Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

VII Liceum Ogólnokształcącego im. Dąbrówki

Tytuł zajęć

„ Kurs z logiki matematycznej i dowodzenia twierdzeń

Autor/Autorzy opracowania

Krystyna Tobias-Lancmańska

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:
„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki
w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych
Metropolii Poznań*”

Poznań 2021

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Zdania logiczne. Koniunkcja zdań.	1
2.	Alternatywa zdań	1
3.	Negacja = zaprzeczenie	1
4.	Implikacja zdań	1
5.	Równoważność zdań	1
6.	Prawa De Morgana	1
7.	Działania na zbiorach, Prawa De Morgana dla zbiorów	1
8.	Przedziały. Nierówności z wartością bezwzględną	1
9.	Dowodzenie wprost	4
10.	Dowodzenie nie wprost	4
11.	Indukcja matematyczna	4
12.	Dowody dotyczące podzielności liczb oraz dzielenia z resztą	2
13.	Dowody z wykazywaniem, że liczba lub wyrażenie spełnia określone warunki	2
14.	Dowody z wykazywaniem prawdziwości równań	3
15.	Dowody z wykazywaniem nierówności	3
Łączna liczba godzin		30

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Spis treści

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1. LOGIKA MATEMATYCZNA

1.1 Zdania logiczne

Zdania logiczne w matematyce są to wyrażenia, które mogą przyjąć wartość logiczną prawdy albo fałszu.
Logika wykorzystuje tylko zdania oznajmujące. Są to zdania prawdziwe lub fałszywe.
Z tego wynika, że wszelkiego rodzaju inne zdania np. zdania pytające nie są zdaniami logicznymi z punktu widzenia logiki matematycznej.
Wartość logiczna zdania może być: prawda lub fałsz. Prawdę symbolicznie oznaczmy przez 1, zaś fałsz przez 0.
Zdania logiczne zwykle oznaczamy małymi literkami p, q, r itd.
Przykłady zdań:
Każdy kwadrat jest rombem (zdanie prawdziwe 1)

Każdy romb jest kwadratem (zdanie fałszywe 0)

1.2 Koniunkcja zdań

Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, gdy prawdziwe są oba tworzące je zdania.
Koniunkcję można zdefiniować jako dwuargumentowe działanie określone w zbiorze zdań, które zdaniom p, q przyporządkowuje zdanie p i q.

Koniunkcja zadań p, q zapisywana jest przy pomocy spójnika „i” np.: p i q.
W zapisie matematycznym ten spójnik jest również zapisywany przez symbol $\wedge$ np.: $p \wedge q$.

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 1.2.1

Oceń wartości logiczne poniższych zdań, określając najpierw wartości logiczne zdań prostych, tworzących koniunkcję.

a) Każdy trójkąt: ma trzy kąty i środek symetrii.

b) Warszawa jest stolicą Polski i leży w województwie mazowieckim.

c) Jan Kochanowski napisał „Treny" i Adam Mickiewicz jest autorem „Pana Tadeusza".

d) $(1+2)^2 = 1^2 + 2^2 \ \wedge\ 3 - 2 = (2-3)^2$

e) $\sqrt{2} > 1 \ \wedge\ \sqrt{33^2 + 44^2} = \sqrt{55^2}$

f) $\sqrt{(-11)^2} \neq 11 \ \wedge\ \sqrt{0} \neq 0$

Zad. 1.2.2

Napisz koniunkcję zdań, używając symboli matematycznych. Oceń wartość logiczną koniunkcji.

a) Liczba 5 jest dodatnia i kwadrat liczby 5 jest mniejszy od 30.

b) Iloraz (-10) przez 2 jest mniejszy od -3 i sześcian liczby 6 nie równa się 216.

c) Dokładna wartość liczby π jest równa 3,14 i przybliżona wartość liczby $\sqrt{2}$ wynosi 1,41.

d) Kwadrat liczby 6 jest równy 36 i kwadrat liczby (-6) jest równy 36.

e) Trzecia potęga liczby $\sqrt{3}$ jest większa od 9 i $\sqrt{3}$ jest liczbą nieujemną.

f) Liczba $\sqrt{5}$ jest nie większa od liczby $\sqrt{6}$ i liczba (-0,13) jest nie mniejsza od liczby (-0,14).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 1.2.3

Zapisz poniższe zdania, używając symboli matematycznych. Oceń wartości logiczne zdań złożonych.

a) Suma liczb 3 i 4 jest równa 7 i suma kwadratów liczb 3 i 4 jest równa kwadratowi liczby 7.

b) Liczba $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest nie większa od 1 i liczba $\sqrt{7}-3$ jest nieujemna.

c) Iloczyn liczb $\sqrt{5}$ i ($-\sqrt{2}$) jest liczbą niedodatnią i sześcian sumy tych liczb jest liczbą nieujemną.

Zad. 1.2.4

Zdanie „Liczba 3 jest dzielnikiem liczby 27" zapisujemy symbolicznie: „$3 \mid 27$". Natomiast zdanie „Liczba 27 nie jest podzielna przez 5" zapisujemy symbolicznie: „$5 \nmid 27$".
Zapisz poniższe zdania, używając symboli matematycznych. Oceń wartości logiczne tych zdań.

a) Liczba 2 jest dzielnikiem liczby 6 i liczba 3 nie jest dzielnikiem liczby 9.

b) Liczba 4 nie jest dzielnikiem liczby 110 i liczba 1000 jest podzielna przez 8.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.3 Alternatywa zdań

Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa, gdy choćby jedno ze zdań jest prawdziwe.
Alternatywa zdań jest fałszywa tylko, gdy oba budujące ją zdania są fałszywe.

Alternatywa zadań p, q zapisywana jest przy pomocy spójnika „lub" np.: p lub q. W zapisie matematycznym ten spójnik jest również zapisywany przez symbol ∨ np.: p ∨ q.

