4.2 Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi. 4.3 Metoda ogólna rozwiązywania układów nierówności liniowych.	5
5.	Metoda sympleks w odniesieniu do zagadnienia optymalizacji funkcji celu. 5.1 Wprowadzenie pojęcia standardowego zagadnienia maksymalizacji oraz standardowego zagadnienia minimalizacji w programowaniu liniowym. 5.2 Metoda sympleks dla *n*-wymiarowego standardowego zagadnienia maksymalizacji. 5.3 Metoda sympleks dla *n*-wymiarowego standardowego zagadnienia minimalizacji. Zagadnienie dualne.	5
	Łączna liczba godzin	20

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Moduł nr 1
Tematyka: Zadanie o suplementach diety, jako praktyczny przykład wykorzystania metod algebry liniowej w zagadnieniach ekonomicznych.

Zadanie o suplementach diety.

Sanatorium uzupełnia dietę kuracjuszy o suplementy witaminowe S_1, S_2, S_3, podawane w tabletkach. Każdy z suplementów zawiera inny procent dziennego zapotrzebowania organizmu na witaminy *A*, *C*, *D*. Jedna tabletka suplementu S_1 dostarcza odpowiednio 40%, 20%, 10% dziennego zapotrzebowania na witaminy *A*, *C*, *D*, jedna tabletka suplementu S_2 dostarcza po 10% dziennego zapotrzebowania na witaminy *A*, *C* oraz 30% zapotrzebowania na witaminę *D*. Tabletka suplementu S_3 dostarcza odpowiednio 10%, 50%, 20% dziennego zapotrzebowania na witaminy *A*, *C*, *D*.

Główny lekarz sanatorium określił, że każdy kuracjusz powinien każdego dnia przyjąć 180% dziennego zapotrzebowania na witaminę *A*, 200% – na witaminę *C* oraz 190% – na witaminę *D*.

Ile tabletek każdego suplementu powinien przyjąć kuracjusz każdego dnia, by spełnione zostały zalecenia dotyczące norm dziennych dawek witamin?

Rozwiązanie zadania o suplementach diety (wersja poglądowa).

Umieśćmy dla przejrzystości wszystkie dane występujące w zadaniu w następującej tabeli:

	Suplementy			*Dzienna norma witamin*
Witaminy	S_1	S_2	S_3	
A	40%	10%	10%	180%
C	20%	10%	50%	200%
D	10%	30%	20%	190%

Przyjmijmy, że niewiadome x_1 x_2, x_3 oznaczają szukaną liczbę tabletek suplementów odpowiednio S_1, S_2, S_3. Zgodnie z treścią zadania, niewiadome x_1 x_2, x_3 przyjmują wartości nieujemne (oczekujemy, że będą to liczby naturalne) i spełniają następujący układ **U** równań liniowych:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 = 1{,}8 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}5x_3 = \quad 2 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 = 1{,}9 \end{cases}$$

Powyższy układ równań ma swoją interpretację w postaci odpowiedniej macierzy. Jest to tak zwana macierz rozszerzona danego układu. Oznaczamy ją za pomocą symbolu [**A** | **b**]. Macierz rozszerzona zapisanego układu równań ma postać

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}9 \end{array}\right].$$

Ogólne określenie układu *m* równań liniowych o *n* niewiadomych oraz pojęcie macierzy rozszerzonej układu równań liniowych wprowadzamy i omawiamy w Module nr 2, w punkcie 2.3.4. Dodajmy w tym miejscu, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między układami równań liniowych a macierzami rozszerzonymi tych układów. Zapis [**A** | **b**] pokazuje, że „wewnątrz macierzy” wydzielono na lewo od pionowej kreski tak zwaną macierz współczynników układu, jest to macierz oznaczona symbolem **A**. Tworzą ją wyłącznie współczynniki występujące przy odpowiedniej niewiadomej występującej w określonym równaniu, na przykład ułamek 0,5 występuje w drugim wierszu i trzeciej kolumnie macierzy **A**, ponieważ jest współczynnikiem występującym w drugim równaniu przy niewiadomej x_3. Jeśli niewiadoma nie występowałaby w jednym z równań, przyjmujemy, że w macierzy odpowiada jej współczynnik 0.

By pominąć rachunki na ułamkach, mnożymy wszystkie równania układu przez 10. Przekłada się to na wiersze macierzy [**A** | **b**]. Procedurę tę zapisujemy w następujący sposób:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}9 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1' = 10w_1 \\ w_2' = 10w_2 \\ w_3' = 10w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 5 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right].$$

Wykorzystaliśmy jedną z tak zwanych operacji elementarnych (zastosowanych do wierszy macierzy [**A** | **b**]), operację OE2. Dla przykładu, zapis $w_3' = 10w_3$ oznacza, że utworzono „nowy” trzeci wiersz macierzy [**A** | **b**] w ten sposób, że jego wyrazy powstały z wyrazów „poprzedniego” trzeciego wiersza tej macierzy, w wyniku ich pomnożenia przez 10. W dalszym ciągu będziemy posługiwać się operacjami elementarnymi na wierszach ostatniej macierzy. Istota operacji elementarnych na wierszach ewentualnie na kolumnach macierzy została scharakteryzowana w Module nr 2, w punkcie 2.4.3. Podstawową zaletą operacji elementarnych jest to, że nie zmieniają one zbioru rozwiązań układów równań liniowych.

Macierz

$$[\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 5 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$$

odpowiada następującemu układowi równań

$$\mathbf{U_1}: \begin{cases} 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 18 \\ 2x_1 + 1x_2 + 5x_3 = 20 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases}$$

Układy **U** oraz **U₁** mają identyczne zbiory rozwiązań.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Następujący ciąg operacji elementarnych na wierszach ostatniej macierzy doprowadzi ją do tak zwanej postaci całkowicie zredukowanej (pojęcie postaci całkowicie zredukowanej macierzy omówimy w Module nr 2, w punkcie 2.4.4):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 5 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1'=w_1+(-4)w_3 \\ w_2'=w_2+(-2)w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & -7 & -58 \\ 0 & -5 & 1 & -18 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1'=w_1+(-2)w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -9 & -22 \\ 0 & -5 & 1 & -18 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2'=w_2+(-5)w_1 \\ w_3'=w_3+3w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -9 & -22 \\ 0 & 0 & 46 & 92 \\ 1 & 0 & -25 & -47 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1'=(-1)w_1 \\ w_2'=\frac{1}{46}w_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -25 & -47 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1'=w_1+(-9)w_2 \\ w_3'=w_3+25w_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Począwszy od zapisu $w_1' = w_1 + (-4)w_3$, aż do zapisu $w_3' = w_3 + 25w_2$ sygnalizujemy użycie operacji elementarnej OE3 na wierszach odpowiednich macierzy. W szczególności, operacja OE3, wywołana za pomocą notacji $w_1' = w_1 + (-4)w_3$ oznacza zastąpienie w macierzy $[\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1]$ pierwszego wiersza o wyrazach (4) (1) (1) (18) wierszem o wyrazach (0) (−11) (−7) (−58).

Po zamianie odpowiednich wierszy miejscami uzyskamy macierze

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right].$$

W tym przypadku wykorzystaliśmy dwukrotnie operację elementarną OE1. W szczególności notacja $w_1 \leftrightarrow w_2$ oznacza zamianę w drugiej macierzy występującej w ostatnim ciągu macierzy pierwszego wiersza drugim i drugiego wiersza pierwszym.

Ostatnia otrzymana macierz ma bardzo ważne znaczenie. Jest to postać całkowicie zredukowana macierzy $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ − macierzy rozszerzonej układu **U**. Jedynki wiodące wierszy zostały pogrubione (czyli pierwsze niezerowe elementy wiersza równe 1). Macierz ta odpowiada następującemu układowi równań:

$$\mathbf{U}_2\colon \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$$

Pomijając w zapisie układu $\mathbf{U}_2$ te niewiadome, które występują ze współczynnikiem 0, otrzymamy układ

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\mathbf{U_3}: \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Stąd wnioskujemy natychmiast, że każdy kuracjusz powinien przyjąć każdego dnia trzy tabletki suplementu S_1, cztery tabletki suplementu S_2 oraz dwie tabletki suplementu S_3.

W poglądowym rozwiązaniu zadania o suplementach diety zasygnalizowaliśmy sposób wykorzystania zasadniczego narzędzia (macierzy) i podstawowej metody algebry liniowej − metody eliminacji Jordana − Gaussa w odniesieniu do rozwiązania pewnego problemu natury ekonomicznej. W kolejnych Modułach tego opracowania rozwiniemy metody macierzowe algebry liniowej pod kątem rozwiązywania układów nierówności liniowych niezbędnych dla zagadnień programowania liniowego.

Moduł nr 2
Tematyka: Macierze i ich typy. Wybrane operacje na macierzach.
Opis treści modułu:
2.1 Wprowadzenie.
2.2 Określenie macierzy i jej cechy charakterystyczne.
2.3 Zasadnicze rodzaje macierzy.
2.3.1 Macierz zerowa.
2.3.2 Macierz jednostkowa.
2.3.3 Macierz współczynników układu równań liniowych, macierz rozszerzona układu równań liniowych.
2.4 Podstawowe operacje na macierzach.
2.4.1 Równość macierzy.
2.4 Podstawowe operacje na macierzach.
2.4.1 Równość macierzy.
2.4.2 Operacja transponowania macierzy.
2.4.3 Operacje elementarne na macierzach (OE1, OE2, OE3).
2.4.4 Postać zredukowana macierzy, postać całkowicie zredukowana macierzy.

2.1 Wprowadzenie.

Macierze utożsamiać będziemy z tabelami lub tablicami, w których przechowujemy interesujące nas dane liczbowe. Taka prezentacja danych daje wygodny opis wielu zagadnień ekonomicznych i matematycznych, które w pewnych przypadkach umożliwiają ich analizę jakościową.

Wśród niezliczonych rodzajów macierzy naszą uwagę skupią jedynie niektóre z nich. Szczególnie ważna dla naszych zastosowań okaże się *macierz rozszerzona układu równań liniowych* (punkt 2.3.3). Zawiera ona wszystkie współczynniki danego układu równań. Stosując odpowiednie operacje na jej wierszach (a czasami na kolumnach) możemy doprowadzić ją do tak zwanej *postaci zredukowanej* lub *postaci całkowicie zredukowanej*, z której uzyskujemy informację o zbiorze rozwiązań układu równań liniowych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.2 Określenie macierzy i jej cechy charakterystyczne.

Macierzą prostokątną nazywamy każdą tablicę prostokątną, wewnątrz której wpisujemy w odpowiedni sposób dane liczbowe. Dane te będziemy nazywać *wyrazami macierzy*. Do zapisu macierzy używamy nawiasów kwadratowych [ ], wewnątrz których umieszczamy w odpowiedni sposób dane liczbowe, nie oddzielając ich przecinkami.

Przykład 2.1

$$[-10],\quad [5\quad 0{,}1],\quad [0\quad 3\quad -1\quad 101],\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1234 \\ 13{,}5 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 7 & 7{,}6 & -8 & 0 \\ 2 & 7 & 125 & 0{,}2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 45{,}6 & 98{,}7 & 107 \\ 78{,}9 & 0 & 71 \\ 54{,}3 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

Każda macierz składa się z pewnej liczby rzędów poziomych, które nazywamy *wierszami* oraz rzędów pionowych, nazywanych *kolumnami*. Dla ilustracji, rozpatrując ostatnią macierz z Przykładu 2.1, zauważamy, że ma ona dokładnie trzy wiersze oraz trzy kolumny, w szczególności elementami ostatniej kolumny są liczby: 107, 71, -5, natomiast macierz przedostatnia w tym przykładzie ma dwa wiesze i cztery kolumny. Liczby: 2, 7, 125, 0,2 tworzą ostatni jej wiersz.

Wiersze oraz kolumny macierzy ustalają w sposób jednoznaczny położenie każdego elementu (wyrazu) w macierzy. Wracając ponownie do Przykładu 2.1, liczba 0,1 występująca w drugiej macierzy znajduje się „na przecięciu" pierwszego wiersza oraz drugiej kolumny, z drugiej strony, jedyny element pierwszej macierzy, liczba -10 znajduje się „na skrzyżowaniu" pierwszego wiersza oraz pierwszej kolumny.

Pewne macierze mogą mieć tylko jeden wiersz lub jedną kolumnę (pierwsze cztery macierze z Przykładu 2.1 mają taką własność). Tego typu macierze nazywamy odpowiednio *wektorem wierszowym* oraz *wektorem kolumnowym*. Uogólniając, każda macierz może być interpretowana, jako układ złożony z pewnej liczby wektorów wierszowych oraz wektorów kolumnowych, na przykład macierz

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \\ -7 & 0 & 7 \\ 54 & 0{,}09 & 5 \end{bmatrix}$$

„tworzą" trzy wektory wierszowe:

$$[0{,}6\quad 0{,}7\quad 1],\quad [-7\quad 0\quad 7],\quad [54\quad 0{,}09\quad 5]$$

i trzy wektory kolumnowe:

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 \\ -7 \\ 54 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0 \\ 0{,}09 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przykład 2.2

Pewien zakład produkuje dwa wyroby: w_1, w_2. Do ich produkcji niezbędne są cztery surowce: s_1, s_2, s_3, s_4. Informacje na temat zużycia określonej ilości surowców dla wyprodukowania jednostki każdego wyrobu zawiera poniższa tabela.

Surowce (s)	*Wyroby* (w)	
	w_1	w_2
s_1	12	10
s_2	50	3
s_3	110	40
s_4	60	100

Z tabeli tej odczytujemy na przykład, że do wyprodukowania jednej jednostki wyrobu w_1, konieczne jest zużycie 12 jednostek surowca s_1, 50 jednostek surowca s_2, 110 jednostek surowca s_3 oraz 60 jednostek surowca s_4. W sposób analogiczny odczytujemy informacje o wielkości składników niezbędnych do wyprodukowania jednostki wyrobu w_2. Informacje te uzyskamy, rozpatrując odpowiednie kolumny podanej tabeli. Analizując wiersze tej tabeli znajdziemy dane na temat łącznej wielkości odpowiedniego surowca potrzebnej dla wyprodukowania obu wyrobów, na przykład, ostatni wiersz tabeli pokazuje, że aby wyprodukować po jednostce wyrobu w_1, w_2 należy zużyć łącznie 160 jednostek surowca s_4. Tabela danych generuje tak zwaną *macierz produkcji* dla danego zakładu, ściślej, jest nią macierz $\mathbf{M}_{\mathrm{PROD}}$:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{PROD}} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 50 & 3 \\ 110 & 40 \\ 60 & 100 \end{bmatrix}$$

Liczba wierszy oraz kolumn w macierzy (wymieniane w podanej kolejności) określają tak zwany *wymiar macierzy*. O macierzy

$$\begin{bmatrix} 5 & 0{,}01 \end{bmatrix}$$

powiemy, że ma wymiar 1 na 2, natomiast macierz

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ma wymiar 2 na 1.

Jeśli macierz posiada dokładnie m wierszy oraz n kolumn (m, $n \geq 1$), wówczas mówimy, że *jest wymiaru m na n* lub że jest *macierzą m na n* (w zapisie: $m \times n$). W szczególności, jeśli w danej macierzy liczba jej wierszy pokrywa się z liczbą kolumn, to znaczy spełniony jest warunek $m = n$, wówczas o macierzy tej powiemy, że jest *macierzą kwadratową stopnia m* (lub n), na przykład macierz

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{bmatrix} 10{,}8 & 4{,}2 & 0 & 2 \\ -7 & -8 & 2{,}6 & -6 \\ 0 & -0{,}8 & 89 & -5 \\ 0{,}33 & 37 & 0{,}9 & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą kwadratową stopnia 4.

Podkreślmy jeszcze raz, że określając wymiar macierzy, podajemy najpierw liczbę jej wierszy, następnie liczbę kolumn.

W zagadnieniach teoretycznych z reguły abstrahujemy od konkretnej liczby wierszy i kolumn macierzy. W celu uogólnień rozpatruje się wszystkie macierze, które posiadają dokładnie *m* wierszy oraz *n* kolumn (*m*, *n* oznaczają z góry ustalone liczby naturalne, dopuszczamy też możliwość, że $m = n$). Macierz tego typu ma postać

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

o ile mamy na myśli macierz $m \times n$ lub

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

w przypadku macierzy kwadratowej stopnia *n*.

