Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły:

III Liceum Ogólnokształcącego im. św. Jana Kantego

Tytuł zajęć

„Zajęcia wyrównawcze z matematyki – zakres rozszerzony klasa maturalna"

Autor opracowania

Violetta Lewandowska

Niniejszy skrypt powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:
„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań*"

Poznań 2021

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Liczby rzeczywiste	2
2.	Wyrażenia algebraiczne, równania, nierówności i ich układy	3
3.	Funkcja, funkcja liniowa i kwadratowa	3
4.	Wielomiany, funkcja wymierna	3
5.	Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne	2
6.	Ciągi	3
7.	Rachunek różniczkowy	3
8.	Trygonometria	2
9.	Planimetria	3
10.	Geometria analityczna	2
11.	Stereometria	2
12.	Prawdopodobieństwo i statystyka	2
Łączna liczba godzin		30

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

I. LICZBY RZECZYWISTE

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0 . Dla dowolnej liczby x mamy:

a) $|x| \geqslant 0$
b) $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$
c) $|-x| = |x|$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

a) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
b) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$
c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geqslant 0$ mamy:

$|x - a| \leqslant r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - r \leqslant x \leqslant a + r$

$|x - a| \geqslant r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant a - r$ lub $x \geqslant a + r$

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ raxy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy liczbę $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$.
W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.
Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją w zbiorze liczb rzeczywistych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$- \text{dla } a \neq 0: \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ oraz } a^0 = 1$$
$$- \text{dla } a \geqslant 0: \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$- \text{dla } a > 0: \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

<u>Logarytmem</u> $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać c
:

$$\log_a c = b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^b = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0, y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_{(a^n)}(x) = \frac{1}{p}\log_a x, p \in \mathrm{R} \setminus \{0\} \qquad \log_a a^x = x, \qquad a^{\log_a x} = x$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Logarytm $\log_{10} x$ można też zapisać jako $\log x$ lub $\lg x$.

PRZYKŁADY

1.1. Uzasadnij, że jeśli $a = 0.5^{-2.25}, b = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}$, to $a = 4b$.

Rozwiązanie:

$$a = 0.5^{-2.25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2.25} = (2^{-1})^{-2.25} = 2^{2.25} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 4 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 4b$$

$$b = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \left((2^3)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}$$

Zatem: $a = 4b$

1.2. Oblicz: $\sqrt[3]{\frac{27^6+9^{15}}{27^8+9^6}}=$

Rozwiązanie:

$$\sqrt[3]{\frac{27^6 + 9^{15}}{27^8 + 9^6}} = \sqrt[3]{\frac{(3^3)^6 + (3^2)^{15}}{(3^3)^8 + (3^2)^6}} = \sqrt[3]{\frac{3^{18} + 3^{30}}{3^{24} + 3^{12}}} = \sqrt[3]{\frac{3^{18} \cdot (1 + 3^{12})}{3^{12} \cdot (1 + 3^{12})}} = \sqrt[3]{\frac{3^{18}}{3^{12}}} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

1.3. Oblicz: $\frac{4^{10} \cdot 3^7 + 12^8 \cdot 2^3}{8^3 \cdot 9^4 + 12^5 \cdot 3^2}=$

Rozwiązanie:

$$\frac{(2^2)^{10} \cdot 3^7 + (3 \cdot 2^2)^8 \cdot 2^3}{(2^3)^3 \cdot (3^2)^4 + (3^6 \cdot 2^2)^{15} \cdot 3^2} = \frac{2^{20} \cdot 3^7 + 3^8 \cdot (2^2)^8 \cdot 2^3}{2^9 \cdot 3^8 + 3^5 \cdot (2^2)^5 \cdot 3^2} =$$

$$= \frac{2^{20} \cdot 3^7 + 3^8 \cdot 2^{16} \cdot 2^3}{2^9 \cdot 3^8 + 3^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^2} = \frac{2^{20} \cdot 3^7 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 3^8}{2^8 + 2^{10} \cdot 3^7} = \frac{2^{19} \cdot 3^7(2^1 + 3^1)}{2^9 \cdot 3^7(3^1 + 2^1)} =$$

$$= \frac{2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5}{2^9 \cdot 3^7 \cdot 5} = \frac{2^{19}}{2^9} = 2^{10}$$

1.4. Niech $x^2 = 7^3, y^3 = 7^4$, $z^6 = 7^5$. Oblicz wartość wyrażenia: $\left(\frac{x \cdot y}{z^4}\right)^{24}$

Rozwiązanie:

$$\left(\frac{x \cdot y}{z^4}\right)^{24} = \frac{(x \cdot y)^{24}}{z^{24}} = \frac{x^{24} \cdot y^{24}}{z^{24}} = \frac{(x^2)^{12} \cdot (y^3)^8}{(z^6)^4}$$

$$= \frac{(7^3)^{12} \cdot (7^4)^8}{(7^5)^4} = \frac{7^{36} \cdot 7^{32}}{7^{20}} = \frac{7^{68}}{7^{20}} = 7^{68-20} = 7^{48}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1.5. Oblicz: $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$

Rozwiązanie:

$$7+4\sqrt{3}=3+2\cdot 2\sqrt{3}+4=\left(\sqrt{3}+2\right)^2=\left|\sqrt{3}+2\right|=\sqrt{3}+2$$

analogicznie

$$7-4\sqrt{3}=3-2\cdot 2\sqrt{3}+4=\left(\sqrt{3}-2\right)^2=\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=-\sqrt{3}+2$$

Otrzymaliśmy

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2=4$$

1.6. Wykaż, że dla $x\in(2;3)$ zachodzi równość $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a}+\frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2}=2$

Rozwiązanie:

$$\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a}+\frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2}=\frac{(a-3)^2}{3-a}+\frac{(a-2)^2}{a-2}=\frac{|a-3|}{3-a}+\frac{|a-2|}{a-2}=\frac{-(a-3)}{3-a}+\frac{(a-2)}{a-2}=1+1=2$$