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zad. 1.3.1

Oceń wartości logiczne poniższych zdań, określając najpierw wartości logiczne zdań prostych, tworzących alternatywę.

a) W Polsce uprawia się ryż lub ziemniaki.

b) Każdy trójkąt jest prostokątny lub równoramienny.

c) Kwadrat jest rombem lub prostokątem.

d) $2 \cdot (-1)^3 \neq -2 \cdot (-1)^4 \ \vee \ 0{,}1^2 < 0{,}1^3$

e) $\sqrt{4} = -2 \ \vee \ -2^2 \neq 4$

f) $\sqrt{341} > 18 \ \vee \ \sqrt{341} \leq 18$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 1.3.2

Napisz alternatywę zdań, używając symboli matematycznych. Oceń wartość logiczną alternatywy.

a) Iloczyn liczb $(\sqrt{3} - 1{,}73)$ oraz $(\pi - 3{,}14)$ jest równy 0 lub kwadrat liczby π jest nie większy od 7.

b) Suma liczb $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{12}$ jest równa podwojonej liczbie $\frac{1}{8}$ lub różnica liczb $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{12}$ jest różna od $\frac{1}{8}$.

c) Suma kwadratów liczb 5 i 12 jest równa kwadratowi liczby 13 lub różnica kwadratów liczb 10 i 8 jest równa kwadratowi liczby 6.

d) Różnica sześcianów liczb 0,1 i (- 0,1) jest większa od sześcianu różnicy tych liczb lub iloraz liczby 0,02 przez 0,0001 jest mniejszy od 200.

Zad. 1.3.3

Zapisz poniższe zdania, używając symboli matematycznych. Oceń wartości logiczne zdań złożonych.

a) Kwadrat sumy liczb (-1) i (-2) jest liczbą nieujemną lub suma sześcianów liczb (-1) i (-2) jest liczbą mniejszą od 0.

b) iloczyn liczb (-7) i (-2) jest różny od $\sqrt{196}$ lub iloraz liczby $\sqrt{3}$ przez $(-2\sqrt{3})$ jest nie większy od -0,6.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

c) iloraz liczby 6 przez sumę liczb 2 i 1 jest równy 3 lub różnica liczb 4 i (-5) jest różna od kwadratu liczby (-3).

Zad. 1.3.4

Zdanie „Liczba 3 jest dzielnikiem liczby 27" zapisujemy symbolicznie: „$3 \mid 27$". Natomiast zdanie „Liczba 27 nie jest podzielna przez 5" zapisujemy symbolicznie: „$5 \nmid 27$". Zapisz poniższe zdania, używając symboli matematycznych. Oceń wartości logiczne tych zdań.

a) Liczba 6 jest dzielnikiem liczby 12450 lub liczba 3011 jest parzysta.

b) Liczba $(0 \cdot 1001)^2$ nie jest podzielna przez 2 lub liczba 10101 nie jest podzielna przez 3.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.4 Negacja = zaprzeczenie.

Zaprzeczeniem zdania p (nieprawda, że p) nazywamy takie zdanie (~p), które jest fałszywe, gdy p jest prawdziwe, a zdanie (~p) jest prawdziwe, gdy p jest fałszywe.

Prościej można powiedzieć, że zaprzeczeniem prawdy jest fałsz, a zaprzeczeniem fałszu jest prawda.

p	~p
1	0
0	1

Zad. 1.4.1
Oceń wartość logiczną podanych zdań.

a) liczba $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ jest większa od 3.

b) Meksyk jest krajem azjatyckim.

c) Kangury są torbaczami.

d) Istnieje trójkąt o bokach długości 2, 3, 5.

e) Pole kwadratu o boku 3 jest większe od pola trójkąta równobocznego o boku 4.

f) Liczba przekątnych pięciokąta jest równa liczbie jego boków.

g) Każdy równoległobok jest trapezem.

h) Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 3 i 4 jest równy 14.

Zad. 1.4.2
Podaj zaprzeczenia zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń.

a) $\sqrt{3}$ jest liczbą całkowitą.

b) $5^2 = (-5)^2$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

c) $-3^2 = 9$

d) Liczba 202 nie jest liczbą parzystą.

e) $7 \cdot (-2) \neq 14 \cdot (-1)$.

f) $2^3 + 1 = (-3)^2$.

g) $-3^2 \leq (-3)^2$.

h) $2^3 + 4^2 \geq 5^2$.

Zad. 1.4.3

Zapisz zdanie, używając symboli matematycznych. Oceń wartość logiczną tego zdania. W przypadku zdania fałszywego podaj jego zaprzeczenie.

a) Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest dodatnia.

b) Liczba $\sqrt{(-1)^2}$ jest nieujemna.

c) Sześcian liczby 2 jest większy od kwadratu liczby (-3).

d) Nieprawda, że $\sqrt{0}$ jest równy 0.

e) Pierwiastek trzeciego stopnia liczby (-8) jest większy lub równy zerowej potędze liczby -5.

f) Iloraz liczby 4 przez (-2) jest niemniejszy od iloczynu liczby 4 i (-2).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

g) Kwadrat sumy liczb 2 i 5 jest mniejszy lub równy sumie kwadratów liczb 2 i 5.

h) Nieprawda, że druga potęga liczby 0,5 jest nie większa niż druga potęga liczby 0,3

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.5 Implikacja zdań

Implikacją o poprzedniku p i następniku q nazywamy zdanie „jeżeli p, to q”, co zapisujemy „p⇒q”.

W powyższym zapisie p to – **poprzednik implikacji**, zaś q to **następnik implikacji**.
Z tabeli poniższej wynika, że implikacja p⇒q może być fałszywa tylko w jednym wypadku, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, natomiast następnik fałszywy.

p	q	p⇒q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja jest wykorzystywana do „dowodu nie wprost”. Konkretnie wykorzystuje się tu **prawo kontrapozycji:** (p ⇒ q) ⇔ (~q ⇒ ~p)

Zad. 1.5.1

Podaj wartości logiczne wartości logiczne poniższych implikacji, oceniając najpierw wartości logiczne zdań prostych.

a) Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to Gdańsk nie jest stolicą Polski.

b) Jeżeli Odra przepływa przez Wrocław, to Warta przepływa przez Kraków.

c) Jeżeli Księżyc jest gwiazdą, to Słońce jest satelitą Ziemi.

d) Jeżeli prostokąt jest równoległobokiem, to kwadrat jest rombem.