Położenie dowolnego wyrazu macierzy określają dwa indeksy, na przykład wyraz a_{11} znajduje się jednocześnie w pierwszym wierszu oraz pierwszej kolumnie macierzy, natomiast wyraz a_{mn} znajduje się jednocześnie w wierszu o numerze *m* oraz kolumnie o numerze *n*. Ogólniej, dla dowolnie ustalonych liczb naturalnych *i*, *j* takich, że $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, wyraz a_{ij} znajduje się jednocześnie w *i* - tym wierszu oraz *j* - tej kolumnie, to znaczy, w wierszu o numerze *i* oraz kolumnie o numerze *j*.

W macierzach kwadratowych pewną rolę odgrywają te wyrazy, które znajdują się na przecięciu wiersza i kolumny o tym samym numerze. Dla macierzy kwadratowej

$$\begin{bmatrix} -1 & 1234 \\ 135 & 0 \end{bmatrix}$$

będą to wyrazy (–1) oraz 0. W przypadku ogólnym, dla macierzy kwadratowej (2.2) są to wyrazy $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$. Wyrazy tego typu wyznaczają tak zwaną *przekątną główną* (przekątna główna jest pojęciem związanym jedynie z macierzami kwadratowymi).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Pełna postać macierzy może zostać zredukowana do jednego z zapisów $[a_{ij}]_{m \times n}$ lub $[a_{ij}]$. Zapis $[a_{ij}]_{m \times n}$ oznacza macierz wymiaru $m \times n$, której wyraz ogólny jest równy a_{ij}. Indeksy i, j opisujące położenie wyrazów takiej macierzy mają z góry ustalony zakres zmienności, na przykład dla danych liczb naturalnych m, n, mamy następujące ograniczenie: $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Drugiego zapisu używamy wtedy, kiedy chcemy wskazać jedynie wyrazy macierzy. Wskazane jest odróżnianie znaczenia symboli a_{ij} oraz $[a_{ij}]_{m \times n}$.

W wielu przypadkach dla oznaczenia macierzy używa się dużych liter alfabetu, na przykład A, X. Niektóre typy macierzy mają specyficzne oznaczenia. Wkrótce poznamy macierzowy sens takich symboli, jak: $\Theta_{m,n}$, Θ_n, I_n, A^T, **A**, [**A** | **b**].

2.3 Zasadnicze rodzaje macierzy.

Na naszą uwagę zasługują te macierze, które będą niezbędne w interesujących nas zastosowaniach. Poniżej dokonamy przeglądu wybranych rodzajów macierzy pod tym kątem.

2.3.1 Macierz zerowa.

Macierz zerowa, to taka macierz, której wszystkie wyrazy są równe zero. Macierz tę oznaczamy symbolem $\Theta_{m\times n}$, jeśli ma ona wymiar $m \times n$ ($m \ne n$) lub Θ_n, o ile jest to macierz kwadratowa stopnia n.

Z przyjętej konwencji wynika w szczególności, że

$$\Theta_1 = [0], \qquad \Theta_{1\times 4} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\Theta_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Theta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Macierz jednostkowa.

Macierz jednostkowa, to macierz kwadratowa ustalonego stopnia n, w której elementy $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ są wszystkie równe 1, a pozostałe elementy są równe 0. Niezerowe elementy macierzy jednostkowej występują, zatem na głównej przekątnej macierzy. Macierz tę oznaczamy symbolem I_n. Indeks n wskazuje stopień macierzy jednostkowej.

Na podstawie powyższego opisu: $I_1 = [1]$ (w tym przypadku nie ma wyrazów zerowych), ponadto

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz jednostkowa I_n stopnia n ma następującą postać ogólną:

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Macierz współczynników układu równań liniowych, macierz rozszerzona układu równań liniowych.

Kolejne dwa typy macierzy są ściśle związane z układami równań liniowych. W celu głębszego zrozumienia tych pojęć zaczniemy od konkretnych przypadków.

Weźmy pod uwagę następujący układ **U** dwóch równań liniowych

$$\mathbf{U}: \begin{cases} -0{,}1x_1 + 3{,}8x_2 = 56 \\ \ \ 2{,}3x_1 - 7{,}9x_2 = 78 \end{cases}$$

o niewiadomych x_1, x_2.

Wyrazami *macierzy współczynników* danego układu równań są wszystkie wartości liczbowe (uwzględniając ich znaki) występujące jedynie przy niewiadomych, dokładniej, *macierz współczynników układu* **U** ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 3{,}8 \\ 2{,}3 & -7{,}9 \end{bmatrix}$$

Wyrazami *macierzy rozszerzonej* rozpatrywanego układu równań liniowych są wszystkie wartości liczbowe (z uwzględnieniem ich znaków) występujące w danym układzie, ściślej, *macierz rozszerzona* układu **U** ma postać:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} -0{,}1 & 3{,}8 & 56 \\ 2{,}3 & -7{,}9 & 78 \end{array}\right]$$

Pionowa kreska występująca wewnątrz macierzy oddziela współczynniki występujące w układzie przy niewiadomych (czyli wyrazy macierzy **A**) od pozostałych wartości liczbowych występujących w tym układzie.

Rozpatrzmy jeszcze następujący układ **U** czterech równań liniowych:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & - & 32x_3 & = & -3 \\ 12x_1 & & & - & 523x_3 & = & 12 \\ & & 24x_2 & - & 421x_3 & = & -8 \\ 12x_1 & & & + & 78x_3 & = & 478 \end{cases}$$

o niewiadomych x_1, x_2, x_3.

Macierz **A** współczynników oraz macierz [**A** | **b**] rozszerzona tego układu równań mają odpowiednio postać:

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -32 \\ 12 & 0 & -523 \\ 0 & 24 & -421 \\ 12 & 0 & 78 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -32 & -3 \\ 12 & 0 & -523 & 12 \\ 0 & 24 & -421 & -8 \\ 12 & 0 & 78 & 478 \end{array}\right].$$

Rozpatrzmy teraz sytuację ogólną. Niech m, n oznaczają ustalone liczby naturalne takie, że $m \geq 2$, $n \geq 1$. Wyrażenie

$$\mathbf{U}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.3}$$

nazywamy *układem m równań liniowych o n niewiadomych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Liczby rzeczywiste: $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ nazywamy *współczynnikami układu* **U** *równań liniowych*.

Macierzą współczynników układu **U** *równań liniowych* (2.3) nazywamy macierz

$$\mathbf{A} = [\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Macierzą rozszerzoną układu **U** *równań liniowych* (2.3) nazywamy macierz

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = [\,a_{ij} \mid b_i\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2.5}$$

Dany układ **U** równań liniowych wyznacza w sposób jednoznaczny zarówno macierz współczynników tego układu, jak i macierz rozszerzoną. Z drugiej strony, każda macierz postaci (2.5) wyznacza jednoznacznie, w duchu zależności (2.3), pewien układ **U**, m równań liniowych o n niewiadomych (niewiadome te nie muszą być oznaczone symbolami $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Oznacza to, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między zbiorem wszystkich układów równań liniowych rozumianych w sensie wyrażeń typu (2.3), a zbiorem wszystkich macierzy postaci (2.5). Własność ta odgrywa podstawową rolę w metodzie rozwiązywania układów równań liniowych (nazywanej *metodą eliminacji Gaussa–Jordana*), opartej na przekształceniach macierzy za pomocą tak zwanych operacji elementarnych (punkt 2.4.3), wykonywanych głównie na wierszach macierzy.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.4 Podstawowe operacje na macierzach.

2.4.1 Równość macierzy.

Przegląd zasadniczych operacji wykonywanych na macierzach rozpoczniemy od wprowadzenia kryterium, które pozwoli „odróżnić" jedną macierz od drugiej.

Macierze $[a_{ij}]_{m \times n}$, $[b_{ij}]_{p \times q}$ uważamy za *równe* lub *identyczne* i piszemy

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{p \times q}$$

o ile mają ten sam wymiar oraz takie same odpowiednie wyrazy. Dokładniej, zależność

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{p \times q} \tag{2.6}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $m = p$, $n = q$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$, dla wszystkich możliwych indeksów i, j.

2.4.2 Operacja transponowania macierzy.

Dana jest macierz A = $[a_{ij}]_{m \times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. *Macierzą transponowaną macierzy* A nazywamy macierz wymiaru $n \times m$, którą oznaczamy symbolem A^T taką, że dla $k = 1, 2, \dots, m$, kolumna o numerze k macierzy A^T jest wierszem o numerze k macierzy A. Zaznaczmy, że macierz A^T jest wyznaczona przez macierz A w sposób jednoznaczny.

Przykład 2.3

Macierzą transponowaną macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 7{,}6 & -8 & 0 \\ 6 & 6{,}7 & 12{,}5 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

jest macierz

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7{,}6 & 6{,}7 \\ -8 & 12{,}5 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

Macierz A^T ma wymiar 4×2 (macierz A ma wymiar 2×4). Na podstawie przyjętej definicji, pierwsza kolumna macierzy A^T powstała z pierwszego wiersza macierzy A, natomiast druga kolumna macierzy A^T powstała z drugiego wiersza macierzy A. Można też powiedzieć, że pierwszy wiersz macierzy A^T powstał z pierwszej kolumny macierzy A, pozostałe wiersze uzyskujemy w sposób analogiczny.

Z określenia macierzy transponowanej wynika, że operacja transponowania zmienia na ogół wymiar macierzy transponowanej w stosunku do wymiaru macierzy wyjściowej. Wyjątkiem jest transponowanie macierzy kwadratowych.

W naszych zastosowaniach operacja transponowania macierzy będzie wykorzystywana do „oszczędniejszej" formy zapisu rozwiązań układów równań liniowych (oraz układów nierówności liniowych).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.4.3 Operacje elementarne na macierzach.

Operacja OE1

Operacja ta dotyczy możliwości zamiany miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn w macierzy. Rozpatrzmy na przykład macierz

$$A = \begin{bmatrix} 456 & -789 & 147 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ 147 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

Zamieniając miejscami wiersz drugi z trzecim, otrzymamy macierz

$$M_1 = \begin{bmatrix} 456 & -789 & 147 \\ 147 & 0{,}09 & -5 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

Zapis: $w_2 \leftrightarrow w_3$ jest umowną notacją dla wykonanej operacji. Ogólniej, jeśli w macierzy A zamieniamy miejscami wiersz o indeksie i (i-ty wiersz) z wierszem o indeksie j (j-ty wiersz), przy czym $i \neq j$, to procedurę tę sygnalizujemy pisząc $w_i \leftrightarrow w_j$.

Z drugiej strony, zamieniając miejscami w macierzy A pierwszą kolumnę z trzecią, uzyskamy macierz

$$M_2 = \begin{bmatrix} 147 & -789 & 456 \\ 0{,}09 & 0 & -78{,}9 \\ -5 & 0{,}09 & 147 \end{bmatrix}$$

Zapis: $k_1 \leftrightarrow k_3$ jest umowną notacją dla wykonanej operacji. Uogólniając, jeśli w macierzy A zamieniamy miejscami kolumnę o indeksie i (i-tą kolumnę) z kolumną o indeksie j (j-tą kolumnę), $i \neq j$, to procedurę tę zaznaczamy pisząc $k_i \leftrightarrow k_j$.

Operacja OE2

Ten typ operacji elementarnej pozwala na pomnożenie wyrazów dowolnie wybranego wiersza macierzy lub wyrazów dowolnej jej kolumny przez ustaloną, niezerową liczbę rzeczywistą. Jako przykład rozpatrzmy ponownie macierz

$$A = \begin{bmatrix} 456 & -789 & 147 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ 147 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

Mnożąc wyrazy trzeciego jej wiersza przez $\frac{1}{3}$ otrzymamy macierz

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$M_3 = \begin{bmatrix} 456 & -789 & 147 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ 49 & 0{,}03 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Symbolicznie, $w_3' = \frac{1}{3} w_3$. Ogólniej, pomnożenie wyrazów wiersza o numerze i przez niezerową liczbę c sygnalizujemy, pisząc $w_i' = cw_i$.

Jeśli pomnożymy wyrazy pierwszej kolumny macierzy A przez liczbę –1, otrzymamy macierz

$$M_4 = \begin{bmatrix} -456 & -789 & 147 \\ 78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ -147 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku zastosujemy notację: $k_1' = (-1)k_1$. Uogólniając, zapis $k_j' = ck_j$ oznacza pomnożenie wyrazów j-tej kolumny pewnej macierzy przez c.

Operacja OE3

Jest to najefektywniejsza operacja wśród wymienionych. Dotyczy ona możliwości dodania do wyrazów ustalonego wiersza (kolumny) macierzy odpowiednich wyrazów innego wiersza (kolumny) tej macierzy, które wcześniej zostały pomnożone przez pewną liczbę rzeczywistą. Dla ilustracji wykorzystajmy jeszcze raz macierz

$$A = \begin{bmatrix} 456 & -789 & 147 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ 147 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

Dodajmy do wyrazów pierwszego jej wiersza odpowiednie wyrazy wiersza drugiego, które wcześniej pomnożyliśmy przez –1. Symbolicznie, operacja ta ma postać: $w_1' = w_1 + (-1)w_2$. Po wykonaniu tej operacji otrzymamy macierz

$$M_5 = \begin{bmatrix} 534{,}9 & -789 & 146{,}91 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ 147 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

Ogólniej zapis $w_k' = w_k + cw_l$ oznacza, że do wyrazów k-tego wiersza pewnej macierzy dodaliśmy odpowiednio wyrazy wiersza l-tego, które wcześniej pomnożyliśmy przez liczbę c.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Dodajmy tym razem do wyrazów pierwszej kolumny macierzy A odpowiednie wyrazy kolumny drugiej, które wcześniej pomnożyliśmy przez $\frac{1}{3}$. Symbolicznie operacji tej nadajemy postać: $k_1' = k_1 + \frac{1}{3}k_2$. Po jej wykonaniu otrzymamy macierz

$$M_6 = \begin{bmatrix} 193 & -789 & 147 \\ -78{,}9 & 0 & 0{,}09 \\ 147{,}03 & 0{,}09 & -5 \end{bmatrix}$$

Ogólniej, zapis $k_r' = k_r + ck_s$ mówi, że do wyrazów r-tej kolumny pewnej macierzy dodaliśmy odpowiednio wyrazy kolumny s-tej, które wcześniej pomnożyliśmy przez liczbę c.

2.4.4 Postać zredukowana macierzy, postać całkowicie zredukowana macierzy.

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach danej macierzy zmieniamy za każdym razem jej postać. Ciąg pewnych operacji elementarnych może doprowadzić daną macierz do postaci, w której wyrazy „układają się" w pewien charakterystyczny sposób.

O niezerowej macierzy A powiemy, że A *jest w postaci zredukowanej*, jeśli spełnione są jednocześnie następujące warunki:

W1**.** Wszystkie wiersze macierzy, które zawierają wyłącznie same zera (o ile takie wiersze istnieją) występują poniżej wierszy zawierających niezerowe wyrazy.

W2. W każdym wierszu, który zawiera niezerowy wyraz pierwszym niezerowym wyrazem od lewej jest liczba 1. W tym przypadku liczbę 1 nazywamy *wiodącą jedynką tego wiersza*.

W3. Dla sąsiednich wierszy zawierających niezerowe wyrazy (o ile takie wiersze istnieją) wiodąca jedynka wiersza leżącego wyżej jest na lewo w stosunku do wiodącej jedynki wiersza leżącego niżej.

Przykład 2.4

Następujące macierze są w postaci zredukowanej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poniższe macierze nie są w postaci zredukowanej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -7 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

O niezerowej macierzy A powiemy, że A *jest w postaci całkowicie zredukowanej*, jeśli A jest w postaci zredukowanej oraz dodatkowo każda kolumna, w której znajduje się wiodąca jedynka ma pozostałe wyrazy równe 0.

Przykład 2.5

Każda z poniższych macierzy jest w postaci całkowicie zredukowanej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jednak macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nie jest w postaci całkowicie zredukowanej, lecz jest w postaci zredukowanej (każda macierz, która jest w postaci całkowicie zredukowanej jest oczywiście w postaci zredukowanej, jednak jak pokazuje powyższy przykład zależność odwrotna nie musi być prawdziwa).