1.7. Usuń niewymierność: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\cdot\sqrt{6}+3-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{6}}{12}=$$

$$=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

1.8. Doprowadź do najprostszej postaci $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, założenie $a,b\in Z$

Rozwiązanie:

$$2+\sqrt{5}=\frac{8}{8}\left(2+\sqrt{5}\right)=\frac{16+8\sqrt{5}}{8}=\frac{(a+b\sqrt{5})^3}{2^3}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{5})^3 &= a^3+3a^2(b\sqrt{5})+3a(b\sqrt{5})^2+(b\sqrt{5})^3\\ &= a^3+3a^2\left(b\sqrt{5}\right)+3a(5b^2)+b^3\left(5\sqrt{5}\right)\\ &= a^3+(3a^2b)\sqrt{5}+15ab^2+(5b^3)\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$(a+b\sqrt{5})^3=(a^3+15ab^2)+(3a^2b+5b^3)\sqrt{5}$$

$$(a+b\sqrt{5})^3=16+8\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}a^3+15ab^2&=16\\ 3a^2b+5b^3&=8\end{aligned}$$

a więc
$$a=1$$
$$b=1$$

$$2+\sqrt{5}=\frac{8}{8}\left(2+\sqrt{5}\right)=\frac{16+8\sqrt{5}}{8}=\frac{(a+b\sqrt{5})^3}{2^3}$$

$$2+\sqrt{5}=\frac{(1+1\sqrt{5})^3}{2^3}$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}\Rightarrow\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1.9. Wykaż, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17 .

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}6^{98}(6^2-2\cdot 6^1+10\cdot 1)&=6^{98}(36-12+10)=\\ &=6^{98}(34)=(6^{98}\cdot 2\cdot 17)=\\ &17\cdot\ 6^{98}\ \cdot 2\quad (6^{98}\ \cdot 2\in Z)\end{aligned}$$

Co oznacza, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.
To kończy dowód

1.10. Wykaż, że liczba $3^{16}-2^{16}$ jest podzielna przez 13 .

Rozwiązanie:

$3^{16}-2^{16}=(3^8)^2-(2^8)^2=(3^8-2^8)(3^8+2^8)=$
$((3^4)^2-(2^4)^2)(3^8+2^8)=$
$(3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)=$
$((3^2)^2-(2^2)^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)=$
$(3^2+2^2)(3^2-2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)=$

$(9+4)(3^2-2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)=$
$13(3^2-2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$. Widzimy, że $(3^2-2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)\in Z$

Co oznacza, że liczba $3^{16}-2^{16}$ jest podzielna przez 13.
To kończy dowód

1.11. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$

Rozwiązanie:

Podnosimy nierówność stronami do kwadratu, ponieważ obie strony są dodatnie.

Otrzymujemy

$$2^{50}-1+2^{50}+1+2\sqrt{(2^{50}-1)(2^{50}+1)}<2^{52}$$
$$2\cdot 2^{50}+2\sqrt{2^{100}-1}<4\cdot 2^{50}$$
$$2\sqrt{2^{100}-1}<2\cdot 2^{50}\ /:2$$
$$\sqrt{2^{100}-1}<2^{50}$$

Analogicznie

$$2^{100}-1<2^{100}$$
$$0<1$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa. Ponieważ w wyniku przekształceń otrzymywaliśmy nierówności równoważne, dowodzi to prawdziwości wyjściowej nierówności.

1.12. Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 6 jest równa 1 . Reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 6 jest równa 5 . Uzasadnij, że liczba a^2-b^2 jest podzielna przez 24 .

Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 , więc $a=6k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.
Ponieważ liczba b przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5 , więc $b=6l+5$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.
Wtedy $a^2-b^2=(6k+1)^2-(6l+5)^2=(6k+6l+6)(6k-6l-4)=$
$12(k+l+1)(3k-3l-2)$
Wykazaliśmy, że liczba a^2-b^2 jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $k+l+1$ lub $3k-3l-2$ jest podzielna przez 2 .
Jeśli liczby calkowite k i l są jednocześnie parzyste, to liczba $k-l$ jest parzysta oraz liczba $3k-3l-2=3(k-l)-2$ jest parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych.

Jeśli liczby całkowite k i l są nie są jednocześnie parzyste, to liczba $k+l+1$ jest parzysta, jako suma dwóch liczb nieparzystych i jednej parzystej. To kończy dowód.
II sposób
Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 , więc $a=6k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.
Ponieważ liczba b przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5 , więc $b=6l-1$, gdzie l jest liczbą calkowitą nieujemną.
Wtedy $a^2-b^2=(6k+1)^2-(6l-1)^2=(6k+6l)(6k-6l+2)=$
$$12(k+l)(3k-3l+1).$$
Wykazaliśmy, że liczba a^2-b^2 jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $k+l$ lub $3k-3l+1$ jest podzielna przez 2 . Jeśli liczby catkowite k i l są jednocześnie parzyste, to liczba $k+l$ jest parzysta. Jeśli liczby całkowite k i l nie są jednocześnie parzyste, to liczba $k-l$ jest nieparzysta, więc liczba $3k-3l+1=3(k-l)+1$ jest parzysta. To kończy dowód.

1.13. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie:

Iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l$ (l jest liczbą całkowita), to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+1$, to czynnik $(k+9)=5l+10=5(l+2)$ jest podzielny przez 5 .
Jeżeli $k=5l+2$, to czynnik $(k^2+1)=25l^2+20l+4+1=5(5l^2+4l+1)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+3$, to czynnik $(k^2+1)=25l^2+30l+9+1=5(5l^2+6+2)$ jest podzielny przez 5
Jeżeli $k=5l+4$, to czynnik $(k+1)=5l+4+1=5(l+1)$ jest podzielny przez 5

1.14. Oblicz: $\log_{\sqrt{2\sqrt{2}}}\left(\frac{4\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}\right)$

Rozwiązanie:

$$\log_{\sqrt{2\sqrt{2}}}\left(\frac{4\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}\right) = \log_{\sqrt{2\sqrt{2}}}\left(\frac{2^2\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\log_2\left(\frac{2^2\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2}}\right)}{\log_2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\log_2\left(2^2\sqrt{2^3}\right)-\log_2\sqrt[3]{2}}{\frac{1}{2}\log_2(2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\log_2 2^2+\log_2\sqrt{2^3}-\frac{1}{3}\log_2 2}{\frac{1}{2}\left(\log_2 2+\log_2\sqrt{2}\right)} = \frac{2+\frac{3}{2}\log_2 2-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{38}{9}$$