e) $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 < \sqrt{3} - 1$

f) $\frac{2+2}{2\cdot 2} = 1 \Rightarrow \frac{3+3}{3\cdot 3} = 1$

g) $\frac{3}{0,1} < \frac{4}{0,1} \Rightarrow \frac{-3}{0,1} > \frac{-4}{0,1}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

h) $(-5)^3 = -125 \Rightarrow \pi^2 = 10$

i) $(7 \geq 1 \wedge 5 \mid 17) \Rightarrow 7 \cdot 5 = 35$

j) $(\sqrt{3} < \sqrt{2}) \Rightarrow \left[(2\sqrt{3})^2 \leq \left(2\sqrt{2}\right)^2 \vee -\sqrt{3} \geq -\sqrt{2}\right]$

k) $2 \mid 10 \Rightarrow (10:2 = 5 \wedge 5\sqrt{10} = 5\sqrt{2})$

Zad. 1.5.2

Poniżej znajdują się twierdzenia, niektóre z nich to zdania fałszywe. Dla każdego twierdzenia wypisz założenie i tezę. Sformułuj twierdzenie odwrotne do danego. Oceń wartość logiczną danego twierdzenia i twierdzenia do niego odwrotnego.

a) Jeśli liczba jest parzysta, to jest podzielna przez 12.

b) Jeśli trójkąt ma tylko dwa kąty ostre, to jest ostrokątny.

c) Jeśli liczba jest podzielna przez 3 i przez 5, to jest podzielna przez 15.

d) Jeśli przekątne czworokąta przecinają się pod kątem prostym, to czworokąt jest kwadratem.

e) Jeśli dwie liczby są ujemne, to ich iloczyn jest liczbą dodatnią.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

f) Jeśli dwie liczby mają różne znaki, to ich iloczyn jest liczbą ujemną.

g) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 100, to liczba ta jest podzielna przez 25.

h) Jeśli czworokąt ma dwie przekątne równej długości, to ten czworokąt jest trapezem równoramiennym.

Zad. 1.5.3

a) Sformułuj twierdzenie Pitagorasa w postaci implikacji. Wypisz założenie i tezę. Następnie zapisz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, podaj założenie i tezę tego twierdzenia.

b) Sformułuj twierdzenie Talesa w postaci implikacji. Wypisz założenie i tezę. Następnie zapisz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa, podaj założenie i tezę tego twierdzenia.

c) Sformułuj twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie w postaci implikacji. Wypisz założenie i tezę. Następnie zapisz twierdzenie odwrotne do tego twierdzenia, podaj założenie i tezę.

d) Sformułuj twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt w postaci implikacji. Wypisz założenie i tezę. Następnie zapisz twierdzenie odwrotne do tego twierdzenia, podaj założenie i tezę.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.6 Równoważność zdań

Dwa zdania p i q są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy oba mają jednakową wartość logiczną. Równoważność zdań p, q zapisujemy w postaci: p⇔q. Taki zapis oznacza, że zachodzą obie implikacje p⇒q i q⇒p.

p	q	p⇔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Zad. 1.6.1

Podaj wartości logiczne poniższych równoważności, oceniając najpierw wartości logiczne zdań prostych:

a) $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow -3 = 3$

b) $(5-4)^2 = -(4-5) \Leftrightarrow (-1)^2 = (-1)^4$

c) $\sqrt{(-4)^2} = -4 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{6}$

d) $0 : (-100) < 0 \Leftrightarrow 0 \bullet (-100) > 0$

e) $(3 \nmid 5 \vee 3 \mid 5) \Leftrightarrow (1 \cdot 0 > 0 \vee 1 \cdot 0 < 0)$

f) $-4 > 1 \Leftrightarrow [-4 \cdot (-1) < 1 \cdot (-1) \wedge (-4)^2 < (-1)^2]$

g) Liczba 1101 jest podzielna przez 3 <=> liczba 1101 + 6 jest podzielna przez 3.

h) Kwadrat jest prostokątem <=> prostokąt jest kwadratem.

i) Dwusieczna kąta dzieli kąt na dwa równe kąty <=> trapez ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

j) Pierwiastek parzystego stopnia z liczby nieujemnej jest liczbą nieujemną <=> potęga liczby rzeczywistej parzystego stopnia jest liczbą dodatnią.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 1.6.2

Dane są zdania p i q. Zapisz twierdzenie $p \Rightarrow q$ i twierdzenie odwrotne do niego $q \Rightarrow p$, a następnie oceń wartości logiczne tych implikacji. Czy równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym?

a) p: Romb jest kwadratem.
q: Każdy kąt rombu ma miarę 90°.

b) p: Liczba naturalna jest podzielna przez 20.
q: Liczba naturalna jest podzielna przez 10 i przez 2.

c) p: Suma dwóch liczb jest dodatnia.
q: Dwie liczby są dodatnie.

d) p: Trójkąt jest równoboczny.
q: Wszystkie kąty trójkąta mają miarę 60°.

e) p: Trójkąt nie jest prostokątny.
q: Trójkąt jest równoboczny.

f) p: Liczba całkowita jest podzielna przez każdą liczbę naturalną dodatnią.
q: Liczba jest równa 0.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

g) p: Iloczyn dwóch liczb jest ujemny.
q: Iloraz dwóch liczb jest ujemny.

h) p: Czworokąt jest równoległobokiem.
q: Czworokąt ma parę boków równych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.7 Prawa De Morgana

Prawa De Morgana są przykładem praw logicznych – zawsze prawdziwych zdań w logice.
Prawem logicznym inaczej tautologią nazywamy zdanie logiczne, które bez względu na wartości logiczne zdań, z których jest zbudowane zawsze jest prawdziwe.

Pierwsze prawo De Morgana – zaprzeczenie alternatywy jest koniunkcja zaprzeczeń.
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p	~q	(~p ∧ ~q)	~(p ∨ q) ⇔ (~p ∧ ~q)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Drugie prawo De Morgana – zaprzeczenie koniunkcji jest alternatywa zaprzeczeń
$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p	~q	(~p ∨ ~q)	~(p ∧ q) ⇔ (~p ∨ ~q)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Zad. 1.7.1
Napisz zaprzeczenia zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń:

a) Liczba 7 jest liczbą naturalną lub liczbą pierwszą.

b) 2 jest liczbą złożoną i 5 nie jest liczbą parzystą.

c) 6 nie jest liczbą parzystą lub 5 jest dzielnikiem 8.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

d) liczba $(-2)^3$ jest nieujemna i mniejsza niż $(-1)^3$.