Dla macierzy A *postacią zredukowaną tej macierzy* jest każda macierz, która jest w postaci zredukowanej i powstała z A w wyniku zastosowania skończonej liczby operacji elementarnych na wierszach macierzy A.

Dla macierzy A *postacią całkowicie zredukowaną tej macierzy* jest jednoznacznie określona przez A macierz, która powstała z A w wyniku zastosowania skończonej liczby operacji elementarnych na wierszach macierzy A.

Na ogół dana macierz nie jest w postaci zredukowanej (a więc i w postaci całkowicie zredukowanej). W metodzie rozwiązywania układów równań liniowych nazywanej metodą eliminacji Jordana – Gaussa (Moduł nr 3) istotna jest umiejętność doprowadzenia macierzy rozszerzonej układu równań do macierzy, która jest w postaci całkowicie zredukowanej (a więc i w postaci zredukowanej). Poniższa własność gwarantuje możliwość doprowadzenia każdej macierzy do macierzy takiej, która jest w postaci całkowicie zredukowanej, czyli daje podstawę teoretyczną tej metody rozwiązywania układów równań liniowych.

Własność

Każdą niezerową macierz A można doprowadzić za pomocą skończonej liczby operacji elementarnych na wierszach tej macierzy do macierzy, która jest w postaci całkowicie zredukowanej (a więc także do macierzy, która jest w postaci zredukowanej). Otrzymana macierz w postaci całkowicie zredukowanej jest wyznaczona przez macierz wyjściową w sposób jednoznaczny.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Każda macierz, która powstaje z macierzy A w powyższy sposób i jest w postaci zredukowanej ma tę samą liczbę wiodących jedynek. Wiodące jedynki występują na tych samych miejscach, co w macierzy otrzymanej z macierzy A, która jest w postaci całkowicie zredukowanej.

Przykład 2.6

Aby zilustrować wprowadzone pojęcia rozpatrzmy macierz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz ta nie jest w postaci zredukowanej (i oczywiście nie jest w postaci całkowicie zredukowanej). Pierwszy wiersz tej macierzy zawiera niezerowe wyrazy, co więcej pierwszy niezerowy element, to jedynka. W tym przypadku jest to wiodąca jedynka tego wiersza, zatem zastosujemy takie operacje elementarne na wierszach macierzy, które pozwolą uzyskać zera w kolumnie pierwszej. Należy zamienić wyrazy a_{21} (= 2) oraz a_{31} (= 5) na zera. W tym celu wykorzystamy następujące operacje elementarne (typu OE3): $w_2' = w_2 + (-2)w_1$, $w_3' = w_3 + 5w_1$, doprowadzając wyjściową macierz do postaci (wiodąca jedynka pierwszego wiersza została pogrubiona)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

W tym momencie nie warto stosować operacji elementarnych, które byłyby związane z pierwszym wierszem, gdyż w przeciwnym razie stracilibyśmy zera występujące w pierwszej kolumnie.

Pierwszym niezerowym wyrazem w drugim wierszu ostatniej macierzy jest liczba 5. Dodając odpowiednio do wyrazów tego wiersza wyrazy wiersza trzeciego, uzyskamy wiodącą jedynkę drugiego wiersza[1]. Po operacji elementarnej (typu OE3) $w_2' = w_2 + w_3$ uzyskujemy macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

[1] Nie jest to jedyny sposób uzyskania wiodącej jedynki tego wiersza. Alternatywnie moglibyśmy pomnożyć wyrazy tego wiersza przez $\frac{1}{5}$. Operacja ta wprowadziłaby jednak ułamki, co nie byłoby korzystne w dalszych obliczeniach.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Wiodąca jedynka drugiego wiersza pozwoli uzyskać zera na odpowiednich miejscach w drugiej kolumnie. Spowodują to następujące operacje elementarne (typu OE3): $w_1' = w_1 + w_2$, $w_3' = w_3 + 4w_2$.

Po zapowiedzianych operacjach elementarnych otrzymamy macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 42 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Można zauważyć, że trzeci i czwarty wiersz ostatniej macierzy składają się wyłącznie z liczb parzystych. Aby uprościć dalsze rachunki, wygodnie jest pomnożyć te wiersze przez $\frac{1}{2}$. Stosujemy, zatem następujące operacje elementarne (typu OE2): $w_3' = \frac{1}{2} w_3$, $w_4' = \frac{1}{2} w_4$. Tym samym, ostatnia macierz przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 21 & 12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Zamieniając miejscami wiersz trzeci z czwartym, to znaczy stosując operację elementarną (typu OE1) $w_3 \leftrightarrow w_4$, otrzymamy macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 21 & 12 \end{bmatrix}$$

Jedynka wiodąca wiersza trzeciego oraz operacje elementarne: $w_1' = w_1 + (-4)w_3$, $w_2' = w_2 + (-4)w_3$, $w_4' = w_4 + (-8)w_3$ doprowadzą ostatnią macierz do postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 4 \end{bmatrix}$$

Jeśli pomnożymy czwarty wiersz ostatniej macierzy przez $(-\frac{1}{11})$, co sygnalizuje operacja $w_4' = -\frac{1}{11} w_4$, wówczas powstanie macierz

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} \end{bmatrix}.$$

Operacje elementarne: $w_1' = w_1 + 8w_4$, $w_2' = w_2 + 8w_4$, $w_3' = w_3 + (-4)w_4$ nadadzą ostatniej macierzy kształt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{43}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{27}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

postaci całkowicie zredukowanej. Zauważmy przy okazji, że w trakcie całej operacji doprowadzenia macierzy do postaci całkowicie zredukowanej wskazaliśmy „po drodze” kilka jej postaci zredukowanych.

Moduł nr 3
Tematyka: Metoda eliminacji Jordana – Gaussa w odniesieniu do układów równań liniowych.
Opis treści modułu
3.1 Wprowadzenie.
3.2 Metoda eliminacji Jordana – Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych w ujęciu praktycznym.
3.2.1 Przykład układu sprzecznego.
3.2.2 Przykład układu równań posiadającego dokładnie jedno rozwiązanie.
3.2.3 Przykład układu równań liniowych, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.
3.2.4 Przykład układu równań liniowych, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów.
3.3 Rozwiązania bazowe.

3.1 Wprowadzenie.

Celem tego modułu jest przedstawienie podstawowej metody rozwiązywania układów równań liniowych, nazywanej metodą eliminacji Jordana – Gaussa (punkt 3.2). Przeanalizujemy na odpowiednich przykładach niektóre przypadki dotyczące postaci zbioru rozwiązań układów równań, ściślej, przypadek *układu sprzecznego*, *układu posiadającego dokładnie jedno rozwiązanie* oraz *układów posiadających nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od ustalonej liczby parametrów*.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fakt, że układ równań liniowych posiada nieskończenie wiele rozwiązań wyrażamy za pomocą tak zwanego *rozwiązania ogólnego – rozwiązania parametrycznego*, z którego można odczytać *rozwiązania szczególne*, otrzymane dzięki ustaleniu wartości liczbowych dla parametrów. Wśród rozwiązań szczególnych na uwagę zasługują *rozwiązania bazowe* (punkt 3.3), przydatne przy rozwiązywaniu *układów nierówności liniowych*[2] (Moduł 4, punkt 4.2).

Przed prezentacją zagadnień rozpatrywanych w tym module przypomnijmy dla wygody niezbędne pojęcia dotyczące układów równań liniowych wprowadzone w poprzednich modułach..

Dla ustalonych liczb naturalnych m, n ($m \geq 2$, $n \geq 1$) wyrażenie

$$\mathbf{U}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

nazywamy *układem m równań liniowych o n niewiadomych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Liczby rzeczywiste $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ (nie wszystkie równe jednocześnie zeru) oraz b_1, …, b_m nazywamy *współczynnikami rozpatrywanego układu równań liniowych*.

Jeśli wszystkie współczynniki $b_1, \ldots, b_m$ przyjmują wartość zero, to układ równań (3.1) nazywamy *układem jednorodnym*, jeśli natomiast przynajmniej jeden z nich jest różny od zera, to mówimy o *układzie niejednorodnym*.

Macierzą współczynników układu (3.1) nazywamy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Macierzą rozszerzoną układu (3.1) nazywamy macierz

[2] Dodajmy również, że za pomocą przeszukiwania zbioru rozwiązań bazowych układu równań można znaleźć rozwiązania pewnych zagadnień programowania liniowego. Zagadnieniem programowania liniowego zajmiemy się w ostatnim module tego opracowania

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{3.3}$$

Rozwiązaniem układu równań (3.1) nazywamy każdy uporządkowany układ

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taki, że dla każdego i, $1 \le i \le m$

$$a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + \ldots + a_{in}a_n = b_i .$$

Ze względu na liczbę rozwiązań, układ (3.1) może być *układem sprzecznym* (nie posiadającym rozwiązań) lub układem *niesprzecznym* (posiadającym co najmniej jedno rozwiązanie).

Przypadek układu równań o dwóch niewiadomych ma ważną interpretację geometryczną. W sensie geometrii analitycznej, wyrażenie $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b$ opisuje na płaszczyźnie prostą[3], zatem układ dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

w zależności od liczby rozwiązań może być miernikiem wzajemnego położenia dwóch prostych na płaszczyźnie, opisanych tymi równaniami. Dokładniej, układowi posiadającemu jedno rozwiązanie odpowiada para prostych nierównoległych (przecinających się), układowi sprzecznemu odpowiada para różnych prostych równoległych, wreszcie układowi o nieskończenie wielu rozwiązaniach odpowiada jedna prosta (w tym przypadku oba równania mają proporcjonalne odpowiednie współczynniki i wyznaczają na płaszczyźnie tę samą prostą).

3.2 Metoda eliminacji Jordana – Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych w ujęciu praktycznym.

[3] Częściej stosuje się zapis $ax + by = c$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Rozwiązywanie układów równań liniowych tą metodą polega w praktyce (nie wchodząc w szczegóły algebraiczne, w szczególności pomijając pojęcie rzędu macierzy) na doprowadzeniu macierzy rozszerzonej układu równań do postaci całkowicie zredukowanej. Aby tego dokonać stosuje się operacje elementarne na wierszach rozpatrywanej macierzy (w pewnych przypadkach operacje elementarne wykonujemy na kolumnach macierzy). Postać całkowicie zredukowana macierzy pozwala scharakteryzować ilościowo i jakościowo zbiór rozwiązań badanego układu równań.

Najbardziej typowe przypadki, jakie można spotkać wyznaczając rozwiązania układów równań liniowych tą metodą przedstawiają poniższe przykłady.

3.2.1 Przykład układu sprzecznego.

Rozpatrzmy następujący układ **U** czterech równań liniowych o czterech niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Stosując metodę eliminacji Jordana – Gaussa uzasadnimy, że układ ten nie posiada rozwiązań. Macierz rozszerzona rozpatrywanego układu ma postać

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Pamiętamy o tym, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między układami równań liniowych oraz macierzami tych układów (macierzami rozszerzonymi układów równań liniowych). Zastosujemy teraz odpowiednie operacje elementarne na jej wierszach po to, by doprowadzić ją do takiej postaci, z której wynikać będzie, że dany układ równań jest sprzeczny (nie posiada rozwiązań). Jak zwykle wiodące jedynki wierszy zapisujemy pogrubioną czcionką:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3'=w_3+(-2)w_1]{w_2'=w_2+w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4'=w_4+(-1)w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Dla sprzecznego układu równań liniowych macierz rozszerzona tego układu ma charakterystyczną budowę (porównaj ostatnią macierz w powyższym przykładzie). Po zastosowaniu odpowiedniej liczby operacji elementarnych na jej wierszach pojawia się wiersz, którego wszystkie wyrazy na lewo od pionowej kreski są równe 0, a wyraz tego wiersza znajdujący się na prawo od kreski jest niezerowy. W naszym przypadku jest to ostatni wiersz ostatniej otrzymanej macierzy. Ostatni wiersz interpretujemy jako równanie postaci: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$. Jest jasne, że jest to równanie sprzeczne. Układ równań, który zawiera równanie sprzeczne sam jest układem sprzecznym. Oznacza to, że rozpatrywany układ równań liniowych jest układem sprzecznym.

W przypadku ogólnym, jeśli w trakcie przekształcania macierzy rozszerzonej układu równań za pomocą operacji elementarnych otrzymamy pewien jej wiersz, którego odpowiednikiem jest równanie $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c$, dla pewnej niezerowej liczby c, to wnioskujemy, że badany układ równań liniowych jest układem sprzecznym.

3.2.2 Przykład układu równań posiadającego dokładnie jedno rozwiązanie.

Wyznaczymy wszystkie rozwiązania poniższego układu **U** czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -8 \end{cases}.$$

Konstruujemy macierz [**A** | **b**] rozszerzoną układu

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

oraz staramy się doprowadzić ją za pomocą odpowiednich operacji elementarnych do postaci całkowicie zredukowanej (jedynki wiodące wierszy będą pogrubione):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4'=w_4+(-4)w_3]{\substack{w_1'=w_1+(-2)w_3 \\ w_2'=w_2+(-4)w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -11 & 5 & 15 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & -13 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2'=w_2+2w_1 \\ w_4'=w_4+7w_1}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 25 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -41 & -1 & 39 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4'=w_4+(-2)w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 25 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2'=w_2+(-6)w_4}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 45 & 91 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4'=w_4+(-3)w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 45 & 91 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -142 & -284 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4'=(-\frac{1}{142})w_4]{w_2'=(-1)w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -45 & -91 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right]$$

Zamieniając miejscami odpowiednie wiersze otrzymamy na razie macierz rozszerzoną rozpatrywanego układu w następującej postaci zredukowanej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -45 & -91 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right].$$

Kontynuujemy stosowanie operacji elementarnych na otrzymanej powyżej macierzy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -45 & -91 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1'=w_1+2w_4 \\ w_2'=w_2+w_4 \\ w_3'=w_3+45w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1'=w_1+(-3)w_3 \\ w_2'=w_2+4w_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1'=w_1+(-1)w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right].$$

Ostatnia macierz jest postacią całkowicie zredukowaną macierzy rozszerzonej rozpatrywanego układu. Z jej kształtu wynika, że poszukiwanym rozwiązaniem jest uporządkowana czwórka liczb

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \quad 3 \quad -1 \quad 2]^T.$$

Istotnie, macierz ta generuje następujący układ równań liniowych:

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\mathbf{U}_1:\begin{cases}1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1\\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3\\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = -1\\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 2\end{cases}$$

lub układ równoważny

$$\mathbf{U}_2:\begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = 3\\ x_3 = -1\\ x_4 = 2\end{cases}.$$

Na zakończenie sprawdzimy jeszcze poprawność otrzymanego rozwiązania:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot(-1) - 5\cdot 2 = -1,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-1) - 3\cdot 2 = 3,$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 + 3 + 3\cdot(-1) - 2\cdot 2 = -3,$$
$$4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4\cdot 1 - 3\cdot 3 - (-1) - 2\cdot 2 = -8.$$

3.2.3 Przykład układu równań liniowych, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Zbadamy rozwiązania następującego układu **U** czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\mathbf{U}:\begin{cases}2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1\\ -x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1\\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 2\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\end{cases}.$$

Pokażemy, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Macierz rozszerzona odpowiadająca danemu układowi równań ma postać

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c}2 & 3 & 4 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$$

Następujący ciąg operacji elementarnych na wierszach tej macierzy doprowadzi ją do macierzy w postaci zredukowanej

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 3 & 4 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{w_1'=w_1+2w_2\\ w_3'=w_3+w_2\\ w_4'=w_4+w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c}0 & 3 & 8 & 7 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 8 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{w_2'=(-1)w_2\\ w_3'=w_3+(-1)w_1}}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 8 & 7 & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1'=w_1+(-3)w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_4]{w_1'=(-1)w_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wyznaczmy postać wszystkich rozwiązań układu – *rozwiązanie ogólne układu*. W tym celu znajdziemy postać całkowicie zredukowaną ostatniej macierzy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2'=w_2+(-3)w_3]{w_1'=w_1+2w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ostatnia macierz jest postacią całkowicie zredukowaną macierzy rozszerzonej rozpatrywanego układu równań.