1.15. Oblicz: $\log_{5\sqrt{\frac{7\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}}}\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$

Rozwiązanie:

$$\log_{5\sqrt{\frac{7\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}}}\sqrt[3]{7\sqrt{7}}=\frac{\log_7\sqrt[3]{7\sqrt{7}}}{\log_7\sqrt[5]{\frac{7\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}}}=\frac{\frac{1}{3}\log_7(7\sqrt{7})}{\frac{1}{5}\log_7\frac{7\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}}=\frac{5\log_7(7\sqrt{7})}{3\log_7\frac{7\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}}$$

$$=\frac{5\left(\log_7 7+\log_7\sqrt{7}\right)}{3\left(\log_7 7+\log_7\sqrt[3]{7}-\log_7\sqrt{7}\right)}=\frac{5\left(1+\frac{1}{2}\right)}{3\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}=3$$

1.16. Wykaż, że $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=1$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\log_4 9=\frac{\log_5 9}{\log_5 4}=\frac{\log_5 3^2}{\log_5 2^2}=\frac{2\log_5 3}{2\log_5 2}=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

Stąd

$$\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=\log_3 5\cdot\frac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\log_5 2=\log_3 5\cdot\log_5 3$$

Korzystając ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

stwierdzamy, że

$$\log_3 5\cdot\log_5 3=1$$

1.17. Niech $m=\log_{21}7$. Wykaż, że $\log_7 27=\frac{3(1-m)}{m}$.

Rozwiązanie:
(I sposób)
Zauważmy, że $\log_7 21=\frac{1}{\log_{21}7}=\frac{1}{m}$.

Zatem

$$\log_7 27 = \log_7 3^3 = 3\log_7 3 = 3\log_7\left(\frac{21}{7}\right) = 3(\log_7 21 - \log_7 7) = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3\cdot\frac{1-m}{m}$$

To kończy dowód

.

(II sposób)

Zauważamy, że

$$\frac{3(1-m)}{m} = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3(\log_7 2\,1 - 1) = 3(\log_7 2\,1 - \log_7 7) = 3\log_7\frac{21}{7} = \log_7 3^3$$

$$= \log_7 2\,7$$

co kończy dowód.

1.18. Dane są liczby $a = \left(\log_{\sqrt{5}} 2\right)\cdot\log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$. Oblicz a^{b+1}

Rozwiązanie:

Obliczamy a oraz b z wykorzystaniem wzoru na zamianę podstawy logarytmu:

$$a = \log_{\sqrt{5}} 2\cdot\log_2 25 = \frac{\log_2 2}{\log_2\sqrt{5}}\cdot 2\log_2 5 = \frac{\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 5}\cdot 2\log_2 5 = 4$$

$$b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8} = \log_8 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 8} = \frac{1}{3}\log_2 6 = \log_2\sqrt[3]{6}$$

Obliczamy a^{b+1} :

$$a^{b+1} = 4^{\log_2\sqrt[3]{6}+1} = 4^{\log_2\sqrt[3]{6}}\cdot 4^1 = 2^{2\log_2\sqrt[3]{6}}\cdot 4 = 2^{\log_2\sqrt[3]{36}}\cdot 4 = 4\sqrt[3]{36}$$

1.19. Niech log_2 18= c. Wykaż, że log_3 4=$\frac{4}{c-1}$

Rozwiązanie:

Przekształcamy wyrażenie $\log_3 4$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$$

Aby doprowadzić do uzyskania w liczniku liczby 4 , mnożymy licznik i mianownik ułamka przez 2.

Otrzymujemy:

$$\frac{2 \cdot \log_2 4}{2 \cdot \log_2 3} = \frac{2 \cdot \log_2 4}{\log_2 9} = \frac{4}{\log_2 9}$$

Stosujemy wzór na różnicę logarytmów o tych samych podstawach i otrzymujemy:

$$\frac{4}{\log_2 9} = \frac{4}{\log_2 \frac{18}{2}} = \frac{4}{\log_2 18 - \log_2 2} = \frac{4}{c-1}$$

Zatem $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$.

II. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI I ICH UKŁADY

Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a, b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$

Równania i nierówności kwadratowe
Rozwiązanie równania $ax^2 + bx + c = 0$ jest tożsame z wyznaczeniem miejsc zerowych funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$
Do rozwiązywania nierówności zastosujemy metodę graficzną.

Wzory Viète'a.
Dla pierwiastków równania trójmianu kwadratowego (miejsc zerowych trójmianu $y = ax^2 + bx + c$) zachodzą wzory

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Gdy $\Delta \geq 0$, wówczas pierwiastki x_1, x_2 trójmianu kwadratowego
- są tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$;
- są przeciwnych znaków wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$

Gdy $\Delta > 0$, wówczas pierwiastki x_1, x_2 trójmianu kwadratowego:

- oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$
i $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$;
- oba pierwiastki są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ i $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$

Równanie dwukwadratowe.
Równaniem dwukwadratowym nazywamy równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a \neq 0$.
Równanie to sprowadza się do równania kwadratowego za pomocą podstawienia $t = x^2$

Wielomianem stopnia n ($n \in \mathbb{N}$) jednej zmiennej rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$.
Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami liczbowymi wielomianu.

Stopień wielomianu to najwyższy wykładnik potęgi, w jakiej występuje niewiadoma, oznaczamy go symbolem st. $[W(x)]$.
Jeżeli $n = 0$ i $a_0 \neq 0$ to taki wielomian nazywamy wielomianem stopnia zerowego, np. $W(x) = 7$.
Jeżeli natomiast $n = 0$ i $a_0 = 0 (\text{tzn.}\, W(x) \equiv 0)$ to taki wielomian nazywamy wielomianem zerowym. Taki wielomian nie ma określonego stopnia.

Dwa wielomiany są równe, wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Jeżeli $W(r) = 0$, to liczbę r nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ $(r \in R)$

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy przedstawić go w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Wyrażeniem wymiernym jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami jednej zmiennej i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Dziedziną wyrażenia wymiernego nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jest określona wartość liczbowa tego wyrażenia.

$$D = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge P(x) \neq 0\}$$

Dwa wyrażenia wymierne są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe dziedziny i przyjmują takie same wartości dla wszystkich argumentów.