Zad. 1.7.2
Napisz zaprzeczenia podanych zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń.

a) $4^2 = 16 \wedge (-4)^2 = 16$

b) $7 < 10 \wedge 7 \geq 3$

c) $3 \nmid 9 \vee 2 \mid 11$

d) $2 \cdot (-5) > 0 \wedge \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{5^2}$

e) $2 > 3 \vee 3 \leq \sqrt{3}$

f) $(4+5)^2 = 4^2 + 5^2 \vee \sqrt{13^2 - 5^2} = 13 - 5$

g) $4^2 = 2^4 \wedge 5^2 \neq 2^5$

Zad. 1.7.3

Udowodnij prawo kontrapozycji (transpozycji) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

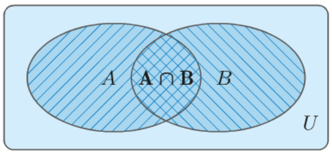
Udowodnij prawo $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.8 Działania na zbiorach

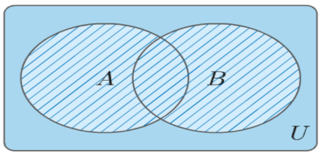
Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$



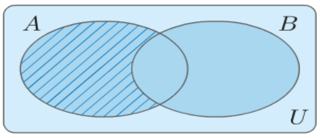
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$



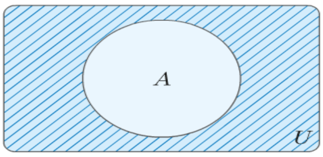
Różnicą **zbiorów A i B** nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

$$(x \in A \backslash B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$



Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru** oznaczane A'

$x \in A' \Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A)$



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

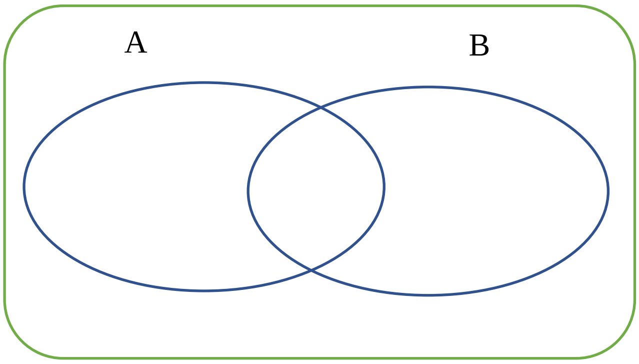
1.9 Prawa De Morgana dla zbiorów

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}'$$

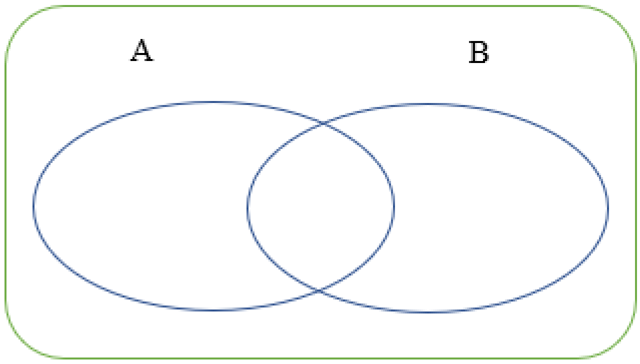
Zad. 1.9.1

Udowodnij powyższe prawo, porównując poniższe diagramy.

na diagramie poniżej przedstaw zbiór $(A \cap B)'$



na diagramie poniżej przedstaw zbór $A' \cup B'$

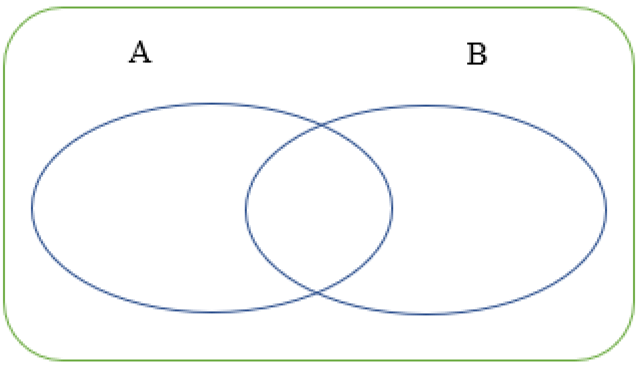


$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}'$$

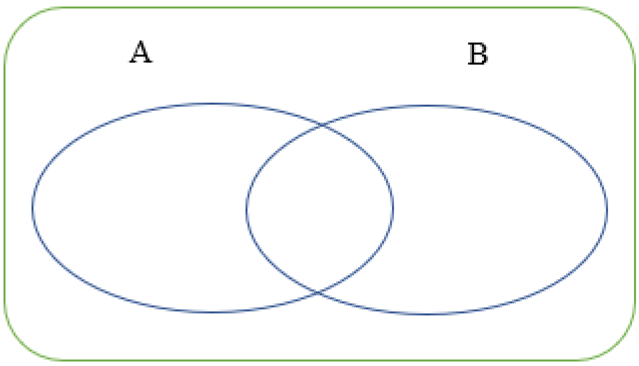
Zad. 1.9.2

Udowodnij powyższe prawo, porównując poniższe diagramy.