Wiodące jedynki wierszy dzielą wszystkie niewiadome na dwa typy. Do pierwszego typu zaliczymy te niewiadome, które wskazują same wiodące jedynki, natomiast do drugiego typu – pozostałe niewiadome. Niewiadome pierwszego typu nazywać będziemy *niewiadomymi pierwotnymi*. W naszym przypadku wiodące jedynki wierszy występują w pierwszych trzech wierszach macierzy, zatem niewiadomymi pierwotnymi są niewiadome x_1, x_2 oraz x_3. Niewiadoma x_4 jest jedynym parametrem.

Otrzymana macierz generuje następujący układ $\mathbf{U_1}$ równań liniowych o niewiadomych pierwotnych x_1, x_2, x_3 (czwarty wiersz macierzy, złożony z samych zer, generuje równanie, w którym wszystkie współczynniki są równe 0, równanie to spełnia dowolna kombinacja czterech liczb rzeczywistych, dlatego zostało ono pominięte, jako nieograniczające poszukiwanych rozwiązań)

$$\mathbf{U_1}: \begin{cases} x_1 \qquad\qquad + 7x_4 = -1 \\ \qquad x_2 \qquad - 11x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ustalając wartość liczbową parametru x_4, na przykład $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, uzyskujemy postać rozwiązania ogólnego rozpatrywanego układu równań

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-7t \\ 1+11t \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Na koniec sprawdzimy, czy uzyskany układ liczb jest rzeczywiście rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2(-1-7t) + 3(1+11t) + 4(-5t) + t = 1,$$
$$-x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -(-1-7t) + 2(-5t) + 3t = 1,$$
$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = (-1-7t) + 3(1+11t) + 6(-5t) + 4t = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (-1-7t) + (1+11t) + (-5t) + t = 0.$$

Podstawiając za parametr t konkretne liczby rzeczywiste, uzyskujemy *rozwiązania szczególne układu*. Wyznaczymy dwa takie rozwiązania. Jeśli $t = 0$, to rozwiązanie szczególne odpowiadające tej wartości t ma postać: $[-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$. Jeśli $t = 10$, to rozwiązanie szczególne wyznaczone przez taką wartość parametru ma postać: $[-71 \quad 111 \quad -50 \quad 10]^{\mathrm{T}}$.

Zastosowanie natury ekonomicznej.

Pewne przedsiębiorstwo produkuje dziennie trzy rodzaje wyrobów: W_1, W_2, W_3. Do ich produkcji wykorzystywane są trzy rodzaje surowców: S_1, S_2, S_3. Do produkcji jednostki wyrobu W_1 niezbędnych jest 12 jednostek surowca S_1, 16 jednostek surowca S_2 oraz 8 jednostek surowca S_3. Do produkcji jednostki wyrobu W_2 należy przeznaczyć 20 jednostek surowca S_1, 12 jednostek surowca S_2 oraz 28 jednostek surowca S_3. Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_3 potrzebne są 32 jednostki surowca S_1, 28 jednostek surowca S_2 oraz 36 jednostek surowca S_3. Szacuje się, że koszty jednostki wyrobu wynoszą odpowiednio 300, 400 oraz 600 złotych. W procesie produkcji przedsiębiorstwo zamierza wykorzystać dokładnie 220 jednostek surowca S_1, 176 jednostek surowca S_2 oraz 264 jednostki surowca S_3. Należy określić wszystkie możliwe warianty dziennej produkcji i wybrać spośród nich taki, który gwarantuje najmniejszy koszt całkowity.

Szkic rozwiązania

Dla przejrzystości umieśćmy wszystkie dane dotyczące produkcji w następującej tabeli:

Wyroby / *Surowce*	W_1	W_2	W_3	*Zużycie surowców*
S_1	12	20	32	220
S_2	16	12	28	176
S_3	8	28	36	264
Koszty jednostkowe	300	400	600	

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przyjmijmy, że x_1, x_2, x_3 oznaczają odpowiednio liczbę wyrobów W_1, W_2, W_3 wytwarzanych dziennie. Niewiadome x_1, x_2, x_3 przyjmują wartości całkowite nieujemne i spełniają następujący układ **U** równań liniowych:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} 12x_1 + 20x_2 + 32x_3 = 220 \\ 16x_1 + 12x_2 + 28x_3 = 176 \\ 8x_1 + 28x_2 + 36x_3 = 264 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań, pomijając założenie o nieujemności niewiadomych, możemy przekonać się, że ma on nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru. Rozwiązanie ogólne można przedstawić w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-t \\ 8-t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Uwzględniając założenie o tym, że x_1, x_2, x_3 są liczbami całkowitymi nieujemnymi stwierdzamy, że $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Wiedząc, że t jest liczbą z rozpatrywanego przedziału, uzyskamy wszystkie dopuszczalne wielkości dziennej produkcji wyrobów. Poniższa tabela przedstawia możliwe warianty produkcji

x_1	x_2	x_3
5	8	0
4	7	1
3	6	2
2	5	3
1	4	4
0	3	5

Koszt całkowity K produkcji jest sumą kosztów wyprodukowanych wyrobów (liczony w złotych) i określa go wzór: $K = K(x_1, x_2, x_3) = 300x_1 + 400x_2 + 600x_3$. Zauważmy, że

$$K(5, 8, 0) = 4700, \quad K(4, 7, 1) = 4600,$$
$$K(3, 6, 2) = 4500, \quad K(2, 5, 3) = 4400,$$
$$K(1, 4, 4) = 4300, \quad K(0, 3, 5) = 4200.$$

Z punktu widzenia przedsiębiorstwa, najkorzystniejszy wydaje się ostatni wariant produkcji, to znaczy nie produkować wyrobu pierwszego, ale wytwarzać dziennie trzy wyroby W_2 i pięć wyrobów W_3. Z drugiej strony, dodatkowa informacja o szacowanych zyskach z produkcji wyrobów (nie posiadamy takiej informacji) przesądziłaby jednoznacznie o wariancie ich produkcji.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

3.2.4 Przykład układu równań liniowych, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów.

Przeanalizujmy rozwiązanie następującego układu **U** trzech równań liniowych z czterema niewiadomymi x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} x_1 + x_2 - 12x_3 + 12x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 8 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_4 = 14 \end{cases}$$

Uzasadnimy, że posiada on nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów. Rozpoczynamy jak zwykle od zapisania postaci macierzy [**A** | **b**] rozszerzonej układu.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 8 \\ 3 & 7 & 0 & 4 & 14 \end{array}\right]$$

Można zauważyć, że wyrazy drugiego wiersza macierzy rozszerzonej układu są parzyste, dlatego uprościmy najpierw wyrazy tego wiersza:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 8 \\ 3 & 7 & 0 & 4 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2' = \frac{1}{2} w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 4 & 14 \end{array}\right].$$

Następnie zastosujemy poznaną wcześniej na przykładach procedurę wyboru odpowiednich operacji elementarnych, by wyznaczyć dla ostatniej macierzy jej postać zredukowaną:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 4 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3' = w_3 + (-3)w_1]{w_2' = w_2 + (-1)w_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -8 & 2 \\ 0 & 4 & 36 & -32 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3' = w_3 + (-4)w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Otrzymana macierz jest w postaci zredukowanej[4]. Przeprowadzimy analizę zbioru rozwiązań powyższego układu. Wyznaczymy w tym celu postać całkowicie zredukowaną ostatniej macierzy:

---

[4] W bardziej zaawansowanym ujęciu tematu, rzędy obu macierzy związanych z badanym układem równań są identyczne i równe 2, ponadto wspólny rząd jest mniejszy niż liczba niewiadomych występujących w układzie (4). Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capellego, rozpatrywany układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są zależne od dwóch parametrów. Liczba parametrów jest różnicą liczby wszystkich niewiadomych (4) i rzędu macierzy (2).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -12 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1'=w_1+(-1)w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -21 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ostatnia macierz jest poszukiwaną postacią całkowicie zredukowaną. Jedynki wiodące wierszy podzieliły zbiór niewiadomych na dwie klasy. Do klasy pierwszej, klasy niewiadomych pierwotnych, należą niewiadome x_1, x_2. Do klasy drugiej, klasy parametrów, należą niewiadome x_3, x_4.

Rozpatrzmy układ $\mathbf{U_1}$ równań liniowych stowarzyszony z ostatnią macierzą. Ma on postać

$$\mathbf{U_1}: \begin{cases} x_1 \qquad - 21x_3 + 20x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 2 \end{cases}$$

Przypisując wartości liczbowe parametrom, np. $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, przy czym $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, wyrażamy niewiadome pierwotne w zależności od parametrów i w konsekwencji uzyskujemy następującą postać rozwiązania ogólnego rozpatrywanego układu równań

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21t_1 - 20t_2 \\ 2 - 9t_1 + 8t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -20 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzamy poprawność otrzymanego wyniku:

$$x_1 + x_2 - 12x_3 + 12x_4 = (21t_1 - 20t_2) + (2 - 9t_1 + 8t_2) - 12t_1 + 12t_2 = 2,$$
$$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2(21t_1 - 20t_2) + 4(2 - 9t_1 + 8t_2) - 6t_1 + 8t_2 = 8,$$
$$3x_1 + 7x_2 + 4x_4 = 3(21t_1 - 20t_2) + 7(2 - 9t_1 + 8t_2) + 4t_2 = 14.$$

Jeśli przyjąć, że $t_1 = t_2 = 0$, to rozwiązaniem szczególnym układu jest czwórka $[0 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^T$. Jeśli założymy, że $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, to rozwiązaniem szczególnym układu staje się czwórka $[-19 \quad 9 \quad 1 \quad 2]^T$.

Zastosowanie

W pewnej hurtowni owoców można kupić jabłka, gruszki, wiśnie i czereśnie. Kupując 5 kg jabłek, 4 kg gruszek i po kilogramie wiśni oraz czereśni zapłacimy łącznie 27 zł. Na zakup 8 kg jabłek, 5 kg gruszek, kilograma wiśni i 2 kg czereśni wydamy w sumie 39 zł. Łączna cena 2 kg jabłek, 3 kg gruszek oraz kilograma wiśni, to 15 zł. Kupując 3 kg jabłek oraz po kilogramie gruszek i czereśni wydamy 12 zł. Wiedząc, że najtańsze są jabłka, najdroższe czereśnie, a ceny owoców w hurtowni wyrażają liczby całkowite, pokażemy, jak wyznaczyć cenę kilograma każdego rodzaju owoców.

Szkic rozwiązania.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Niech x_1, x_2, x_3, x_4 oznaczają cenę jednego kilograma, odpowiednio: jabłek, gruszek, wiśni i czereśni. Z treści zadania wynika, że niewiadome te wiąże poniższy układ **U** czterech równań liniowych o czterech niewiadomych:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 39 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 12 \end{cases}$$

przy dodatkowym założeniu, że przyjmują one wartości całkowite dodatnie oraz x_1 jest wartością najmniejszą, a x_4 – wartością największą.

Rozpatrzmy macierz rozszerzoną tego układu:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 1 & 1 & 27 \\ 8 & 5 & 1 & 2 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 15 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Dokonując odpowiednich przekształceń na jej wierszach otrzymujemy macierz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

która jest w postaci zredukowanej. Z jej postaci wnioskujemy, że rozpatrywany układ równań posiada w zbiorze liczb rzeczywistych nieskończenie wiele rozwiązań, zależnych od dwóch parametrów (zaniedbaliśmy dodatkowe założenia występujące w treści zadania). Postacią całkowicie zredukowaną ostatniej macierzy jest macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rozwiązanie ogólne układu można przedstawić jako

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{1}{7}t_1 - \frac{3}{7}t_2 \\ 3 - \frac{3}{7}t_1 + \frac{2}{7}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Wykorzystamy teraz założenia dodatkowe o niewiadomych. Wynika z nich, że szukamy liczb całkowitych dodatnich x_1, x_2, x_3, x_4, które spełniają przynajmniej jeden z warunków:

1. $1 \le x_1 < x_2 \le x_3 < x_4$.
2. $1 \le x_1 < x_3 < x_2 < x_4$.

Zauważmy, że z ostatniego równania układu (*) wynika, że jeśli posiada on rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych, to $x_1 \in \{1, 2\}$. Wynika to z poniższego oszacowania

$$12 = 3x_1 + x_2 + x_4 > 5x_1.$$

Jeśli $x_1 = 2$, to zgodnie z rozwiązaniem ogólnym $2 = 3 + \frac{1}{7}t_1 - \frac{3}{7}t_2$. Wynika stąd, że

$$t_1 = 3t_2 - 7, \quad x_2 = 6 - t_2, \quad x_3 = 3t_2 - 7.$$

Uwzględniając alternatywę: $2 < x_2 \le x_3 < x_4$ lub $2 < x_3 < x_2 < x_4$, należy wyznaczyć wszystkie całkowite wartości parametrów t_1, t_2, tak by $t_1 = 3t_2 - 7$ oraz

$$2 < 6 - t_2 \le 3t_2 - 7 < t_2 \quad \text{lub} \quad 2 < 3t_2 - 7 < 6 - t_2 < t_2.$$

Analizując alternatywę ostatnich dwóch warunków, dochodzimy do wniosku, że żadna liczba całkowita t_2 nie spełnia ani pierwszego, ani drugiego ograniczenia, zatem $x_1 \ne 2$.

Jeśli $x_1 = 1$, to $1 = 3 + \frac{1}{7}t_1 - \frac{3}{7}t_2$, co daje

$$t_1 = 3t_2 - 14, \quad x_2 = 9 - t_2, \quad x_3 = 3t_2 - 14.$$

Ponownie uwzględniając ograniczenia

$$2 < x_2 \le x_3 < x_4 \quad \text{lub} \quad 2 < x_3 < x_2 < x_4,$$

szukamy w zbiorze liczb całkowitych wartości parametrów t_1, t_2, tak by $t_1 = 3t_2 - 14$ oraz dodatkowo

$$2 < 9 - t_2 \le 3t_2 - 14 < t_2 \quad \text{lub} \quad 2 < 3t_2 - 14 < 9 - t_2 < t_2.$$

Okazuje się, że ostatnią alternatywę zależności spełnia tylko $t_2 = 6$. Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem zadania jest czwórka $[1\ 3\ 4\ 6]^T$. Jabłka kosztują zatem złotówkę, gruszki trzy złote, wiśnie cztery złote, a czereśnie sześć zł za kilogram.

3.3 Rozwiązania bazowe.

Rozwiązanie ogólne układu równań liniowych charakteryzowało wszystkie możliwe rozwiązania takiego układu, który posiadał ich nieskończenie wiele. Dzięki ustaleniu wartości liczbowych dla parametrów uzyskiwaliśmy pewne konkretne rozwiązania, nazywane *rozwiązaniami szczególnymi*. Wśród rozwiązań szczególnych wyróżniamy dodatkowo typ rozwiązań nazywanych *rozwiązaniami bazowymi*. Znajomość wszystkich nieujemnych rozwiązań bazowych jest cenna w niektórych zastosowaniach teorii równań liniowych. Wkrótce pokażemy, w jaki sposób informacja o nieujemnych rozwiązaniach bazowych układu równań może wpłynąć na rozwiązania układów nierówności liniowych (Moduł nr 4). Do-

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

dajmy również, że za pomocą przeszukiwania zbioru rozwiązań bazowych układu równań można znaleźć rozwiązania zagadnień programowania liniowego.

W układzie równań, który posiadał nieskończenie wiele rozwiązań, wyróżniliśmy dwa typy niewiadomych. Niewiadome pierwotne oraz parametry. W zagadnieniach związanych z procedurą wyznaczania rozwiązań bazowych niewiadome pierwotne nazywać będziemy *zmiennymi bazowymi*, a parametry – *zmiennymi niebazowymi*.

Aby z rozwiązania ogólnego układu równań liniowych wyznaczyć wszystkie *rozwiązania bazowe*, przypisujemy wartość zero wszystkim dopuszczalnym układom zmiennych niebazowych i na tej podstawie określamy wartości zmiennych bazowych. Ze względu na to, że liczba wszystkich możliwych układów zmiennych niebazowych jest dla danego układu równań skończona, liczba rozwiązań bazowych jest również skończona.

Przykład 3.1

Przypuśćmy, że rozwiązanie ogólne pewnego układu **U** równań liniowych o niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4 ma następującą postać (por. punkt 3.2.3)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-7t \\ 1+11t \\ -5t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Wyznaczymy wszystkie rozwiązania bazowe tego układu równań.