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad *$$

przy czym zakładamy, że $a^2 + b^2 > 0$ oraz $c^2 + d^2 > 0$.
Rozwiązaniem układu nazywamy każda parę liczb (x_0, y_0) taka, że dla $x = x_0$ i $y = y_0$ oba równania sa spełnione
Układ równań może mieć:

- dokładnie jedno rozwiązanie (jedną parę (x_0, y_0)) - układ oznaczony,
- nieskończenie wiele rozwiązań - układ nieoznaczony
- brak rozwiązań. - układ sprzeczny .

Wyznacznikiem stopnia drugiego utworzonym z liczb a, b, c, d nazywamy liczbę postaci

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Układ równań *) jest:

- oznaczony, gdy wyznacznik układu $W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ czyli, gdy $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$.

Rozwiązaniem układu *) jest wtedy para liczb (x_0, y_0),
$x_0 = \frac{W_x}{W}$, $y_0 = \frac{W_y}{W}$, gdzie $W_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ oraz $W_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

- nieoznaczony, gdy $W = 0$, $W_x = 0$, $W_y = 0$, $(\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f})$,
- sprzeczny, gdy W $= 0$ oraz $W_x \neq 0$, $W_y \neq 0$, $\left(\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\right.$ oraz $\frac{a}{c} \neq \frac{e}{f}$ lub $\left.\frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}\right)$

PRZYKŁADY

2.1. Rozwiąż równanie $3|x+2| = |x-3| + 11$.

Rozwiązanie:

Rozważamy cztery przypadki $1) \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$, $2) \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$, $3) \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$, $4) \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$.

W pierwszym przypadku: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ otrzymujemy równanie $3x + 6 = x - 3 + 11$, a stąd $x = 1$
Liczba ta nie spełnia drugiej nierówności układu, więc nie jest rozwiązaniem podanego równania.
W drugim przypadku: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ otrzymujemy równanie $3x + 6 = -x + 3 + 11$, a stąd $x = 2$.
Liczba ta spełnia obie nierówności układu, więc jest rozwiązaniem podanego równania.
W trzecim przypadku: $\begin{cases} x+2 < 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ otrzymujemy sprzeczność, ponieważ żadna liczba nie spełnia jednocześnie dwóch warunków: $x < -2$ i $x \geq 3$.
W czwartym przypadku: $\begin{cases} x+2 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ otrzymujemy równanie $-3x - 6 = -x + 3 + 11$, a stąd $x = -10$. Liczba ta spełnia obie nierówności ostatniego układu, więc jest rozwiązaniem równania.
Podane równanie ma zatem dwa rozwiązania $x = -10$ i $x = 2$.

2.2. Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2+2a=4b^2=4b$. Wykaż, że $a=2b$.

Rozwiązanie:

I sposób
Zapisujemy równanie równoważne równaniu z założenia: $a^2 + 2a + 1 = 4b^2 + 4b + 1$.
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy to równanie w postaci $(a+1)^2 = (2b+1)^2$. Oba wyrażenia w nawiasach są dodatnie, zatem równość kwadratów jest równoważna równości tych wyrażeń, stąd $a + 1 = 2b + 1$ i dalej, $a = 2b$.
To kończy dowód.

II sposób
Przekształcamy założenie równoważnie:

$$a^2 - 4b^2 = 4b - 2a$$
$$(a-2b)(a+2b) = -2(a-2b)$$
$$(a-2b)(a+2b+2) = 0$$

Liczby a i b są dodatnie, zatem $a+2b+2\neq 0$. Stąd $a-2b=0$, czyli $a=2b$.
To kończy dowód.

2.3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$

$3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x^2 - 2x - 4 > 0$
$3(x - y)^2 + 2x^2 - 2x - 4 > 0$

$3(x - y)^2 + 2(x + 1)(x - 2) > 0$

Ponieważ $x > 2$, więc $2(x + 1)(x - 2) > 0$.

Zatem lewa strona rozpatrywanej nierówności jest sumą liczby nieujemnej $3(x - y)^2$ oraz liczby dodatniej $2(x + 1)(x - 2)$, a więc jest dodatnia.

To należało wykazać.

2.4. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich, że $x<y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność
$$\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2.$$

Rozwiązanie:

Nierówność możemy przekształcić w sposób równoważny

$$\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}-2>0,$$
$$\frac{x(x+a)+y(y+a)-2x(y+a)}{x(y+a)}>0$$
$$\frac{x^2+ax+y^2+ay-2xy-2ax}{x(y+a)}>0$$
$$\frac{(x-y)^2+a(y-x)}{x(y+a)}>0.$$

Z założenia $y>0, x>0$ i $a>0$. Zatem $y+a>0$ i $x>0$, co oznacza, że mianownik ułamka stojącego po lewej strony otrzymanej nierówności jest dodatni.
Kwadrat $(x-y)^2$ jest nieujemny, a z założenia $x<y$ wynika, że $y-x>0$, więc $a(y-x)>0$. Stąd licznik rozważanego ułamka jest dodatni. W rezultacie otrzymana nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.5. Wykaż, że jeżeli w prostopadłościanie a, b, c są długościami krawędzi wychodzącymi z jednego wierzchołka oraz d jest drugością przekątnej tego prostopadłościanu, to $\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} \leqslant d\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na długość przekątnej prostopadłościanu: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.
Pokażemy, że $(a + b + c)^2 \leqslant 3d^2$, co jest równoważne z tezą.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leqslant \\ &\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3d^2\end{aligned}$$

Równość ma miejsce dla $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c}$, czyli prostopadłościan jest sześcianem.
Uwaga
Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ to

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

średnia kwadratowa liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ to

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Rozumując tak, jak w przykładach 2. oraz 3., możemy udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ tzn. wykazać, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

2.6. Wykaż, że jeżeli $x + y = a$, to $x^2 + y^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$.
W szczególności, gdy $x + y = 1$, to $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Podnosimy obie strony równości $x + y = a$ do kwadratu i korzystamy z nierówności

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad a, b \in R$$

Otrzymujemy

$a^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + (x^2+y^2) + y^2 = 2(x^2+y^2)$,
stąd po podzieleniu obu stron nierówności przez 2 otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x = y = \frac{a}{2}$.