na diagramie poniżej przedstaw zbiór $(A \cup B)'$



na diagramie poniżej przedstaw zbór $A' \cap B'$



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.10 Przedziały

Przedział lewostronnie domknięty $\langle a;\ \infty)$

$$x \in \langle a;\ \infty) \iff (x > a \lor x = a)$$

Przedział prawostronnie domknięty $(-\infty;\ b\rangle$

$$x \in (-\infty;\ b\rangle \iff (x < b \lor x = b)$$

Przedział obustronnie otwarty $(a;\ \infty)$

$$x \in (a;\ \infty) \iff (x > a)$$

Przedział obustronnie otwarty $(-\infty;\ b)$

$$x \in (-\infty;\ b) \iff (x < b)$$

Przedział obustronnie domknięty $\langle a; b\rangle$

$$x \in \langle a; b\rangle \iff (x \geq a \land x \leq b)$$

Przedział obustronnie otwarty $(a; b)$

$$x \in (a; b) \iff (x > a \land x < b)$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Przedział lewostronnie domknięty $\langle a; b)$

$$x \in \langle a; b) \Leftrightarrow (x \geq a \land x < b)$$

Przedział prawostronnie domknięty $(a;\ b\rangle$

$$x \in (a;\ b\rangle \Leftrightarrow (x > a \land x \leq b)$$

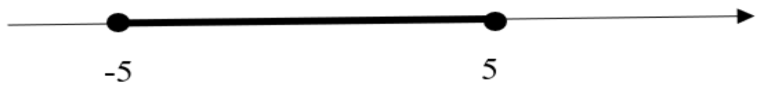
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.11 Nierówności z wartością bezwzględną

Przykład 1

$|x| \leq 5$

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 0 jest mniejsza lub równa 5



$$x \in \langle -5; 5\rangle \Leftrightarrow (x \geq -5 \wedge x \leq 5)$$

Przykład 2

$|x| \geq 7$

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 0 jest większa lub równa 7

$$x \in (-\infty;\ -7\rangle \cup \langle 7;\ \infty) \Leftrightarrow (x \leq -7\ \vee x \geq 7)$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2. DOWODZENIE TWIERDZEŃ

Twierdzenia matematyczne często są formułowane w postaci zdania : Jeżeli ….., to …..

Takie zdanie nazywamy implikacją i w skrócie możemy je zapisać za pomocą symbolu $\Rightarrow$

Nawet jeśli twierdzenie nie jest zapisane w postaci implikacji, to zwykle można je tak zapisać.

Przy dowodzeniu twierdzeń matematycznych najczęściej stosuje się dwa rodzaje uzasadnienia,

2.1 Dowodzenie wprost

– przyjmujemy, że prawdziwe jest założenie i wykazujemy, że teza także jest prawdziwa.

Przykład 2.1.1

Udowodnij, że dla liczb całkowitych a i b zachodzi twierdzenie*:*

Jeśli a jest liczbą podzielną przez 6 oraz b jest liczbą podzielną przez 15, to suma liczb a i b jest podzielna przez 3.

Zapisz zdanie, używając symboli matematycznych. Wypisz założenie i tezę.

Dowód:

Zakładamy, że liczba a jest podzielna przez 6, zatem $a=6m$ dla pewnej liczby całkowitej m

Zakładamy, że liczba b jest podzielna przez 15, zatem $b=15n$ dla pewnej liczby całkowitej n

W takim razie $a+b=6m+15n=3(2m+5n)$

Liczby m i n są całkowite, więc liczba $2m+5n$ jest całkowita.

Liczba $a+b$ jest iloczynem liczby 3 i pewnej liczby całkowitej, zatem jest podzielna przez 3. ■

Zad. 2.1.1

Gdy od liczby podzielnej przez 8 odejmiemy liczbę podzielną przez 20, to otrzymamy liczbę podzielną przez 4.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

a) Zapisz zdanie, używając symboli matematycznych. Wypisz założenie i tezę.

b) Udowodnij powyższe twierdzenie.

Zad. 2.1.2

Uzasadnij, że jeśli suma trzech liczb naturalnych jest nieparzysta, to suma ich kwadratów jest nieparzysta.

Zad. 2.1.3

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba

a) $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 12

b) $n(n^4 - 1)$ jest podzielna przez 6

c) $n^6 - 2n^4 + n^2$ jest podzielna przez 36.

Zad. 2.1.4

Uzasadnij, że:

a) iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24

b) suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3

c) liczba $7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$ jest podzielna przez 19

d) liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7

e) reszta z dzielenia liczby pierwszej większej od 3 przez 6 jest równa 1 lub 5

f) jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 6 jest równa 5, to reszta z dzielenia liczby n^2 przez 6 jest równa 1

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

g) jeśli reszta z dzielenia każdej z liczb naturalnych: n_1, n_2 *i* n_3 przez 6 jest równa 4, to suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 12

h) różnica kwadratów dwóch liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9

i) suma sześcianów dwóch liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 27

j) iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których pierwsza jest parzysta, jest podzielny przez 24

2.2 Dowodzenie nie wprost (1)

– (jeden sposób) przyjmujemy, że fałszywa jest teza i wykazujemy, że założenie nie może być prawdziwe. Wykorzystuje się tu **prawo kontrapozycji:**

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Przykład 2.2.1

Udowodnij twierdzenie:

Jeśli liczba a jest niewymierna, to liczba a+3 też jest liczbą niewymierną.

Dowód:

Załóżmy, że liczba $a+3$ jest wymierna. Wobec tego dla pewnych liczb całkowitych p i q

$a + 3 = \frac{p}{q}$

Stąd $a = \frac{p}{q} - 3$ czyli $a = \frac{p-3q}{q}$

Ponieważ p i q są liczbami całkowitymi, to liczba p-$3q$ jest liczbą całkowitą.

Zatem liczba a jest ilorazem dwóch liczb całkowitych, czyli jest liczbą wymierną. Jest to sprzeczne z założeniem.

Z zaprzeczenia tezy wynikło zaprzeczenie założenia. Wobec tego twierdzenie jest prawdziwe. ■

Zad. 2.2.1

Udowodnij twierdzenie:

Jeśli a jest liczbą niewymierną, to $\frac{a}{2}$ *także jest liczbą niewymierną.*

2.3 Dowodzenie nie wprost (2)

– (drugi sposób) przyjmujemy, że całe twierdzenie nie jest prawdziwe i w wyniku poprawnego rozumowania dochodzimy do sprzeczności ze znanym faktem matematycznym.

W poniższym przykładzie wykorzystamy twierdzenie: *Każda liczba naturalna złożona jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą od niej mniejszą.*

Przykład 2.3.1

Udowodnij twierdzenie: *Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.*

Dowód:

Załóżmy, że liczb pierwszych jest skończona ilość.