Mamy w tym przypadku trzy zmienne bazowe: x_1, x_2, x_3 oraz jedną zmienną niebazową: x_4. Jest jasne, że można byłoby uzyskać takie rozwiązanie ogólne tego układu, w którym zmienną niebazową byłaby każda ze zmiennych x_1, x_2, x_3.

Jeśli zmienną niebazową może być każda z niewiadomych oznacza to, że każdej z nich przypiszemy wartość zero i przy tym założeniu wyznaczymy wartości pozostałych niewiadomych. Należy zatem rozpatrzyć przypadki:

$$x_1 = \mathbf{0}, x_2 = \mathbf{0}, x_3 = \mathbf{0}, x_4 = \mathbf{0}.$$

Proces wyznaczania rozwiązań bazowych najkorzystniej rozpocząć od założenia, że zmienną niebazową jest niewiadoma x_4, gdyż w rozwiązaniu ogólnym jest ona parametrem.

Jeśli $x_4 = \mathbf{0}$, to $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Rozwiązaniem bazowym jest w tym przypadku czwórka liczb zapisana w formie macierzy transponowanej $[-1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \mathbf{0}]^{\mathrm{T}}$. Zauważmy, że rozwiązanie to jest „widoczne” w rozwiązaniu ogólnym.

Jeśli przyjąć, że zmienną niebazową jest niewiadoma x_1, to z założenia, że $x_1 = \mathbf{0}$ wynika zależność $x_1 = -1-7t = 0$, co oznacza, że $t = -\frac{1}{7}$. W tym przypadku

$$x_2 = 1+11t = 1+11\cdot(-\tfrac{1}{7}) = -\tfrac{4}{7}, \quad x_3 = -5t = (-5)\cdot(-\tfrac{1}{7}) = \tfrac{5}{7}, \quad x_4 = t = -\tfrac{1}{7}.$$

Rozwiązaniem bazowym jest teraz czwórka $[\mathbf{0} \;\; -\frac{4}{7} \;\; \frac{2}{7} \;\; -\frac{1}{7}]^{\mathrm{T}}$.

Stosując analogiczne rozumowanie, przy założeniu, że $x_2 = \mathbf{0}$, uzyskamy rozwiązanie bazowe postaci $[-\frac{4}{11} \;\; \mathbf{0} \;\; \frac{5}{11} \;\; -\frac{1}{11}]^{\mathrm{T}}$. W ostatnim przypadku, gdy $x_3 = \mathbf{0}$, rozwiązaniem bazowym jest ten sam układ, który uzyskaliśmy, przyjmując, że $x_4 = \mathbf{0}$. Ostatecznie rozpatrywany układ równań liniowych ma trzy różne rozwiązania bazowe. Rozwiązania te można przedstawić za pomocą poniższej tabeli. Wartość **0** z pogrubioną czcionką wskazuje, której z niewiadomych niebazowych przypisaliśmy wartość zero

x_1	x_2	x_3	x_4
0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$
$-\frac{4}{11}$	**0**	$\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$
-1	1	**0**	0
-1	1	0	**0**

Przykład 3.2

Przypuśćmy, że rozwiązanie ogólne pewnego układu **U** równań liniowych o niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4 ma następującą postać (por. punkt 3.2.4)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21t_1 - 20t_2 \\ 2 - 9t_1 + 8t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

W tym przypadku mamy dwie zmienne bazowe oraz dwie zmienne niebazowe. Oznacza to, że należy przypisać wartość równą zeru każdej możliwej parze niewiadomych, czyli uzupełnić puste miejsca w poniższej tabeli.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	**0**		
0		**0**	
0			**0**
	0	**0**	
	0		**0**
		0	**0**

Rozpatrujemy sześć możliwości. Wyznaczanie rozwiązań bazowych można rozpocząć od założenia, że zmiennymi niebazowymi są niewiadome x_3, x_4 (ostatni wiersz tabeli). Z rozwiązania ogólnego wynika, że gdy $x_3 = x_4 = \mathbf{0}$, to $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Przeanalizujmy sytuację, gdzie zmiennymi niebazowymi są pierwsze dwie niewiadome (pierwszy wiersz tabeli). Z założenia, że $x_1 = x_2 = \mathbf{0}$ wynika układ zależności

$$\begin{cases} 21t_1 - 20t_2 = 0 \\ 2 - 9t_1 + 8t_2 = 0 \end{cases}.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Rozwiązanie tego układu istnieje i jest nim para (t_1, t_2) taka, że $t_1 = \frac{10}{3}$, $t_2 = \frac{7}{2}$. Tym samym $x_3 = \frac{10}{3}$, $x_4 = \frac{7}{2}$. Rozwiązanie bazowe ma postać $[\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \frac{10}{3}\ \ \frac{7}{2}]^{\mathrm{T}}$.

Ostatecznie, wszystkie rozwiązania bazowe analizowanego układu równań zawiera poniższa tabela. Zwróćmy uwagę na to, że różne zmienne niebazowe mogą generować identyczne rozwiązania bazowe. Wskazują to wiersze z układem wartości 0, 2, 0, 0.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	**0**	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{2}$
0	2	**0**	0
0	2	0	**0**
5	**0**	**0**	$-\frac{1}{4}$
$\frac{14}{3}$	**0**	$\frac{2}{9}$	**0**
0	2	**0**	**0**

Przykład 3.3

Określimy wszystkie rozwiązania bazowe pewnego układu **U** równań, którego rozwiązanie ogólne (z trzema parametrami) podaje zależność

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2t_1 + t_2 - 2t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ 3 - 2t_3 \\ t_3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Jest to przypadek, w którym występują trzy zmienne bazowe oraz trzy zmienne niebazowe. Zauważmy, że wartość niewiadomej x_6 jest stale równa pięć, a zatem należy uzupełnić poniższą tabelę, w której, jak zwykle pogrubiona czcionka wskazuje zmienne niebazowe, którym przypisaliśmy wartość zero. W tabeli nie uwzględniono przypadków, w których niewiadoma x_6 przyjmowałaby wartość zero.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	**0**	**0**			5
0	**0**		**0**		5
0	**0**			**0**	5
0		**0**	**0**		5
0		**0**		**0**	5
0			**0**	**0**	5
	0	**0**	**0**		5
	0	**0**		**0**	5
	0		**0**	**0**	5
		0	**0**	**0**	5

Z postaci rozwiązania ogólnego uzyskujemy natychmiast rozwiązanie bazowe, gdy parametrami są niewiadome x_2, x_3, x_5. Jest to układ $[1\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ 3\ \ \mathbf{0}\ \ 5]^T$.

Wyznaczymy teraz rozwiązanie bazowe, gdy $x_1 = x_2 = x_3 = \mathbf{0}$. Założenie to implikuje następujący układ zależności:

$$\mathbf{U_1}: \begin{cases} 1-2t_1+t_2-2t_3=0 \\ t_1=0 \\ t_2=0 \end{cases}.$$

z którego wynika, że rozwiązanie bazowe istnieje i ma postać $[\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ 2\ \ 0{,}5\ \ 5]^T$.

Założenie, że zmienne x_4, x_5 przyjmują wartość równą zeru prowadzi do sprzeczności. Ostatecznie, wszystkie rozwiązania bazowe układu zawarte są w następującej tabeli:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	**0**	**0**	2	$\frac{1}{2}$	5
0	**0**	2	**0**	$\frac{3}{2}$	5
0	**0**	–1	3	**0**	5
0	–1	**0**	**0**	$\frac{3}{2}$	5
0	$\frac{1}{2}$	**0**	3	**0**	5
0	×	×	**0**	**0**	5
–2	**0**	**0**	**0**	$\frac{3}{2}$	5
1	**0**	**0**	3	**0**	5
×	**0**	×	**0**	**0**	5
×	×	**0**	**0**	**0**	5

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadania dodatkowe na zajęcia.

Rozwiąż metodą eliminacji Jordana – Gaussa poniższe układy równań W przypadku, gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, wyznacz wszystkie rozwiązania bazowe układu.

1.

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -5 + 2t \\ x_2 = 4 - 2t \\ x_3 = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_1 - 5x_2 + 15x_3 = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Moduł nr 4

Tematyka: Metoda eliminacji Jordana - Gaussa w odniesieniu do układów nierówności liniowych.

Opis treści modułu

4.1 Co to jest układ nierówności liniowych.
4.2 Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.
4.3 Metoda ogólna rozwiązywania układów nierówności liniowych.

4.1 Co to jest układ nierówności liniowych.

Zacznijmy od wprowadzenia podstawowych pojęć dotyczących teorii nierówności liniowych.

Dane są liczby naturalne m, n ($m \geq 2$, $n \geq 1$). Wyrażenie postaci

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \ge b_{k+1} \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

nazywamy *układem m nierówności liniowych o n niewiadomych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Liczby rzeczywiste $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{k1}, \ldots, a_{kn}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ (nie wszystkie równe jednocześnie zeru) oraz $b_1, \ldots, b_m$ nazywamy *współczynnikami rozpatrywanego układu nierówności*.

Rozwiązaniem układu nierówności (4.1) nazywamy każdy uporządkowany układ

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = [\,a_1\ a_2\ \ldots\ a_n\,]^{\mathrm{T}} \tag{4.2}$$

liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taki, że dla każdego i, $1 \le i \le k$

$$a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + \ldots + a_{in}a_n \le b_i,$$

natomiast dla tych wartości i, dla których $k + 1 \le i \le m$,

$$a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + \ldots + a_{in}a_n \ge b_i.$$

Układ nierówności liniowych (4.1) *nie jest sprzeczny*, jeśli posiada przynajmniej jedno rozwiązanie. Układ nierówności, który nie posiada rozwiązania nazywamy *sprzecznym*.

4.2 Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.

Każdy układ nierówności liniowych (4.1) może składać się z wyrażeń typu

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \quad \text{lub}^5 \quad a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \ge b_j.$$

Gdy układ nierówności ma tylko dwie niewiadome, to każde z tych wyrażeń redukuje się do jednej ze standardowych nierówności

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i,$$

a każda ma dobrze znaną interpretację geometryczną na płaszczyźnie. Na przykład, w układzie współrzędnych Oxy, powyższe nierówności zwykle zapisujemy w postaci

[5] Alternatywa nie wyklucza obu typów nierówności jednocześnie.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$ax + by \leq c, \qquad ax + by \geq c. \tag{4.3}$$

Aby wyznaczyć na płaszczyźnie zbiór wszystkich rozwiązań nierówności (4.3), najpierw wykreślamy prostą k o równaniu

$$k\colon ax + by = c \tag{4.4}$$

(do narysowania wykresu funkcji liniowej wystarczą współrzędne dwóch punktów spełniających jej równanie). Prosta (4.4) dzieli zbiór punktów płaszczyzny na dwa podzbiory – dwie *półpłaszczyzny*. Półpłaszczyznę, do której należą wszystkie punkty płaszczyzny o współrzędnych (p_1, p_2), dla których $ap_1 + bp_2 < c$, oraz półpłaszczyznę, do której należą wszystkie punkty o współrzędnych (q_1, q_2), dla których $aq_1 + bq_2 > c$.

Rozwiązanie układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi (o ile takie istnieje) jest, z geometrycznego punktu widzenia, zbiorem będącym wspólną częścią wszystkich półpłaszczyzn odpowiadających nierównościom występującym w danym układzie nierówności z uwzględnieniem ich brzegów, to znaczy prostych, które wyznaczają te półpłaszczyzny.

Przykład 4.1

Można sprawdzić, że w układzie współrzędnych Ox_1x_2 zbiorem rozwiązań poniższego układu nierówności

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 12 \end{cases}$$

są wszystkie punkty czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach w punktach o współrzędnych A = (3, 6), B = (6, 10), $C = (\frac{19}{2}, 3)$ oraz $D = (\frac{9}{2}, 3)$. Współrzędne wierzchołków czworokąta otrzymujemy znajdując punkty przecięcia prostych wyznaczających brzegi odpowiednich półpłaszczyzn, np. punkt A o współrzędnych (3, 6) jest punktem wspólnym dwóch prostych: $k\colon -4x_1 + 3x_2 = 6$, $l\colon 2x_1 + x_2 = 12$ (sporządź rysunek).

Przykład 4.2

Zbiorem rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 4y \geq 11 \end{cases}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

w układzie współrzędnych *Oxy* jest obszar nieograniczony, którego brzeg wyznaczają: oś rzędnych, punkty $P = (0, 8)$, $Q = (3, 2)$, $R = (11, 0)$ oraz oś odciętych (sporządź rysunek).

4.3 Metoda ogólna rozwiązywania układów nierówności liniowych.

Standardowa metoda rozwiązywania układów nierówności liniowych typu (4.1) jest ściśle związana z metodą uniwersalną rozwiązywania układów równań liniowych, którą nazwaliśmy też metodą eliminacji Jordana – Gaussa. Dokładniej, *każdy układ nierówności liniowych typu (4.1) można przekształcić do odpowiedniego układu równań liniowych za pomocą wprowadzenia dodatkowych niewiadomych. Te dodatkowe niewiadome będą mogły przyjmować jedynie wartości nieujemne. Niewiadome te będziemy nazywać niewiadomymi typu z.* Idea przejścia od nierówności do równania może być scharakteryzowana w następujący sposób.

Każdą nierówność postaci

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

zastępujemy równaniem

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + z_i = b_i, \tag{4.5}$$

w którym niewiadoma z_i może przyjmować jedynie wartości nieujemne.

Każdą nierówność postaci

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \ge b_j$$

zastępujemy nierównością równoważną

$$-a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - \ldots - a_{jn}x_n \le -b_j, \tag{4.6}$$

którą doprowadzamy do równania typu (4.5).

Układ m nierówności liniowych o n niewiadomych postaci (4.1) staje się układem m równań liniowych o $m + n$ niewiadomych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m \end{cases}. \tag{4.7}$$

W następnym kroku macierz rozszerzoną układu (4.7) doprowadzamy za pomocą operacji elementarnych na jej wierszach oraz ewentualnej zamiany kolumn do jednej z następujących postaci:

$$[\, I_m \quad [b_{ij}]\,] \tag{4.8}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{bmatrix} I_s & [p_{ij}] \\ \Theta_{m-s\times n} & [q_{ij}] \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

gdzie symbole I_m, I_s oznaczają macierze jednostkowe stopnia odpowiednio m oraz s, gdzie $s < m$, natomiast $\Theta_{m-s\times n}$ oznacza macierz zerową wymiaru $(m - s) \times n$. Symbole $[b_{ij}]$, $[p_{ij}]$, $[q_{ij}]$ oznaczają pewne macierze (ich wymiar zależy od układu równań typu (4.7)).

Jeśli macierz rozszerzoną układu (4.7) można doprowadzić za pomocą operacji elementarnych oraz ewentualnej zamiany kolumn do postaci (4.8)[6], to układ nierówności (4.1) nie jest sprzeczny. W tym przypadku rozwiązanie ogólne układu nierówności pokrywa się z rozwiązaniem ogólnym układu równań odpowiadającemu temu układowi nierówności. W otrzymanym rozwiązaniu parametrami mogą być wyłącznie niewiadome dołączone (typu z) lub niewiadome dołączone (typu z) i pewne niewiadome typu x (Przykłady 4.3, 4.4). Niewiadome dołączone (typu z) przyjmują tylko wartości nieujemne.

Przykład 4.3

Rozpatrzmy układ trzech nierówności o niewiadomych x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - \quad x_2 \quad\quad \geq 1 \\ \quad\quad\quad x_2 - x_3 \leq 4 \end{cases}.$$

Stosując procedurę analogiczną do opisanej wcześniej, wyznaczymy wszystkie rozwiązania tego układu. Po ujednoliceniu znaku nierówności otrzymamy układ

$$\begin{cases} -x_1 \quad\quad\quad -x_3 \leq -2 \\ -2x_1 + \quad x_2 \quad\quad \leq -1 \\ \quad\quad\quad x_2 - x_3 \leq \quad 4 \end{cases}$$

a po wprowadzeniu dodatkowych trzech niewiadomych typu z otrzymamy poniższy układ **U** trzech równań o sześciu niewiadomych $x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3$:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} -x_1 \quad\quad\quad -x_3 \quad + z_1 \quad\quad\quad\quad = -2 \\ -2x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad\quad + z_2 \quad\quad = -1 \\ \quad\quad\quad x_2 \quad - x_3 \quad\quad\quad\quad\quad + z_3 = \quad 4 \end{cases},$$

gdzie, jak zwykle, niewiadome z_1, z_2, z_3 (typu z) mogą przyjmować tylko nieujemne wartości.