2.7. Wykaż, że jeżeli $x+y+z=a$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{a^2}{3}$.
W szczególności $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Podnosimy obie strony równości $x+y+z=a$ do kwadratu i korzystamy z nierówności

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab; \qquad a,b \in R.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} a^2 &= (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \leqslant \\ &\leqslant x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+(y^2+z^2) = 3(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

Stąd po podzieleniu obu stron nierówności przez 3 otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x=y=z=\frac{a}{3}$.

2.8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności $a^2+b^2 \geqslant 2ab;\ a,b \in R$ zapisujemy trzy razy nierówność

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy$$
$$x^2+z^2 \geqslant 2xz$$
$$y^2+z^2 \geqslant 2yz$$

po dodaniu stronami otrzymujemy $2(x^2+y^2+z^2) \geqslant 2(xy+xz+yz)$, a po podzieleniu obu stron przez 2 otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

2.9. Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami rzeczywistymi, dodatnimi, to

$$xy+yz+zx \geqslant x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$$

Rozwiązanie:
Zastosujemy nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab};\ \ a,b \in R$$

Dla uproszczenia dowodu pomnożymy obie strony tezy przez 2, przekształcimy lewą stronę otrzymanej nierówności i trzy razy

$$\begin{aligned} 2(xy+yz+zx) &= xy+xz+yx+yz+zx+zy = x(y+z)+y(x+z)+z(x+y) \geqslant \\ &\geqslant x \cdot 2\sqrt{yz} + y \cdot 2\sqrt{xz} + z \cdot 2\sqrt{xy} = 2(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}) \end{aligned}$$

Równość ma miejsce, gdy $x = y = z$.

2.10. Wykaż, że jeżeli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, dodatnimi, to

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geqslant 2\sqrt[4]{abcd}$$

Rozwiązanie:

Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymamy nierówność równoważną

$$(a+b)(c+d) \geqslant 4\sqrt{abcd}$$

Zastosujemy nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab};\ \ a,b \in R$$

Otrzymujemy $$\begin{aligned} a+b &\geqslant 2\sqrt{ab} \\ c+d &\geqslant 2\sqrt{cd} \end{aligned}$$

Po pomnożeniu tych nierówności stronami otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $a = b$ oraz $c = d$.

2.11. Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami rzeczywistymi, dodatnimi oraz $x + y = 16$, to $(1+x)(1+y) \leqslant 81$

Rozwiązanie:

Zastosujemy nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab};\ \ a,b \in R$$

Otrzymujemy

$$xy = (\sqrt{xy})^2 \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 64$$

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy

$$(1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy \leqslant 1 + 16 + 64 = 81$$

co należało wykazać.

2.12. Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) > 9$

Rozwiązanie:

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) &= 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1 = \\ &= 3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\end{aligned}$$

Zastosujemy nierówność

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}+\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \geqslant 2;\ ab > 0$$

Przekształcamy

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) \geqslant 3+2+2+2 = 9$$

I otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x = y = z$.

2.13. Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$xy(x+y-2z) + yz(y+z-2x) + xz(x+z-2y) \geqslant 0$$

Rozwiązanie:

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y)=$$
$$=xyz\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}-2+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-2+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-2\right)=$$
$$=xyz\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)\right)$$

Stosując do każdego z trzech nawiasów nierówność $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geqslant 0$, otrzymujemy tezę. Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

2.14. Oblicz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{30}$

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{30}$. Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$\left|\frac{3(2n-10)-2(3n+1)}{3(3n+1)}\right|<\frac{1}{30}$$
$$\left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right|<\frac{1}{30}$$
$$\frac{32}{3(3n+1)}<\frac{1}{30}$$
$$3n+1>320$$
$$n>106\frac{1}{3}$$

W powyższych przekształceniach dwukrotnie skorzystaliśmy z tego, że $3(3n+1)>0$. Zatem najmniejszą liczbą naturalną spełniającą podaną nierówność jest $n=107$.

2.15. Wielomian f jest określony wzorem $f(x)=ax^4-9x^3+3x^2+7x+b$ dla pewnych liczb pierwszych a oraz b. Wiadomo, że liczba $\frac{3}{2}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Oblicz a i b.

Rozwiązanie:

Korzystamy z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianów. Na mocy tego twierdzenia liczba 3 musi dzielić wyraz wolny, czyli b, a liczba 2 musi dzielić

współczynnik przy x^4, czyli a. Jednak jedyna liczba pierwsza podzielna przez 3 to 3, czyli $b = 3$. Podobnie, jedyna parzysta liczba pierwsza to 2, czyli $a = 2$.
Sprawdzamy,że liczba $\frac{3}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 7x + 3$$

A zatem

$$2 \cdot \frac{3^4}{2^4} - 9 \cdot \frac{3^3}{2^3} + 3 \cdot \frac{3^2}{2^2} + 7 \cdot \frac{3}{2} + 3 =$$
$$= \frac{3}{2^3}(27 - 81 + 18 + 28 + 8) = 0$$

Otrzymujemy $a = 2, b = 3$

2.16. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej m rozwiązania równania

$$x^2 + mx + m - 1 = 0$$

z niewiadomą x są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Obliczamy wyróżnik kwadratowy

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

Zatem $\sqrt{\Delta} = |m - 2| = \pm(m - 2)$ i pierwiastki są równe

$$x_1 = \frac{-m - m + 2}{2} = -m + 1$$
$$x_2 = \frac{-m + m - 2}{2} = -1$$

Widać, że skoro $m \in Z$ to każdy z tych pierwiastków jest liczbą całkowitą.

2.17. Wykaż, że układ równań

$$\begin{cases} 4a + 4b + 4c = 80 \\ 2ab + 2bc + 2ca = 256 \end{cases}$$

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że układ równań (1)-(2) ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 . Wtedy

$$\begin{cases} a+b+c=20 \\ ab+bc+ca=128 \end{cases}$$

Przekształcamy układ równań do postaci, w której otrzymamy równanie kwadratowe z niewiadomą a i parametrem c:

$$\begin{cases} b=20-a-c \\ a(20-a-c)+(20-a-c)c+ca=128 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b=20-a-c \\ -a^2+(-c+20)a+(-c^2+20c-128)=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b=20-a-c \\ a^2+(c-20)a+(c^2-20c+128)=0 \end{cases}$$

Równanie $a^2+(c-20)a+(c^2-20c+128)=0$ ma z założenia rozwiązanie, więc wyróżnik Δ_a jest nieujemny, co prowadzi do:

$$\Delta_a \geq 0$$
$$(c-20)^2-4(c^2-20c+128) \geq 0$$
$$-3c^2+40c-112 \geq 0$$
$$-3(c-4)\left(c-\frac{28}{3}\right) \geq 0$$
$$c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$$

Jeśli $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$, to funkcja $f(a)=a^2+(c-20)a+(c^2-20c+128)$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe (gdyz $\Delta_a \geq 0$).