Wynika stąd, że wśród liczb pierwszych można wskazać największą. Oznaczmy ją literą *p*.

Zatem lista wszystkich liczb pierwszych w kolejności od najmniejszej do największej jest następująca: 2, 3, 5, 7, 11, …, *p*

Tworzymy liczbę $L=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot p+1$

Liczba L jest większa od *p*, zatem nie jest liczbą pierwszą. Musi być więc liczbą złożoną.

Jednocześnie reszta z dzielenia liczby L przez 2 jest równa 1, reszta z dzielenia liczby L przez 3 jest równa 1 i taką samą resztę otrzymamy, dzieląc liczbę L przez każdą z pozostałych liczb pierwszych: 5, 7,11, … , *p*.

Wobec tego nasza liczba złożona L nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Jest to sprzeczne z twierdzeniem

Każda liczba naturalna złożona jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą od niej mniejszą.

Zaprzeczając twierdzeniu *Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele* otrzymaliśmy sprzeczność. Tym samym udowodniliśmy twierdzenie. ■

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 2.3.1

Udowodnij, że liczba *x* jest niewymierna, jeżeli:

a) $x = \sqrt{2}$

b) $x = \sqrt{3}$

c) $x = \sqrt{5}$

d) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

e)) $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

W matematyce można czasem spotkać twierdzenia, w których występuje zwrot *wtedy i tylko wtedy*. Zdanie w takiej formie nazywamy równoważnością i możemy zapisać używając symbolu ⇔.

Równoważność zdań p, q zapisujemy w postaci: p⇔q. Taki zapis oznacza, że zachodzą obie implikacje p⇒q i q⇒p, zatem aby udowodnić twierdzenie sformułowane w postaci równoważności musimy udowodnić dwie implikacje p⇒q i q⇒p.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.4 Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna, zwana też **indukcją zupełną,** jest to metoda dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych.

Przykład 2.4.1

Udowodnij, że $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla każdego $n \in N^+$

1. Sprawdzenie, czy równanie jest prawdziwe dla *n*=1

$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ 1=1 równanie jest prawdziwe dla *n*=1

2. Pokażemy, że jeżeli równanie jest prawdziwe dla pewnego $n \in N^+$, to jest też prawdziwe dla $(n+1) \in N^+$

Jeżeli $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ to $\overbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1)}^{L} = \overbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}^{P}$

Dowód:

L=$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$=P $\blacksquare$

Zad. 2.4.1 (ciąg, indukcja)

Udowodnij równanie dla $n \in N^+$:

a) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

b) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

c) $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2}$

Przykład 2.4.2

Udowodnij, że $8 \mid 11^n - 3^n$ dla każdego $n \in N^+$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1. Sprawdzenie dla $n = 1$ 11-3=8 $8 \mid 8$

2. Pokażemy, że jeżeli własność jest prawdziwa dla pewnego $n \in N^+$, to jest też prawdziwa dla

$(n+1) \in N^+$

Jeżeli $8 \mid 11^n - 3^n$ to $8 \mid 11^{n+1} - 3^{n+1}$

Dowód:

Z faktu, że $8 \mid 11^n - 3^n$ wynika, że $11^n - 3^n = 8k,\ gdzie\ \ k \in N^+$

$11^{n+1} - 3^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 3 \cdot 3^n = (8+3) \cdot 11^n - 3 \cdot 3^n = 8 \cdot 11^n + 3 \cdot 11^n - 3 \cdot 3^n =$

$= 8 \cdot 11^n + 3 \cdot (11^n - 3^n) = 8 \cdot 11^n + 3 \cdot 8k = 8 \cdot (11^n + 3 \cdot k)$

Zatem $8 \mid 11^{n+1} - 3^{n+1}$ ■

Zad. 2.4.2

Udowodnij, że dla każdego $n \in N^+$

a) $9^n - 1$ jest wielokrotnością liczby 8

b) $10^n - 4$ jest wielokrotnością liczby 6

c) $2^{2n+3} - 3^{2n+1}$ jest podzielne przez 5

d) $3^{4n+2} + 1$ jest podzielne przez 10

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.5 Dowody dotyczące podzielności liczb oraz dzielenia z resztą

W dowodach dotyczących podzielności liczb wykorzystujemy między innymi kilka podstawowych własności:
a) liczbę podzielną przez 3 zapisujemy jako $3k,\ \ gdzie\ k \in Z$, liczbę podzielną przez 4 zapisujemy jako $4k,\ \ gdzie\ k \in Z$ itd.
b) liczbę nieparzystą możemy zapisać jako $2k+1,\ \ gdzie\ k \in N$,
c) iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez 2, iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez 3, iloczyn czerech kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez 24, itd.
d) liczbę, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 możemy zapisać $3k+1,\ \ gdzie\ k \in Z$, liczbę, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2 możemy zapisać $3k+2,\ \ gdzie\ k \in Z$, itd.

DOWÓD 35	P	Wykaż, że suma pięciu kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 5.
DOWÓD 36	P	Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 6.
DOWÓD 37	P	Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych powiększona o 1 jest podzielna przez 12.
DOWÓD 38	R	Wykaż, że suma kwadratów dwóch liczb całkowitych różniących się o siedem powiększona o 1 jest liczbą parzystą.
DOWÓD 39	P	Udowodnij, że wyrażenie $(4n+1)^2-(4m-1)^2$ jest podzielne przez 8, jeśli m, n należą do liczb naturalnych.
DOWÓD 40	P	Wykaż, że liczba $8^{1000}-5\cdot 8^{999}+3\cdot 8^{998}$ jest podzielna przez 27.
DOWÓD 41	P	Wykaż, że suma $999+999^2+999^3+999^4+999^5+999^6+999^7+999^8$ jest podzielna przez 1000.
DOWÓD 42	P	Wykaż, że wyrażenie $103+103^2+103^3+\ldots+103^{18}$ jest podzielne przez 10 712.
DOWÓD 43	P	Wykaż, że wyrażenie $9+9^2+9^3+\ldots+9^{99}$ jest podzielne przez 13.
DOWÓD 44	P	Wykaż, że liczba $5^{10}+2\cdot 5^9+5^8$ jest podzielna przez 36.
DOWÓD 45	R	Wykaż, że wyrażenie $5^n+5^{n+1}+5^{n+2}+5^{n+3}$ jest podzielne przez 195, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