Macierz rozszerzona układu **U** ma w tym wypadku postać:

[6] Macierz I_m można otrzymać wtedy, gdy liczba nierówności jest nie większa niż liczba niewiadomych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Macierz tę doprowadzimy do postaci typu (4.8) albo typu (4.9), z której można będzie odczytać rozwiązanie.

Wykorzystamy do tego celu stosowane już wcześniej operacje elementarne. Zmodyfikujemy najpierw drugi wiersz. Mnożąc wyrazy pierwszego wiersza przez –2 i dodając je do odpowiednich wyrazów drugiego wiersza (operacja OE3), dana macierz przyjmie postać:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr|r} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Po pomnożeniu wyrazów pierwszego wiersza przez –1 oraz pomnożeniu wyrazów drugiego wiersza przez –1 i dodaniu ich do odpowiednich wyrazów trzeciego wiersza, ostatnia macierz uzyska postać

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Następnie mnożymy wyrazy trzeciego wiersza przez $\frac{1}{3}$ i dodajemy je do wyrazów pierwszego wiersza, podobnie mnożymy wyrazy trzeciego wiersza przez $\frac{2}{3}$ i dodajemy je do wyrazów drugiego wiersza. Po tych przekształceniach uzyskamy macierz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

a po „korekcie” ostatniego wiersza (mnożenie wyrazów przez $(-\frac{1}{3})$) – postać końcową

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right],$$

odpowiadającą postaci (4.8). Niewiadome typu x są wyrażone *tylko za pomocą niewiadomych dołączonych (typu z)*. Układ nierówności ma nieskończenie wiele rozwiązań zależ-

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

nych jedynie od niewiadomych typu z. Przypisując im ustalone wartości nieujemne, na przykład $z_1 = t_1$, $z_2 = t_2$, $z_3 = t_3$, wektor rozwiązań ma w danym przypadku postać:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} + \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 - \frac{1}{3}t_3 \\ \frac{11}{3} + \frac{2}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 - \frac{2}{3}t_3 \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \; t_1, t_2, t_3 \geq 0.$$

Aby sprawdzić otrzymane rezultaty, wystarczy podstawić odpowiednie wartości do każdej z nierówności:

$$x_1 + x_3 = 2 + t_1 \geq 2, \;\; 2x_1 - x_2 = 1 + t_2 \geq 1, \;\; x_2 - x_3 = 4 - t_3 \leq 4.$$

Przykład 4.4

W poprzednim przykładzie niewiadome typu x były wyrażone jedynie przez dodatkowe niewiadome (typu z). Ten przykład pokazuje inną możliwość. Rozpatrzmy układ trzech nierówności o pięciu niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

Układ ten przekształcamy poznanym sposobem do następującego układu **U** trzech równań o ośmiu niewiadomych:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + z_1 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + z_2 = 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + z_3 = 1 \\ z_1, z_2, z_3 \geq 0 \end{cases}$$

Macierz rozszerzona otrzymanego układu równań ma postać:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Za pomocą odpowiednich operacji elementarnych macierz tę doprowadzamy do postaci:

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

zgodnej z (4.8). Stwierdzamy, że pierwsze trzy niewiadome typu x zależą od niewiadomych typu z oraz pozostałych niewiadomych typu x. Układ nierówności liniowych ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od niewiadomych x_4, x_5 oraz z_1, z_2, z_3. Przypisując im ustalone wartości liczbowe, np. $x_4 = q_1$, $x_5 = q_2$ oraz $z_1 = t_1$, $z_2 = t_2$, $z_3 = t_3$ (ostatnie trzy, to wartości nieujemne), wektor rozwiązań ma postać

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - t_1 + t_2 \\ q_2 - t_2 + t_3 \\ -q_1 - q_2 - t_3 + 1 \\ q_1 \\ q_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \; t_1, t_2, t_3 \geq 0, \; q_1, q_2 \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzenie:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 - t_1 \leq 1, \;\; x_2 + x_3 + x_4 = 1 - t_2 \leq 1, \;\; x_3 + x_4 + x_5 = 1 - t_3 \leq 1.$$

Przykład 4.5

Rozpatrzmy następujący układ trzech nierówności o niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}.$$

Jest to niewątpliwie układ sprzeczny. Gdyby założyć, że czwórka (a, b, c, d) liczb rzeczywistych a, b, c, d jest rozwiązaniem tego układu, to dodając do siebie nierówności $a + b \leq 0$, $c + d \leq 1$, otrzymamy z jednej strony, że suma $a + b + c + d$ jest nie większa niż 1, lecz jak pokazuje pierwsza nierówność, suma ta jest nie mniejsza niż 2. Sprzeczność. Do sprzeczności doprowadziło nas założenie, że istnieje czwórka liczb rzeczywistych, która jest rozwiązaniem danego układu nierówności.

Interesuje nas jednak otrzymanie takiego wniosku w wyniku zastosowania procedury ogólnej rozwiązywania układów nierówności liniowych, którą przedstawiliśmy wcześniej. Prześledźmy zatem jej zasadnicze kroki na tym układzie nierówności.

Zastępujemy układ nierówności układem równoważnym:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq -2 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przekształcamy ostatni układ nierówności do odpowiedniego układu równań:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} -x_1 - x_2 \;\; - x_3 - x_4 \;\; + z_1 & = \;\; -2 \\ \;\; x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + z_2 & = \;\; 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 \qquad\qquad + z_3 & = \;\; 1 \cdot \\ \qquad z_1,\ z_2,\ z_3 \geq 0 \end{cases}$$

Macierz rozszerzona powyższego układu równań jest następująca:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Operacja elementarna $w_1' = w_1 + w_2$ przekształca ją do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

z kolei, po wykonaniu operacji $w_1' = w_1 + w_3$, ostatnia macierz uzyska formę

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Po zamianie miejscami odpowiednich wierszy w ostatniej macierzy doprowadzamy ją do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Zamieniając miejscami kolumnę drugą z trzecią, uzyskujemy końcową postać macierzy

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

która odpowiada postaci (4.9). W tym przypadku

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [q_{ij}] = [\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\ ].$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Rozpatrywany układ nierówności liniowych ma rozwiązanie wyłącznie wtedy, gdy równanie o współczynnikach odpowiadających współczynnikom macierzy $[q_{ij}]$ posiada co najmniej jedno nieujemne rozwiązanie bazowe. Równanie to ma postać

$$z_1 + z_2 + z_3 = -1,$$

przy czym niewiadome z_1, z_2, z_3 mogą przyjmować jedynie nieujemne wartości. Przy takim założeniu równanie to jest sprzeczne i nie posiada rozwiązań. Rozpatrywany układ nierówności jest układem sprzecznym.

Jeśli macierz rozszerzoną układu (4.7) doprowadzimy za pomocą operacji elementarnych oraz możliwej zamiany kolumn do postaci (4.9), to układ nierówności (4.1) nie jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań odpowiadający macierzy $[q_{ij}]$ ma przynajmniej jedno *nieujemne rozwiązanie bazowe*. Jeśli warunek ten jest spełniony, to rozwiązanie ogólne układu nierówności może zależeć od niewiadomych dołączonych (typu z) jak i od niektórych niewiadomych typu x (Przykłady 4.6, 4.7).

Przykład 4.6

Rozważmy układ pięciu nierówności liniowych o niewiadomych x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 \ge 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad \ge 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 0 \end{cases}$$

Układ **U** równań odpowiadający danemu układowi nierówności ma postać:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} -x_1 \qquad\quad - x_3 + z_1 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 \quad + z_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 \qquad\qquad + z_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad + z_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad + z_5 = 0 \\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5 \ge 0 \end{cases}$$

Korzystając z operacji elementarnych, macierz rozszerzoną

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|rrrrr|r} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

danego układu przekształcamy do postaci

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]$$

zgodnej z (4.9). Wynika stąd, że układ nierówności ma rozwiązanie, o ile układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 - \frac{4}{3}z_3 + z_4 = \frac{1}{3} \\ -z_1 - z_2 + z_5 = -1 \end{cases}$$

posiada co najmniej jedno nieujemne rozwiązanie bazowe.

Możemy przekonać się o tym, że układ $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ jest nieujemnym rozwiązaniem bazowym ostatniego układu równań, a to oznacza, że rozpatrywany układ nierówności ma rozwiązanie. Wszystkie rozwiązania układu zawiera poniższy wektor rozwiązań (niewiadome typu x zależą wyłącznie od niewiadomych typu z, a niewiadome z_4, z_5 dają się wyrazić za pomocą niewiadomych z_1, z_2, z_3).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 + \frac{2}{3}t_3 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 - \frac{1}{3}t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \frac{1}{3}(1 - t_1 + t_2 + 4t_3) \\ -1 + t_1 + t_2 \end{bmatrix},$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

gdzie wielkości t_1, t_2, t_3, $1-t_1+t_2+4t_3$, $-1+t_1+t_2$ przyjmują wartości nieujemne.

Sprawdzenie:

$$x_1+x_3=1+t_1\geq 1,\quad x_2+2x_3=2-t_2\leq 2,\quad x_1+x_2=1+t_3\geq 1$$

$$x_1+x_2-x_3=\tfrac{1}{3}(1-t_1+t_2+4t_3)\geq 0,\quad -x_1+x_2+x_3=-(-1+t_1+t_2)\leq 0$$

Przykład 4.7

Przedstawimy teraz przykład układu nierówności, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od pewnych niewiadomych typu x oraz od niewiadomych typu z.

Rozpatrzmy układ trzech nierówności o czterech niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad -2x_4 \geq -2 \\ \qquad x_2+2x_3 \qquad\quad \leq 6 \\ -3x_1+2x_2+4x_3+6x_4 \leq 6 \end{cases}.$$

Po standardowych operacjach układ nierówności można zastąpić poniższym układem równań

$$\mathbf{U}:\ \begin{cases} -x_1 \qquad\qquad +2x_4+z_1 \qquad\quad =2 \\ \qquad x_2+2x_3 \qquad\qquad +z_2 \quad =6 \\ -3x_1+2x_2+4x_3+6x_4 \qquad +z_3=6 \\ \qquad z_1,\ z_2,\ z_3\geq 0 \end{cases}.$$

Macierz rozszerzona tego układu

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

może być doprowadzona za pomocą odpowiednich operacji elementarnych na jej wierszach do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2/3 & -1/3 & 4 \end{array}\right].$$

Rozpatrywany układ nierówności nie jest sprzeczny, ponieważ trójka $[4 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ jest nieu-

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

jemnym rozwiązaniem bazowym równania

$$z_1 + \frac{2}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3 = 4$$

Wektor rozwiązań ma w tym wypadku postać

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2q - \frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 \\ 6 - 2p - t_1 \\ p \\ q \\ 4 - \frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

gdzie p, q przyjmują dowolnie ustalone wartości rzeczywiste, natomiast t_1, t_2 są takimi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, by wyrażenie $4 - \frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2$ było nieujemne. Rozwiązanie zależy od niewiadomych typu x oraz niewiadomych typu z.

Zadania dodatkowe na zajęcia

1. Udowodnij, że rozwiązaniem układu nierówności

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \end{cases}$$

o niewiadomych x_1, x_2, x_3 jest układ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{8}{11}t_1 - \frac{4}{11}t_2 + \frac{1}{11}t_3 \\ -\frac{3}{11}t_1 - \frac{4}{11}t_2 + \frac{1}{11}t_3 \\ 2 + \frac{6}{11}t_1 - \frac{3}{11}t_2 - \frac{2}{11}t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \ t_1,\ t_2,\ t_3 \geq 0.$$

2. Rozwiąż poniższe układy nierówności liniowych sprowadzając je do odpowiednich układów równań liniowych. Dla pewności, sprawdź otrzymany wynik.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

a)

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \end{cases}$$

Moduł nr 5
Tematyka: Metoda sympleks w odniesieniu do zagadnienia optymalizacji funkcji celu.
Opis treści modułu
5.1 Wprowadzenie pojęcia standardowego zagadnienia maksymalizacji oraz standardowego zagadnienia minimalizacji w programowaniu liniowym.
5.2 Metoda sympleks dla *n*-wymiarowego standardowego zagadnienia maksymalizacji.
5.3 Metoda sympleks dla *n*-wymiarowego standardowego zagadnienia minimalizacji. Zagadnienie dualne.

5.1 Wprowadzenie pojęcia standardowego zagadnienia maksymalizacji oraz standardoswego zagadnienia minimalizacji w programowaniu liniowym

W wielu zagadnieniach natury ekonomicznej spotykamy się z problemem optymalizacji (minimalizacji lub maksymalizacji) pewnych wyrażeń (funkcji) względem układu równań lub nierówności liniowych. Wyrażenie (funkcję), które optymalizujemy, nazywamy *funkcją celu* (z matematycznego punktu widzenia jest to forma liniowa pewnej liczby zmiennych, a w zastosowaniach ekonomicznych może nią być często analizowana funkcja zysku lub kosztu). Układ równań lub nierówności liniowych wyznaczający zakres optymalizacji funkcji celu nazywać będziemy *układem warunków ograniczających*. Odzwierciedlają one pewne ograniczenia nakładane na rozwiązanie (lub rozwiązania) rozpatrywanego problemu

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

(często są to ograniczenia związane z ilością zasobów, w szczególności, dostępnego materiału, czy liczby jednostek pracy, na przykład roboczogodzin).

W tym module podamy zastosowania metody sympleks w programowaniu liniowym odnoszące się do standardowego zagadnienia maksymalizacji i minimalizacji.

Dla ustalonej liczby naturalnej n, $n \geq 1$, zbiór wszystkich uporządkowanych układów n liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}^n$ i nazywamy *n-wymiarową przestrzenią euklidesową*. Dokładniej, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ \text{dla } i = 1, 2, \dots, n\}$.

Każdy element przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy *punktem*. Jeżeli układ $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest punktem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to liczbę a_i nazywamy *i-tą współrzędną punktu A*.

Dla punktów $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określamy kryterium ich rozróżnialności zgodnie z regułą:

$$P = Q \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p_i = q_i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Inaczej, dwa punkty przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne.

Zagadnieniem programowania liniowego (*zagadnieniem* PL) *nazywamy problem optymalizacji funkcji liniowej* (*formy liniowej*) f

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

dwóch lub n zmiennych, $n \geq 2$.

Przyjmujemy, że *standardowe zagadnienie maksymalizacji* w programowaniu liniowym dla n zmiennych decyzyjnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma postać:
zmaksymalizować funkcję celu

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

pod kątem układu m warunków ograniczających

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \leq b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie dla i = 1, 2, … , m, j = 1, 2, … , n, współczynniki c_{ij}, b_i, c_j *oznaczają ustalone liczby rzeczywiste takie, że nie znika co najmniej jeden współczynnik* c_{ij}, $b_i \geq 0$ *ponadto* $c_j \neq 0$.

Rozwiązaniem dopuszczalnym dla standardowego zagadnienia maksymalizacji nazywamy każdy układ $[d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n]^T$ takich liczb rzeczywistych $d_1, d_2, \dots, d_n$, które spełniają każdą nierówność występującą w układzie (5.1). Zauważmy, że standardowe zagadnienie maksymalizacji posiada zawsze rozwiązanie dopuszczalne. Jest nim układ złożony z samych zer.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zbiorem rozwiązań dopuszczalnych dla standardowego zagadnienia maksymalizacji nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie rozwiązania dopuszczalne dla tego zagadnienia.

Standardowe zagadnienie minimalizacji w programowaniu liniowym dla *n* zmiennych decyzyjnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma postać:
zminimalizować funkcję celu

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

pod kątem układu m warunków ograniczających

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \geq b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

gdzie dla i = 1, 2, … , m, j = 1, 2, … , n współczynniki c_{ij}, b_i, c_j *oznaczają ustalone liczby rzeczywiste takie, że nie znika co najmniej jeden współczynnik* c_{ij}, $b_i \geq 0$ *ponadto* $c_j \neq 0$.