Wykresem funkcji f jest parabola, której wierzchołek $W=(p,q)$ ma rzędną niedodatnią $q=-\frac{\Delta}{4}$

Odcięta $p=-\frac{c-20}{2} \in \left[\frac{16}{3}, 8\right]$, a ponadto $f(4)=c^2-16c+64=(c-8)^2 \geq 0$

Zatem f ma miejsce zerowe w zbiorze $[4,+\infty)$.

Podobnie argumentujemy, że funkcja $g(b)=b^2+(c-20)b+(c^2-20c+128)$ ma miejsce zerowe w przedziale $[4,+\infty)$.

Zatem układ (1)-(2) ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4.

2.18. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy układ (1) metodą podstawiania. Z pierwszego równania układu wyznaczamy y:

$$y = m^2 - mx$$

i wstawiamy do drugiego równania układu:

$$4x + m(m^2 - mx) = 8$$
$$(4 - m^2)x = 8 - m^3$$

Zatem układ jest oznaczony, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Wtedy

$$x = \frac{8 - m^3}{4 - m^2} = \frac{(2 - m)(4 + 2m + m^2)}{(2 - m)(2 + m)} = \frac{4 + 2m + m^2}{m + 2}$$

Stąd

$$y = m^2 - mx = m^2 - m \cdot \frac{m^2 + 2m + 4}{m + 2} = \frac{m^3 + 2m^2 - m(m^2 + 2m + 4)}{m + 2} = \frac{-4m}{m + 2}$$

Wyznaczamy wartości parametru m, dla których prawdziwa jest nierównosc $|x + y| < 2$:

$$\left|\frac{4 + 2m + m^2}{2 + m} + \frac{-4m}{m + 2}\right| < 2$$
$$\left|\frac{m^2 - 2m + 4}{m + 2}\right| < 2$$

$$\frac{m^2 - 2m + 4}{m + 2} > -2 \text{ i } \frac{m^2 - 2m + 4}{m + 2} < 2$$

$$\frac{m^2-2m+4}{m+2} + \frac{2m+4}{m+2} > 0 \text{ i } \frac{m^2-2m+4}{m+2} - \frac{2m+4}{m+2} < 0$$
$$\frac{m^2+8}{2+m} > 0 \text{ i } \frac{m^2-4m}{2+m} < 0$$

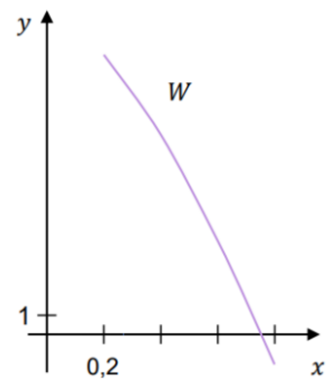
$(m^2+8)(m+2)>0$ i $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ i $(m^2-4m)(m+2)<0$ i $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

$m \in (-2{,}2) \cup (2,+\infty)$ i $m \in (-\infty,-2) \cup (0{,}2) \cup (2{,}4)$

co daje nam $m \in (0{,}2) \cup (2{,}4)$

2.19. Na diagramie obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem $W(x) = 4x^3 - 19x^2 - 12x + 18$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W

Rozwiązanie:



Skorzystamy z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Na mocy tego twierdzenia wnosimy, że jeśli wielomian W ma pierwiastek wymierny, to należy on do zbioru

$$M = \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{9}{4}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$$

Na podstawie fragmentu wykresu funkcji W stwierdzamy, że jeden z pierwiastków wielomianu znajduje się w przedziale $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
Tylko jedna liczba ze zbioru M leży w tym przedziale i jest to ułamek $\frac{3}{4}$

Sprawdzamy, czy liczba $\frac{3}{4}$ jest pierwiastkiem wielomianu W :

$$W\left(\frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 19 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 12 \cdot \frac{3}{4} + 18 = \frac{27}{16} - \frac{171}{16} - \frac{144}{16} + \frac{288}{16} = 0$$

Zatem wielomian jest podzielny przez dwumian $\left(x - \frac{3}{4}\right)$
Dzielimy wielomian W przez dwumian $\left(x - \frac{3}{4}\right)$ i zapisujemy go w postaci iloczynowej:

$$W(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)(4x^2 - 16x - 24)$$

Pierwiastkami trójmianu $4x^2 - 16x - 24$ są liczby: $2 - \sqrt{10}$ oraz $2 + \sqrt{10}$.
Pierwiastkami wielomianu W są liczby: $2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}$ oraz $\frac{3}{4}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2.20. Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (x-1)(x^2 - mx + m - 1)$ dla każdego $x \in R$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W . Zatem wielomian W ma dokładnie jeden$f(x) = x^2 - mx + m - 1$ ma dokladnie jedno miejsce zerowe równe 1 lub gdy funkcja$f$ nie ma miejsc zerowych.
Zatem

$$\Delta < 0 \text{ lub } (\Delta = 0 \text{ i } x_0 = 1)$$
$$m^2 - 4m + 4 < 0 \text{ lub } \left(\mathrm{m}^2 - 4\ \mathrm{m} + 4 = 0 \text{ i } -\frac{b}{2a} = 1\right)$$
$$(m-2)^2 < 0 \text{ lub } \left((m-2)^2 = 0 \text{ i } \frac{m}{2} = 1\right)$$

Nierówność$(m-2)^2 < 0$ jest sprzeczna, natomiast z warunków

$$(m-2)^2 = 0 \text{ i } \frac{m}{2} = 1$$

otrzymujemy$m = 2$.