DOWÓD 46	R	Uzasadnij, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej n liczba $4^{n+2}+4\cdot 5^{n+1}+4^{n+1}$ jest wielokrotnością liczby 20.
DOWÓD 47	R	Wykaż, że liczba $5^{16}-2^{16}$ jest podzielna przez 29.
DOWÓD 48	R	Wykaż, że liczba 1007^3+993^3 jest podzielna przez 1000.
DOWÓD 49	R	Wykaż, że wyrażenie 6^9-5^9 jest podzielne przez 91.
DOWÓD 50	R	Wykaż, że wyrażenie $(n^2+n)(n^2-3n+2)$ jest podzielne przez 24 dla każdej liczby całkowitej n.
DOWÓD 51	R	Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48.
DOWÓD 52	R	Wykaż, że wyrażenie $n^2k^2-nk^2+kn^2-kn$ jest podzielne przez 4, jeśli $n\in\mathbb{C}$ i $k\in\mathbb{C}$.
DOWÓD 53	R	Wykaż, że kwadrat iloczynu dwóch kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez 5 jest podzielny przez 2500.
DOWÓD 54	R	Wykaż, że dla $n\in\mathbb{N}$ wyrażenie $n^5-5n^4+5n^3+5n^2-6n$ jest wielokrotnością 5!.
DOWÓD 65	P	Wykaż, że iloczyn $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 11\cdot 12$ jest podzielny przez 2^{10}.
DOWÓD 66	R	Dana jest liczba p taka, że liczba $p-3$ jest podzielna przez 7. Wykaż, że liczba p^2+5 też jest podzielna przez 7.
DOWÓD 67	R	Wykaż, że liczba $4^{202}+2\cdot 4^{101}\cdot 6^{101}+6^{202}$ jest podzielna przez 100.
DOWÓD 68	R	Wykaż, że nie istnieje wielomian $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki: $W(1)=5$ i $W(-1)=4$.
DOWÓD 75	P	Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb parzystych przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4.
DOWÓD 76	P	Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych przy dzieleniu przez 12 daje resztę 11.
DOWÓD 77	P	Wykaż, że kwadrat sumy dwóch liczb całkowitych różniących się o 11 przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.
DOWÓD 78	P	Wykaż, że każda liczba całkowita p, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby p^2 przez 7 również jest równa 1.
DOWÓD 79	P	Wykaż, że jeżeli liczba całkowita nie dzieli się przez 4, to kwadrat tej liczby przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 1.
DOWÓD 80	P	Dana jest liczba p, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 1, i liczba q, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest wielokrotnością 5.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.6 Dowody z wykazywaniem, że liczba lub wyrażenie spełnia określone warunki

W tych dowodach wykorzystujemy wzory skróconego mnożenia, własności działań na potęgach i pierwiastkach, własności logarytmów, oraz własności dotyczące odejmowania ułamków:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \qquad \frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \qquad \frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$$

dla $n \in N^+$ $k \in N^+$

DOWÓD 105 **P** Wykaż, że liczba $a = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{12}}{\sqrt{13}-\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{12}}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}$ jest liczbą naturalną parzystą.

DOWÓD 106 **P** Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

DOWÓD 107 **P** Wykaż, że liczba $\frac{1008^2 - 1007^2 + 1006^2 - 1005^2 + 1004^2 - 1003^2 + 1002^2 - 1001^2}{1005^2 - 1004^2}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

DOWÓD 108 **P** Wykaż, że liczba $\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2024}\right)\left(1-\frac{1}{2025}\right)}}$ jest wielokrotnością liczby 9.

DOWÓD 109 **P** Wykaż, że $\frac{100^{50}-1}{10^{50}+1}$ jest liczbą całkowitą.

DOWÓD 110 **R** Wykaż, że liczba $\frac{77^6 - 23^6}{79^2 - 29^2}$ jest liczbą całkowitą.

DOWÓD 111 **R** Wykaż, że liczba $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{30 + 10\sqrt{5}}$ jest sześcianem liczby pierwszej.

DOWÓD 112 **R** Wykaż, że $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = 2$.

DOWÓD 113 **R** Wykaż, że $\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} = 3$.

DOWÓD 114 **R** Wykaż, że liczba $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$ jest liczbą pierwszą.

DOWÓD 115 **R** Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \ldots}}} = 3$.

DOWÓD 116 **R** Uzasadnij, że liczba $\frac{10^n + 5}{15}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest liczbą całkowitą.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

DOWÓD 117	R	Wykaż, że liczba $\frac{n^6-2n^4+n^2}{36}$ jest kwadratem liczby całkowitej, gdy $n \in \mathbb{C}$.
DOWÓD 118	P	Wykaż, że $625^{125} < 125^{250}$.
DOWÓD 119	P	Wykaż, że $12^{120} > 5^{180}$.
DOWÓD 120	P	Wykaż, że $10^{25} > 25^{10}$.
DOWÓD 121	R	Wykaż, że jeżeli $A = 5^{5+2\sqrt{3}}$ i $B = 25^{2\sqrt{3}+3}$, to $A = 25\sqrt{B}$.
DOWÓD 122	R	Wykaż, że $\log_2 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 16 \cdot \log_{16} 32 \cdot \log_{32} 64 = 3!$.
DOWÓD 123	R	Wykaż, że $\log_4 15 \cdot \log_{225} 8 = \frac{3}{4}$.
DOWÓD 124	R	Wykaż, że $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5^{-3}} - 16^{\log_4 3} = 116$.
DOWÓD 125	R	Wiedząc, że jeśli $a = \log_2 5$, to $\frac{3a}{1+2a} = \log_{50} 125$.
DOWÓD 126	R	Wykaż, że liczba $\frac{20}{1\cdot 2} + \frac{20}{2\cdot 3} + \frac{20}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{20}{19\cdot 20}$ jest liczbą pierwszą.
DOWÓD 127	R	Wykaż, że $\left(\frac{1}{2025\cdot 2026} + \frac{1}{2026\cdot 2027} + \frac{1}{2027\cdot 2028} + \frac{1}{2028}\right)^{-2}$ jest czwartą potęgą liczby naturalnej.
DOWÓD 128	R	Wykaż, że jeśli $\frac{1}{96}\left(\frac{1}{97}\left(\frac{1}{98}\left(\frac{1}{99}\left(\frac{1}{100}n + \frac{99}{100}\right) + \frac{98}{99}\right) + \frac{97}{98}\right) + \frac{96}{97}\right) = \frac{1}{96}$, to n jest liczbą naturalną.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.7 Dowody z wykazywaniem prawdziwości równań