Dla standardowego zagadnienia minimalizacji można wprowadzić pojęcia *rozwiązania dopuszczalnego* oraz *zbioru wszystkich rozwiązań dopuszczalnych* analogicznie do standardowego zagadnienia maksymalizacji. Jednak w tym przypadku może się zdarzyć, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem pustym. Układ złożony z samych zer nie musi być rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego zagadnienia (a jak pamiętamy, jest nim dla standardowego zagadnienia maksymalizacji). Jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla standardowego zagadnienia minimalizacji jest zbiorem pustym, to mówimy, że rozpatrywane zagadnienie nie ma rozwiązań dopuszczalnych.

Istotą metody sympleks jest charakterystyczny sposób wyznaczania współrzędnych punktów należących do zbioru rozwiązań dopuszczalnych przy użyciu metod macierzowych. Zgodnie z ideą metody sympleks, określamy współrzędne pewnego punktu należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych i sprawdzamy, czy jest to już rozwiązanie optymalne. Jeśli okaże się, że nie otrzymaliśmy rozwiązania optymalnego, przechodzimy do kolejnego punktu w taki sposób, by otrzymane kolejne rozwiązanie nie było gorsze od tego, którym już dysponujemy. Stosując tę procedurę, w skończonej liczbie kroków dochodzimy do punktu, w którym istnieje rozwiązanie optymalne.

5.2 Metoda sympleks dla *n*-wymiarowego standardowego zagadnienia maksymalizacji

Przykład 5.1

Pewna firma produkuje dwa typy wyrobów: w_1 oraz w_2, używając do ich produkcji trzech surowców: s_1, s_2, s_3. Wiadomo, że jednostka wyrobu w_1 może być sprzedana z zy-

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

skiem w wielkości 5 zł, a jednostka wyrobu w_2 – z zyskiem w wysokości 4 zł. Firma ta posiada określone zapasy surowców oraz pewną liczbę wolnych jednostek czasu pracy – środków niezbędnych do produkcji obu wyrobów. Poniższa tabela podaje ilości każdego surowca potrzebnego do produkcji jednostki wyrobu w_1 oraz w_2, a także wielkości zapasów

Wyroby / *Surowce*	w_1	w_2	*Zapasy surowców*
s_1	20	15	60 000
s_2	4	9	25 200
s_3	4	6	18 000
Praca (*minuty*)	30	20	87 000
Zysk (*zł*)	5	4	

Firma chce poznać optymalną wielkość produkcji swoich wyrobów, by zmaksymalizować zysk z ich sprzedaży.

Uzasadnimy, że w tym przypadku mamy do czynienia z następującym zagadnieniem programowania liniowego: zmaksymalizować funkcję zysku Z, $Z = Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$ względem następującego układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 \le 60\ 000 \\ 4x_1 + \ \ 9x_2 \le 25\ 200 \\ 4x_1 + \ \ 6x_2 \le 18\ 000 \\ 30x_1 + 20x_2 \le 87\ 000 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Niech x_1, x_2 oznaczają odpowiednio wielkość produkcji wyrobów w_1 oraz w_2. Oczywiste ograniczenie na zmienne decyzyjne jest takie, że żadna z nich nie może przyjmować wartości ujemnych: $x_1, x_2 \ge 0$. Funkcja $Z = Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$ wyraża całkowity zysk ze sprzedaży wyrobów w_1 oraz w_2 (o ile wszystkie wyroby zostaną sprzedane).

Łączną ilość pierwszego surowca wymaganego do produkcji wyrobów wyraża zależność $20x_1 + 15x_2$. Ze względu na jego zapasy (60 000 jednostek zapasu) uzyskamy pierwszy warunek ograniczający: $20x_1 + 15x_2 \le 60\ 000$. Podobnie, limit ilości drugiego surowca (25 200 jednostek) generuje drugi warunek ograniczający: $4x_1 + 9x_2 \le 25\ 200$,
natomiast ograniczenie ilości trzeciego surowca daje trzeci warunek: $4x_1 + 6x_2 \le 18\ 000$.
Czwarty warunek ograniczający dla x_1 oraz x_2 wynika z limitu jednostek czasu pracy (wyrażonego w minutach): $30x_1 + 20x_2 \le 87\ 000$. Wielkość 87 000 minut to dokładnie 1450 godzin pracy. Jeśli przyjąć, że dzień pracy trwa 8 godzin, wartość ta odpowiada mniej więcej półrocznemu cyklowi pracy tej firmy.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przykład 5.2

Metoda sympleks może być zastosowana z powodzeniem dla funkcji celu dwóch zmiennych[7]. W tym przykładzie zastosujemy ją, rozwiązując następujący problem.

Zmaksymalizować funkcję $f = f(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2$ względem poniższego układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 6x_1 + 4x_2 \le 48 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Pierwszy etap (przejście do układu równań)

Dla danego zagadnienia i jego układu warunków ograniczających konstruujemy odpowiadający mu układ **U** czterech równań liniowych, wprowadzając niewiadome pomocnicze typu z oraz niewiadomą f

$$\mathbf{U}: \begin{cases} f - 6x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + z_1 = 12 \\ 6x_1 + 4x_2 + z_2 = 48 \\ -x_1 + 2x_2 + z_3 = 8 \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \ge 0 \end{cases}$$

Drugi etap (budowa początkowej tablicy sympleksowej)

Dla danego układu równań budujemy *początkową tablicę sympleksową*. Jest to właściwie macierz rozszerzona układu **U**, do której dołączamy jeden wiersz (nad macierzą) i jedną kolumnę na zewnątrz tej macierzy (po jej lewej stronie). W *i*-tym jej wierszu wypisujemy współczynniki odpowiadające niewiadomym oraz wyrazy wolne. Pionowa kreska wewnątrz macierzy oddziela te dwa typy współczynników

$$\begin{array}{c|cccccc|c|} & f & x_1 & x_2 & z_1 & z_2 & z_3 & \\ \hline f & \mathbf{1} & -6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 12 \\ z_2 & 0 & 6 & 4 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 48 \\ z_3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 8 \end{array}$$

W wierszu nad tablicą sympleksową wypisano w odpowiedniej kolejności wszystkie występujące niewiadome, a w kolumnie po lewej stronie tablicy sympleksowej występuje

[7] Nie rozpatrujemy metody geometrycznej dla przypadku funkcji celu dwóch zmiennych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

niewiadoma f oraz niewiadome typu *z*: z_1, z_2, z_3. Nazwijmy je *aktualnymi* (*bieżącymi*) *zmiennymi bazowymi*. Mówimy, że tworzą one tak zwaną *bazę*. Kolumny z tymi zmiennymi mają w odpowiednim miejscu tablicy jedynkę (pogrubioną), natomiast pozostałe wyrazy kolumny są równe zero. Te niewiadome, które w danym momencie nie są zmiennymi bazowymi mają przypisaną wartość równą 0 i nazywamy je *zmiennymi niebazowymi*. W naszym przypadku są to niewiadome typu *x*: x_1, x_2 oraz założenie: $x_1 = x_2 = 0$. W kolumnie na prawo od pionowej kreski w tablicy sympleksowej wypisane są bieżące wartości aktualnych zmiennych bazowych: $f = 0$, $z_1 = 12$, $z_2 = 48$, $z_3 = 8$. Sytuacja taka ma następującą interpretację: w przypadku funkcji celu f dwóch zmiennych (na płaszczyźnie), założenie $x_1 = x_2 = 0$ opisuje współrzędne jednego z wierzchołków obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Jest nim początek układu współrzędnych[8]. Oczywiście, rozwiązanie to nie musi być (i nie jest) rozwiązaniem optymalnym. Dodatkowo, tym punkcie, funkcja celu f ma wartość równą 0.

Okazało się, że nie otrzymaliśmy rozwiązania optymalnego, dlatego przechodzimy do kolejnego punktu w taki sposób, by otrzymane kolejne rozwiązanie nie było gorsze od tego, którym już dysponujemy. Od tego momentu rozpoczynamy *procedurę włączania niewiadomych typu x do bazy*. Trwa ona do tego momentu, aż w pierwszym wierszu tablicy sympleksowej pojawią się jedynie wyrazy dodatnie. Należy rozstrzygnąć następującym problemem: *która niewiadoma typu x ma wejść do bazy jako pierwsza, ponadto, którą ze zmiennych typu z znajdujących się aktualnie w bazie ma zastąpić*. Odpowiedź na pytanie pierwsze jest następująca. *Do bazy należy włączyć jako pierwszą tę niewiadomą typu x, której odpowiada najmniejszy ujemny współczynnik występujący w pierwszym wierszu tablicy sympleksowej (wiersz odpowiadający niewiadomej f)*. W naszym przypadku jest to (–6). Oznacza to, że będzie nią niewiadoma x_1 (jeśli wszystkie współczynniki byłyby dodatnie, rozwiązanie zagadnienia odczytujemy od razu z tablicy – porównaj końcową część algorytmu sympleksowego do tego zadania). Wartość niewiadomej x_2 jest nadal równa 0. Aby określić tę zmienną bazową, którą zastąpi niewiadoma x_1, stosujemy *kryterium najmniejszego nieujemnego ilorazu*: rozpatrujemy wszystkie dodatnie wartości występujące w kolumnie odpowiadającej niewiadomej x_1. Są to liczby 1 oraz 6, następnie wyznaczamy ilorazy odpowiednich wartości występujących w kolumnie na prawo od pionowej kreski po prawej stronie tablicy sympleksowej (liczby 12 oraz 48) oraz liczb 1 oraz 6. W naszym przypadku mamy dwa ilorazy: $\frac{12}{1} = 12$, $\frac{48}{6} = 8$. Najmniejszy z nich daje najbardziej restrykcyjne ograniczenie dla niewiadomej x_1. Pochodzi ono od wartości 6. Wartość ta występuje w wierszu odpowiadającym zmiennej bazowej z_2, zatem tę niewiadomą zastąpi niewiadoma x_1.

Kryterium najmniejszego nieujemnego ilorazu można uzasadnić w następujący sposób. Wiedząc, że niewiadoma x_2 przyjmuje wartość zero, drugie i trzecie równanie układu **U** będzie miało postać $\mathbf{1}x_1 + z_1 = 12$, $\mathbf{6}x_1 + z_2 = 48$. Wobec nieujemności niewiadomych z_1, z_2 stwierdzamy, że $0 \le x_1 \le 12$, $0 \le x_1 \le 8$. Wartość 6 daje największe ograniczenie zakresu zmienności niewiadomej x_1.

Trzeci etap (włączenie zmiennej x_1 do bazy, wyłączenie zmiennej z_2 z bazy)

[8] Z drugiej strony punkt $(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 12, 48, 8)$ jest punktem ekstremalnym 5-wymiarowego wielościanu wypukłego, ograniczonego hiperpłaszczyznami o równaniach występujących w uzyskanym układzie równań.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Za pomocą operacji elementarnych na wierszach tablicy sympleksowej doprowadzamy kolumnę odpowiadającą niewiadomej x_1 do kształtu typowego dla zmiennej bazowej (jedna jedynka i pozostałe zera). Po odpowiednich przekształceniach, tablica sympleksowa uzyska postać:

$$
\begin{array}{c}
\\ f \\ z_1 \\ x_1 \\ z_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f & x_1 & x_2 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 48 \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & \mathbf{1} & -\frac{1}{6} & 0 & 4 \\
0 & \mathbf{1} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 8 \\
0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \mathbf{1} & 16
\end{array}\right]
\end{array}.
$$

Zastąpienie w bazie zmiennej z_2 zmienną x_1 odpowiada na płaszczyźnie przejściu od wierzchołka o współrzędnych (0, 0) do wierzchołka o współrzędnych (8, 0)[9]. Wartość funkcji f w punkcie wyznaczającym nowy wierzchołek jest równa 48.

Czwarty etap (włączenie zmiennej x_2 do bazy, wyłączenie zmiennej z_1 z bazy)

Przypomnijmy, że zainicjowana w trzecim etapie *procedura włączania niewiadomych typu x do bazy trwa do momentu, aż w pierwszym wierszu pojawią się jedynie wyrazy dodatnie*. Z postaci ostatnio otrzymanej tablicy sympleksowej wynika, że należy kontynuować nasz algorytm i możemy również włączyć do bazy niewiadomą x_2. Może ona zastąpić jedną ze zmiennych należących do aktualnej bazy. Po zastosowaniu kryterium najmniejszego nieujemnego ilorazu stwierdzamy, że najostrzejszy warunek ograniczający dla niewiadomej x_2 generuje współczynnik $\frac{4}{3}$, co oznacza, że niewiadoma ta zastąpi w bazie zmienną z_1. Odpowiednie ilorazy, to: $4/\frac{4}{3} = 3$, $8/\frac{2}{3} = 12$, $16/\frac{8}{3} = 6$. Odpowiednie operacje elementarne na wierszach tablicy sympleksowej pozwalają doprowadzić ją do postaci:

$$
\begin{array}{c}
\\ f \\ x_2 \\ x_1 \\ z_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f & x_1 & x_2 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & 0 & 51 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 3 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \mathbf{1} & 8
\end{array}\right]
\end{array}.
$$

Był to ostatni etap algorytmu w tym zagadnieniu. W pierwszym wierszu nie występują już ujemne wyrazy. Zmiennymi bazowymi są niewiadome f, x_1, x_2, z_3. Pozostałe niewiadome, to zmienne niebazowe. Przypisujemy im wartość zero. Z tablicy sympleksowej odczytujemy, że funkcja f osiąga wartość największą w punkcie o współrzędnych (6, 3), równą 51. W tym etapie nastąpiło przejście od punktu (8, 0) do punktu o współrzędnych (6, 3)[10].

---

[9] Lub ogólniej, przejściu od punktu (0, 0, 12, 48, 8) do punktu (8, 0, 4, 0, 16).
[10] Lub w przypadku ogólniejszym, od punktu (8, 0, 4, 0, 16), do punktu (6, 3, 0, 0, 8).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przykład 5.3

Zastosujemy metodę sympleks do rozwiązania zagadnienia dotyczącego maksymalizacji pewnej funkcji zysku $Z = Z(x_1, x_2, x_3) = 18x_1 + 12x_2 + 15x_3$, uwzględniając następujący układ warunków ograniczających:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 900 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1080 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 840 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Układ równań **U** odpowiadający temu zagadnieniu ma postać:

$$\mathbf{U}: \begin{cases} Z - 18x_1 - 12x_2 - 15x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + z_1 = 900 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + z_2 = 1080 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + z_3 = 840 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3 \ge 0 \end{cases}$$

Na jego bazie budujemy początkową postać tablicy sympleksowej:

$$\begin{array}{c} \\ Z \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} Z & x_1 & x_2 & x_3 & z_1 & z_2 & z_3 & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{1} & -18 & -12 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 900 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1080 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 840 \end{array}\right] \end{array}.$$

Bazę stanowią w tym przypadku zmienne Z, z_1, z_2, z_3. Niewiadome typu x, to jak zwykle na początku zmienne niebazowe, którym przyporządkowujemy wartość równą 0[11]. Wartość początkowa funkcji Z jest równa 0.

Na podstawie rozkładu ujemnych wartości w pierwszym wierszu tablicy sympleksowej oraz kryterium najmniejszego nieujemnego ilorazu przekonujemy się, że pierwszą niewiadomą typu x, która wejdzie do bazy jest x_1 (najmniejsza ujemna wartość jest równa (-18) i zastąpi niewiadomą z_2 (odpowiednie trzy ilorazy, to: $900/_2 = 450$, $1080/_3 = \mathbf{360}$,

[11] Rozkład elementów w tablicy odpowiada wierzchołkowi o współrzędnych (0, 0, 0), 3-wymiarowego wielościanu wypukłego w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ lub ogólniej, wierzchołkowi o współrzędnych (0, 0, 0, 900, 1080, 840) w odpowiednim 6-wymiarowym wielościanie wypukłym.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

${}^{840}/_{2} = 420$. Po operacji zastąpienia niewiadomej z_2 przez niewiadomą x_1, tablica sympleksowa przybierze postać

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} Z & x_1 & x_2 & x_3 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} Z \\ z_1 \\ x_1 \\ z_3 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\mathbf{1} & 0 & -6 & -3 & 0 & 6 & 0 & 6480 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & 0 & 180 \\
0 & \mathbf{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 360 \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \mathbf{1} & 120
\end{array}\right].
\end{array}$$

Dokonaliśmy przejścia w przestrzeni trójwymiarowej od wierzchołka (0, 0, 0) do wierzchołka (360, 0, 0)[12]. Wartość funkcji zysku w nowym wierzchołku jest równa 6480.