2.21. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem

$$f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja f miala dokladnie dwa miejsca zerowe różniące się o jeden:
W1. $p \neq 0$ (z treści zadania f jest funkcją kwadratową)
W2. $\Delta > 0$ (aby funkcja f miala dokladnie dwa miejsca zerowe)
W3. $|x_1 - x_2| = 1$ (aby miejsca zerowe funkcji f różnily się o 1).

W2
$\Delta > 0$
$(p-1)^2 - 4p(1-2p) > 0$
$9p^2 - 6p + 1 > 0$
$(3p-1)^2 > 0$
$p \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$

W3
Skorzystamy tutaj ze wzorów Viète'a.

$$|x_1 - x_2| = 1$$
$$(x_1 - x_2)^2 = 1$$
$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1$$

Gdy $p \neq 0$ mamy

$$\left(-\frac{p-1}{p}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-2p}{p} = 1$$
$$(p-1)^2 - 4p(1-2p) = p^2$$
$$8p^2 - 6p + 1 = 0$$
$$p = \frac{1}{2} \text{ lub } p = \frac{1}{4}$$

Po uwzględnieniu wszystkich warunków otrzymujemy: $p = \frac{1}{2}$ lub $p = \frac{1}{4}$.

2.22. Proste o równaniach $2x + y - 4m - 4 = 0$ i $x - 3y + 5m + 5 = 0$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych (x_P, y_P). Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

$$x_P > 0, y_P > 0, y_P \geq x_P^2 \text{ oraz } y_P < -\frac{2}{x_P} + 8$$

Rozwiązanie:

Punkt P leży na obu prostych, więc

$$\begin{cases} 2x_P + y_P - 4m - 4 = 0 \\ x_P - 3y_P + 5m + 5 = 0 \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy współrzędne punktu P :

$$x_P = m + 1$$
$$y_P = 2(m + 1)$$

Ponieważ $x_P > 0$ i $y_P > 0$, więc

$$m + 1 > 0 \text{ i } 2(m + 1) > 0$$

co daje $m \in (-1, +\infty)$.
Uwzględniamy warunki zadania $y_P \geq x_P^2$ i $y_P < -\frac{2}{x_P} + 8$:

$$2(m+1) \geq (m+1)^2 \text{ i } 2(m+1) < -\frac{2}{m+1} + 8$$

$$-(m+1)(m-1) \geq 0 \text{ i } \frac{2(m+1)^2}{m+1} + \frac{2}{m+1} - \frac{8(m+1)}{m+1} < 0$$

$$m \in [-1; 1] \text{ i } \frac{2m^2 - 4m - 4}{m+1} < 0$$

$$m \in [-1; 1] \text{ i } 2(m^2 - 2m - 2)(m+1) < 0$$
$$m \in [-1; 1] \text{ i } 2(m - (1-\sqrt{3}))(m - (1+\sqrt{3}))(m+1) < 0$$
$$m \in [-1; 1] \text{ i } m \in (-\infty, -1) \cup (1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$$
$$m \in (1-\sqrt{3}; 1]$$

Ponieważ $m \in (-1, +\infty)$ i $m \in (1-\sqrt{3}; 1]$, więc ostatecznie $m \in (1-\sqrt{3}; 1]$.

2.23. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \text{(równanie okręgu)} \\ x - y = -1 & \text{(równanie prostej)} \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Z drugiego równania wyznaczamy $x = y - 1$

Podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy

$$(y-1)^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 + y^2 - 25 = 0$$
$$2y^2 - 2y - 24 = 0 \ 1; 2$$
$$y^2 - y - 12 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$$
$$\sqrt{\Delta} = 7$$

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-7}{2} = -3$$
$$y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+7}{2} = 4$$

Obliczamy $x_1 = -4$
$x_1 = 3$

Otrzymujemy $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

Interpretacja geometryczna - współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej

2.24. Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia

$v \rightarrow$ prędkość pierwszego pociagu
$t \rightarrow$ czas w jakim przejechał on połowę drogi, czyli 270 km.
Mamy zatem

$$vt = 270.$$

Korzystamy z drugiej informacji : pociąg jechał on z prędkością $v + 9$ oraz połowę drogi przejechał w czasie $t - 1$ (bo wyjechał godzinę później). Zatem otrzymujemy układ równań

$$(v+9)(t-1) = 270$$
$$vt + 9t - v - 9 = 270$$

Ponieważ $vt = 270$ mamy stąd

$$9t - v - 9 = 0 \;\Rightarrow\; v = 9t - 9$$

Podstawiamy to wyrażenie w równości $vt = 270$.

$$(9t-9)t = 270$$
$$t^2 - t - 30 = 0$$
$$\Delta = 1 + 120 = 121 = 11^2$$
$$t = \frac{1-11}{2} = -5 \text{ lub } t = \frac{1+11}{2} = 6$$

Zatem $v = 9t - 9 = 45,$ a drugi pociąg jechał z prędkościa $45 + 9 = 54$.

III. FUNKCJA, FUNKCJA LINIOWA I KWADRATOWA

Funkcją f określoną w zbiorze X o wartościach ze zbioru Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbiory X dokładnie jednego elementu ze zbioru Y.
Funkcję taką oznaczamy symbolem $f: X \to Y$.
Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji (zbiór argumentów).
Zbiór Y nazywamy zbiorem wartości funkcji.
Wykresem funkcji $y = f(x)$ nazywamy zbiór W punktów płaszczyzny Oxy taki, że $W = \{P(x, y): x \in D, y = f(x)\}$

Funkcję f nazywamy różnowartościową w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch różnych argumentów, ich wartości są różne.

Funkcję f nazywamy parzystą w zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$, element przeciwny do niego należy również do D oraz $f(-x) = f(x)$ (wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy)

Funkcję f nazywamy nieparzystą w zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$, element przeciwny do niego należy również do D oraz $f(-x) = -f(x)$ (wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych)

Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$$

Funkcję f nazywamy malejącą w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$$

Funkcję f nazywamy stałą w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy każdego $x_1, x_2 \in A$

$$f(x) = a$$

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taką liczbę x_0, dla której $f(x_0) = 0$;

Funkcją liniową nazywamy funkcję $f: R \to R$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$.
a - współczynnik kierunkowy, b - wyraz wolny.
Wykresem funkcji $y = ax + b$, gdzie $x \in R$, jest prosta nachylona do osi x pod takim kątem α, że $a = \operatorname{tg} \alpha$ i przecinająca oś Oy w punkcie, którego rzędna jest równa b.