DOWÓD 138 R

Wykaż, że jeżeli $x + y = 1$, to $x^3 + y^3 + 3xy = x + y$.

DOWÓD 139 R

Wykaż, że $\frac{(n+1)! + (n+2)! + (n+3)!}{(n+3)^2} = (n+1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

DOWÓD 140 R

Wykaż, że dla $a \in \mathbb{R}_+$ i $a \neq 1$ oraz dla $b \in \mathbb{R}_+$ i $b \neq 1$ prawdziwe jest równanie $\log_a(ab) \cdot \log_b\left(\frac{b}{a}\right) = \log_b(ab) \cdot \log_a\left(\frac{b}{a}\right)$.

DOWÓD 141 P

Uzasadnij, że jeżeli p jest liczbą rzeczywistą różną od zera i $p + \frac{1}{p} = 5$, to $p^2 + \frac{1}{p^2} = 23$.

DOWÓD 142 R

Udowodnij, że jeżeli $n + \frac{1}{n} = 4$, to $n^4 + \frac{1}{n^4} = 194$.

DOWÓD 143 R

Uzasadnij, że jeżeli $x + y = 3$ i $x^2 + y^2 = 5$, to $x^3 + y^3 = 9$.

DOWÓD 144 R

Wykaż, że jeśli $n \in (1;\infty)$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to równanie $\frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_4 n} + \frac{1}{\log_6 n} + \ldots + \frac{1}{\log_{2n-2} n} + \frac{1}{\log_{2n} n} = n\log_n 2 + \log_n n!$ jest prawdziwe.

DOWÓD 145 R

Wykaż, że jeśli $ab + 2 = -\frac{1}{ab}$ dla $ab \neq 0$, to $ab = -1$.

DOWÓD 146 R

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2. Wykaż, że:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.8 Dowody z wykazywaniem nierówności

W tych dowodach oprócz stosowania wzorów skróconego mnożenia często wykorzystuje się fakt, że kwadrat sumy lub różnicy dwóch dowolnych liczb rzeczywistych jest wyrażeniem nieujemnym, czyli

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad oraz \quad (x+y)^2 \geq 0 \;\; dla\ każdego\ x, y \in R$$

Warto również pamiętać o zależnościach między średnimi: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad gdzie\ a>0 \quad i \quad b>0$$

Pomocne mogą być również inne zależności wynikające z powyższych nierówności

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad a^2+b^2 \geq 2ab$$

DOWÓD 194 | **P** | Wykaż, że dla każdego a należącego do liczb rzeczywistych $4a(a+5) \geq 8a-9$.

DOWÓD 195 | **P** | Wykaż, że dla każdego $a>0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{a^2+2}{a} \geq \frac{a+4}{2}$.

DOWÓD 196 | **P** | Wykaż, że wyrażenie $p^2 \leq \frac{p^4+1}{2}$ jest prawdziwe dla każdej liczby rzeczywistej p.

DOWÓD 197 | **P** | Wykaż, że wyrażenie $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{2\sqrt{ab}}$ jest prawdziwe dla $a \in \mathbb{R}_+$ i $b \in \mathbb{R}_+$.

DOWÓD 198 | **R** | Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich k, l, m, n prawdziwa jest nierówność $k^2m^2+l^2n^2 \leq \sqrt{k^4+l^4} \cdot \sqrt{m^4+n^4}$.

DOWÓD 199 | **R** | Wykaż, że nierówność $\sqrt[6]{\frac{a^6+b^6}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b.

DOWÓD 200 | **P** | Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność $10x^2+6xy+2y^2 \geq 0$.

DOWÓD 201 | **P** | Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwa jest nierówność $a^2+b^2-4a+2b+6>0$.

DOWÓD 202 | **R** | Wykaż, że dla dowolnych x i y wyrażenie $x^2+y^2 \geq xy$ jest prawdziwe.

DOWÓD 203 | **R** | Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność $x^6+x^4+2x^3+x^2+2>0$ jest prawdziwa.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

DOWÓD 204	R	Udowodnij, że jeżeli $a + 2b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + 8b^3 \geq 2a^2b + 4ab^2$.
DOWÓD 205	R	Wykaż, że dla $x \in (0; 1)$ prawdziwa jest nierówność $8(1 + 2\log_x 10) \leq \log\frac{1}{x}$.
DOWÓD 206	R	Udowodnij, że jeśli $xy = 2$ oraz jeśli $x > 0$ i $y > 0$, to $(x+1)(y+2) \geq 8$.
DOWÓD 207	R	Wykaż, że nierówność $\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right) + \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b}{a}\right) \geq 4$ jest spełniona dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a i b.
DOWÓD 208	R	Uzasadnij, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to $\frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a} + \frac{2ac}{b} \geq 2a + 2b + 2c$.
DOWÓD 209	R	Udowodnij, że jeśli $a + b + c = 1$, gdzie liczby a, b, c są dodatnie, to $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.
DOWÓD 210	R	Wykaż, że dla każdego $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ nierówność $\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(a+d)(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}} \geq 64abcd$.
DOWÓD 211	R	Wykaż, że dla każdego $a, b, c \in \mathbb{R}$ nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ jest prawdziwa.
DOWÓD 212	R	Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b, gdzie $a \neq b$, nierówność $\frac{2a^2 + 3ab + 5b^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 1$ jest prawdziwa.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020