Następną niewiadomą wchodzącą do bazy jest x_2 (najmniejsza ujemna wartość jest równa (-6)), która zastępuje niewiadomą z_3 (odpowiednie ilorazy, to: ${}^{180}/_{\frac{1}{3}} = 540$, ${}^{360}/_{\frac{1}{3}} = 1080$, ${}^{120}/_{\frac{4}{3}} = \mathbf{90}$). Po tej zamianie tablica sympleksowa przekształci się do postaci:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} Z & x_1 & x_2 & x_3 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} Z \\ z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 3 & \frac{9}{2} & 7020 \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 150 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 330 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 90
\end{array}\right].
\end{array}$$

Obserwujemy przejście od wierzchołka o współrzędnych (360, 0, 0) do wierzchołka o współrzędnych (330, 90, 0). Wartość funkcji zysku wzrosła do 7020.

Korzystając kolejny raz z kryterium najmniejszego nieujemnego ilorazu, stwierdzamy, W ostatnim kroku, niewiadoma x_3 (ujemna wartość jest równa $(-\frac{9}{2})$) zastąpi w bazie niewiadomą z_1 (najmniejszy nieujemny iloraz jest równy ${}^{150}/_{\frac{3}{4}} = 200$). Po tej operacji tablica sympleksowa będzie miała kształt

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} Z & x_1 & x_2 & x_3 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} Z \\ x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 & 7920 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 200 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 180 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 140
\end{array}\right].
\end{array}$$

[12] Nietrudno również wskazać zmianę wierzchołków w wielościanie 6-wymiarowym.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Algorytm sympleksowy został zakończony. W tym wypadku wszystkie niewiadome typu x znalazły się w bazie. Funkcja Z osiąga wartość największą w punkcie o współrzędnych (180, 140, 200), równą 7920.

5.3 Metoda sympleks dla n-wymiarowego standardowego zagadnienia minimalizacji.
Zagadnienie dualne.

Okazuje się, że standardowe zagadnienie minimalizacji funkcji celu może być przeformułowane w taki sposób, by zredukować je do pewnego zagadnienia wymagającego maksymalizacji innej funkcji celu. Możliwa jest również procedura odwrotna. Prześledźmy ten proces na poniższym przykładzie.

Przykład 5.4

Wróćmy do standardowego zagadnienia maksymalizacji, omawianego w Przykładzie 5.1, gdzie należało zoptymalizować funkcję zysku $Z = Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$. Niezbędne informacje były zawarte w poniższej tabeli:

Wyroby / *Surowce*	w_1	w_2	*Zapasy surowców*
s_1	20	15	60 000
s_2	4	9	25 200
s_3	4	6	18 000
Praca (*minuty*)	30	20	87 000
Zysk (*zł*)	5	4	

Postawione zagadnienie może być ujęte inaczej – z punktu widzenia wartości czterech środków niezbędnych do produkcji wyrobów w_1 oraz w_2.

Niech y_1, y_2, y_3, y_4 oznaczają odpowiednio liczby jednostek surowców s_1, s_2, s_3 oraz jednostki czasu pracy – środków koniecznych do produkcji wyrobów w_1 oraz w_2. Łączna wielkość wszystkich środków produkcji (po uwzględnieniu wielkości ich zapasów) jest równa

$$60\,000y_1 + 25\,200y_2 + 18\,000y_3 + 87\,000y_4 \qquad (*)$$

Po wyprodukowaniu wyrobów, zakład powinien posiadać minimalne wielkości środków produkcji, co w konsekwencji oznacza zasadność zminimalizowania wyrażenia (*).

Z punktu widzenia zakładu, aby uzyskać jakikolwiek zysk z produkcji wyrobu w_1, wartość dwudziestu jednostek surowca s_1, czterech jednostek surowców s_2, s_3 oraz trzydziestu jednostek czasu pracy – wartość środków niezbędnych do produkcji wyrobu w_1, powinna być nie mniejsza niż 5 zł. Argument ten daje ograniczenie:

$$20y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 30y_4 \ge 5.$$

Podobnie, osiągnięcie zysku z produkcji wyrobu w_2 daje kolejne ograniczenie:

$$15y_1 + 9y_2 + 6y_3 + 20y_4 \ge 4.$$

Uwzględniając założenia trywialne, uzyskujemy następujące, standardowe zagadnienie minimalizacji: zminimalizować funkcję

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$g = g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 60\,000y_1 + 25\,200y_2 + 18\,000y_3 + 87\,000y_4$$

względem następującego układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} 20y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 30y_4 \geq 5 \\ 15y_1 + 9y_2 + 6y_3 + 20y_4 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Wskazaliśmy, w jaki sposób przekształcić standardowe zagadnienie maksymalizacji i uzyskać odpowiadające mu standardowe zagadnienie minimalizacji. Jest oczywiste, że analogiczna argumentacja zagwarantowałaby przekształcenie zagadnienia minimalizacji do odpowiadającego mu zagadnienia maksymalizacji. Istnieje zatem wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między omawianymi tu typami zagadnień programowania liniowego. Z tego powodu wprowadzamy następującą umowę.

Zagadnieniem dualnym do standardowego zagadnienia maksymalizacji:

zmaksymalizować funkcję celu

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

względem układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

jest następujące zagadnienie minimalizacji:

zminimalizować funkcję celu

$$g = g(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

względem układu warunków ograniczających:

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{21}y_2 + \ldots + c_{m1}y_m \geq c_1 \\ c_{12}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{m2}y_m \geq c_2 \\ \ldots \\ c_{1n}y_1 + c_{2n}y_2 + \ldots + c_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

Zagadnieniem dualnym do standardowego zagadnienia minimalizacji:
zminimalizować funkcję celu

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

względem układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \geq b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

jest następujące zagadnienie maksymalizacji:
zmaksymalizować funkcję celu

$$g = g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

względem układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{21}y_2 + \ldots + c_{m1}y_m \leq c_1 \\ c_{12}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{m2}y_m \leq c_2 \\ \ldots \\ c_{1n}y_1 + c_{2n}y_2 + \ldots + c_{mn}y_m \leq c_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0 \end{cases}.$$

Podkreślmy istotne różnice między tymi zagadnieniami. *Po pierwsze*, liczba zmiennych decyzyjnych w zagadnieniu dualnym jest równa liczbie warunków ograniczających w zagadnieniu pierwotnym (pomijamy założenia trywialne). *Po drugie*, liczba warunków ograniczających w zagadnieniu dualnym jest równa liczbie zmiennych decyzyjnych w zagadnieniu pierwotnym. *Po trzecie*, współczynniki zawarte w funkcji celu, występującej w zagadnieniu dualnym, są wyrazami wolnymi w nierównościach tworzących warunki ograniczają-

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

ce dla zagadnienia pierwotnego. Podobnie wyrazy wolne zawarte w nierównościach generujących warunki ograniczające dla zagadnienia dualnego występują, jako współczynniki określające funkcje celu, w zagadnieniu pierwotnym. *Dodatkowo, macierz* $[c_{ji}]$ *współczynników dla zagadnienia dualnego jest macierzą transponowaną macierzy* $[c_{ij}]$ *współczynników dla zagadnienia pierwotnego*.

Przykład 5.5

Zminimalizujemy funkcję kosztów $K = K(x_1, x_2, x_3) = 48x_1 + 80x_2 + 120x_3$, względem poniższego układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 50 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 60 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Zagadnieniem dualnym do danego jest zagadnienie maksymalizacji funkcji $g = g(y_1, y_2) = 50y_1 + 60y_2$, pod kątem układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 \leq 48 \\ 2y_1 + 4y_2 \leq 80 \\ 6y_1 + 8y_2 \leq 120 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Zastosujemy metodę sympleks. Układ równań odpowiadający danemu zagadnieniu maksymalizacji ma postać:

$$\begin{cases} g - 50y_1 - 60y_2 = 0 \\ 3y_1 + 3y_2 + z_1 = 48 \\ 2y_1 + 4y_2 + z_2 = 80 \\ 6y_1 + 8y_2 + z_3 = 120 \\ y_1, y_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0 \end{cases}$$

Początkowa postać tablicy sympleksowej jest następująca:

$$\begin{array}{c} \\ g \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} g & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & -50 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 80 \\ 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 120 \end{array}\right] \end{array}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Pierwszą niewiadomą typu y wchodzącą do bazy jest y_2 (współczynnik (-60)). Na podstawie kryterium najmniejszego nieujemnego ilorazu, zastąpi ona zmienną z_3 $\left(\frac{48}{3}=16,\ \frac{80}{4}=20,\ \frac{120}{8}=\mathbf{15}\right)$. Odpowiednie przekształcenia elementarne na wierszach macierzy pozwalają uzyskać następujący ciąg tablic sympleksowych:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc|c} g & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} g \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & -50 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 80 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 15 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc|c} g & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} g \\ z_1 \\ z_2 \\ y_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & -5 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 900 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{3}{8} & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} & 20 \\ 0 & \frac{3}{4} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 15 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc|c} g & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} g \\ z_1 \\ z_2 \\ y_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & -5 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 900 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} & 20 \\ 0 & \frac{3}{4} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 15 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc|c} g & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} g \\ y_1 \\ z_2 \\ y_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{20}{3} & 0 & 5 & 920 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \mathbf{1} & -1 & 24 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 12 \end{array}\right] \end{array}$$

Powyższa tablica sympleksowa jest ostatnią w danym algorytmie (wszystkie wyrazy w pierwszym wierszu są dodatnie). Z pierwszego jej wiersza odczytujemy, że rozwiązaniem analizowanego zagadnienia minimalizacji jest układ $\begin{bmatrix} \frac{20}{3} & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$. Najmniejsza wartość funkcji kosztu wynosi $K\left(\frac{20}{3}, 0, 5\right) = 48 \cdot \frac{20}{3} + 120 \cdot 5 = 920$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Pozostaje scharakteryzować związek między rozwiązaniami problemów do siebie dualnych. Oczywiście podamy tylko związek opisujący przypadek, w którym zagadnieniem pierwotnym jest zagadnienie minimalizacji.

Własność

Jeśli zagadnieniem pierwotnym jest standardowe zagadnienie minimalizacji, to jego rozwiązanie odczytujemy z końcowej postaci tablicy sympleksowej, odpowiadającej dualnemu do niego, standardowemu zagadnieniu maksymalizacji. Rozwiązanie to występuje w pierwszym wierszu danej tablicy sympleksowej. Rozwiązanie tworzą wartości występujące w tym wierszu, odpowiadające zmiennym dołączonym (typu z). Wartość optymalna funkcji celu dla standardowego zagadnienia minimalizacji pokrywa się z wartością optymalną zagadnienia dualnego.

Zadania dodatkowe do zajęć.

1.

W związku z nadchodzącymi świętami pewna firma zamierza zmienić czasowo profil swojej działalności i planuje produkcję upominków świątecznych U_1 oraz U_2. Do ich produkcji wykorzystane będą dwie maszyny produkcyjne M_1 i M_2. Czas pracy pierwszej maszyny nie powinien przekroczyć 30 godzin, a czas pracy drugiej maszyny jest nie większy niż 50 godzin. Do produkcji upominku U_1 potrzeba dwóch minut pracy maszyny M_1 oraz minuty pracy maszyny M_2, natomiast do produkcji upominku U_2 konieczna jest minuta pracy maszyny M_1 oraz trzy minuty pracy maszyny M_2. Wiedząc, że spodziewany zysk ze sprzedaży upominku U_1 szacowany jest na 10 zł, a zysk ze sprzedaży upominku U_2 na 12 zł. Ustalić optymalną produkcję upominków, zapewniającą maksymalny zysk.

Odpowiedź: 480 sztuk upominku U_1 oraz 840 sztuk upominku U_2. Zapewni ona łączny zysk równy 14 880 zł (o ile sprzedana zostanie cała produkcja).

Wskazówka.

Zakładając, że mają być spełnione wszystkie wymienione ograniczenia, a przy tym uzyskany maksymalny zysk, mamy do czynienia z następującym zagadnieniem programowania liniowego: zmaksymalizować funkcję zysku $Z = Z(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2$, względem układu następującego układu warunków ograniczających:

$$. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1800 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rzeczywiście, niech x_1, x_2 oznaczają odpowiednio wielkość produkcji odpowiednio upominku U_1 oraz U_2. Łączny zysk Z, z produkcji tych upominków można wyrazić w postaci $Z = Z(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2$. Łączny czas pracy (w minutach) maszyny M_1 wynosi $2x_1 + x_2$ i nie powinien przekroczyć 1800 minut (zakładając, że w przedsiębiorstwie obowiązuje sześciogodzinny dzień pracy, maszyna nie powinna pracować dłużej, niż 5 dni), stąd uzyskujemy pierwszy warunek ograniczający. Podobnie, czas pracy maszyny drugiej wynosi x_1

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

+ $3x_2$, ponadto nie powinna ona pracować dłużej, niż 3000 minut (oznacza to, że druga maszyna nie powinna pracować dłużej, niż 10 dni). Tym samym, otrzymujemy drugi warunek ograniczający. Założenie o nieujemności zmiennych x_1, x_2 jest oczywiste.

2.

Dyrektor pewnej agencji reklamowej musi zdecydować w imieniu swojego klienta, ile wykupić czasu antenowego na nadchodzącą świąteczną kampanię reklamową. Wiadomo, że jedna minuta reklamy w telewizji państwowej kosztuje 36 000 złotych, a minuta reklamy w telewizji prywatnej kosztuje 60 000 złotych. Zleceniodawca wymaga, by każdego dnia kampanii reklama dotarła do przynajmniej 900 000 widzów, ponadto, by czas emisji w telewizji prywatnej był przynajmniej o trzy minuty dłuższy niż w telewizji państwowej.

Dyrektor agencji szacuje, że minutowa reklama w telewizji państwowej dociera do 40 000 widzów, a w telewizji prywatnej może mieć oglądalność na poziomie aż 100 000 widzów. Na podstawie swojego doświadczenia szef agencji zdecydował, że kampania będzie efektywna, gdy przynajmniej przez 15 minut każdego dnia będzie docierała do widzów. Określić minimalny całkowity koszt czasu antenowego na nadchodzącą świąteczną kampanię reklamową.

Odpowiedź: optymalne wydatki – w wysokości 756 000 zł – zostaną poniesione wtedy, kiedy wykupiony zostanie pakiet reklamowy w wysokości 6 minut w telewizji państwowej i 9 minut w telewizji prywatnej.

Wskazówka.

Zakładając, że mają być spełnione wszystkie wymienione ograniczenia, a przy tym poniesiony minimalny koszt wydatków, mamy zatem następujące zagadnienie programowania liniowego: zminimalizować funkcję kosztów

$$K = K(x_1, x_2) = 36\,000x_1 + 60\,000x_2$$

względem następującego układu warunków ograniczających:

$$\begin{cases} 40\,000x_1 + 100\,000x_2 \geq 900\,000 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Istotnie, niech x_1, x_2 oznaczają odpowiednio ilość czasu reklamowego (w minutach) wykupionego w telewizji państwowej i prywatnej. Całkowity koszt K czasu antenowego wynosi $K = K(x_1, x_2) = 36\,000x_1 + 60\,000x_2$. Całkowita liczba widzów, do których dotrze reklama wyniesie w takim przypadku $40\,000x_1 + 100\,000x_2$, więc wymaganie klienta, by reklama dotarła do przynajmniej 900 000 widzów, można zapisać w postaci:

$$40\,000x_1 + 100\,000x_2 \geq 900\,000.$$

Przypomnijmy, że czas w telewizji prywatnej ma być przynajmniej o trzy minuty dłuższy niż w telewizji państwowej, mamy stąd ograniczenie: $x_2 \geq x_1 + 3$ lub $-x_1 + x_2 \geq 3$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Założenie, że kampania będzie efektywna, gdy przynajmniej przez 15 minut każdego dnia będzie docierała do widzów, można wyrazić następująco: $x_1 + x_2 \geq 15$. W końcu nie jest możliwe, by zmienne x_1, x_2 były ujemne: $x_1, x_2 \geq 0$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020