Współrzędne każdego punktu należącego do prostej o równaniu $y = ax + b$, spełniają to równanie. Stąd mając dwa punkty: $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ przez które przechodzi prosta, możemy znaleźć jej równanie, rozwiązując następujący układ równań:

$$\begin{cases} y_A = a \cdot x_A + b \\ y_B = a \cdot x_B + b \end{cases}$$

z niewiadomymi a i b.

Funkcja kwadratowa to funkcja $f: R \rightarrow R$ określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy (trójmianem kwadratowym) w postaci ogólnej.

Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana parabolą. Parabola może mieć ramiona skierowane w górę lub w dół. Jeżeli współczynnik a w równaniu ogólnym funkcji kwadratowej jest dodatni , to ramiona paraboli są skierowane w górę, a jeżeli $a < 0$, to ramiona paraboli są skierowane w dół.
Liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$ (delta) nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

Współrzędne wierzchołka paraboli najczęściej oznacza się literami p i q :

$$p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej
Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa posiada dwa różne miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jeden (dwukrotny) pierwiastek

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków rzeczywistych

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej ($\Delta \geq 0$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

PRZYKŁADY

3.1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy zbiór, dla których liczba logarytmowana jest dodatnia:

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 > 0$$

Otrzymujemy $x \in (-4; -1) \cup (1; +\infty)$,
Wyznaczamy zbiór, dla których podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1:

$$x^2 - 3 > 0 \text{ i } x^2 - 3 \neq 1$$

Otrzymujemy

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji jako część wspólną uzyskanych wcześniej przedziałów
$x \in (-4; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$

3.2. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji f i g, określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

Rozwiązanie:

Wyznaczymy najpierw współrzędne punktu przecięcia. Przyrównujemy $f(x)$ i $g(x)$, a otrzymane równanie zapisujemy w postaci

$$(a + 1)x = 7$$

Ponieważ $x > 0$, więc $a + 1 > 0$, czyli $a > -1$
Zatem

$$y = f(x) = \frac{7}{a+1} - 2 = \frac{5 - 2a}{a + 1}$$

Ponieważ $y > 0$, a ponadto $a + 1 > 0$, więc wynika stąd, że $5 - 2a > 0$.
Otrzymujemy

$$a < \frac{5}{2}$$

Łączymy oba warunki $x > 0$ i $y > 0$ i zapisujemy odpowiedź: punkt przecięcia wykresów funkcji ma obie współrzędne dodatnie dla $-1 < a < \frac{5}{2}$

3.3. Dane są funkcje liniowe g i h określone wzorami: $g(x) = ax + b$ i $h(x) = bx + a$. Wiadomo, że funkcja g jest rosnąca, a h malejąca.
a) Wyznacz pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresów tych funkcji.
b) Oblicz liczby a i b wiedząc, że wykresy funkcji g i h są prostymi prostopadłymi, a punkt ich przecięcia leży na osi Ox.

Rozwiązanie:

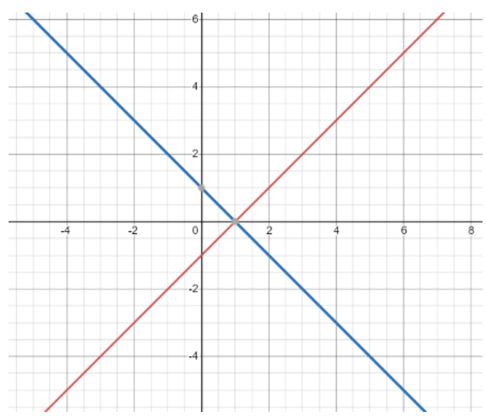
Z podanych informacji wiemy, że $a > 0$ i $b < 0$.
a) Wyznaczamy punkt przecięcia

$$ax + b = bx + a$$
$$x(a - b) = a - b \iff x = 1$$

Powyżej skorzystaliśmy z faktu, że $a \neq b$, który wynika z nierówności $a > 0$ i $b < 0$, więc $x = 1$
b) Wiemy, że $ab = -1$ oraz punkt wspólny wykresów leży na osi Ox.
Z poprzedniego podpunktu wiemy, pierwsza współrzędna tego punktu jest równa 1, czyli musi on mieć współrzędne $(1,0)$
Podstawiamy te liczby do wzoru pierwszej funkcji.

$$0 = a + b \Rightarrow b = -a$$

Z równości $ab = -1$ mamy więc $a^2 = 1$, czyli $a = 1$ i $b = -1$.



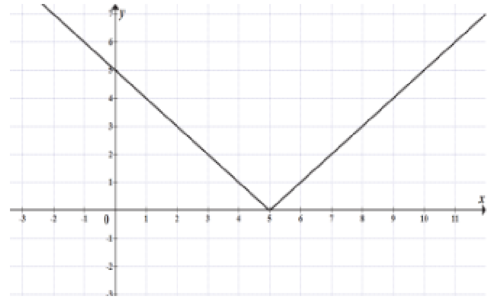
3.4. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie

$$|x - 5| = (a - 1)^2 - 4$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem $f(x) = |x-5|$ i naszkicujmy jej wykres.



Wnioskujemy stąd, że podane równanie ma dwa pierwiastki dodatnie, jeśli spełniona jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5, \text{ czyli nierówność } 4 < (a-1)^2 < 9$$

Stąd otrzymujemy, że $2 < |a-1| < 3$, zatem

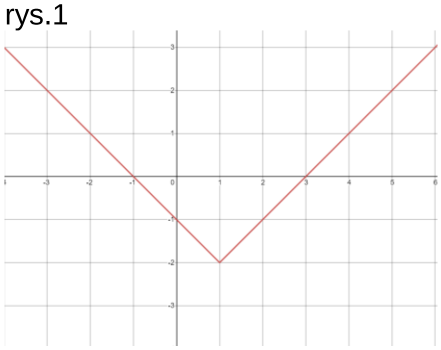
$$(a-1) \in (-3,-2) \cup (2,3)$$

Ostatecznie $a \in (-2,-1) \cup (3,4)$

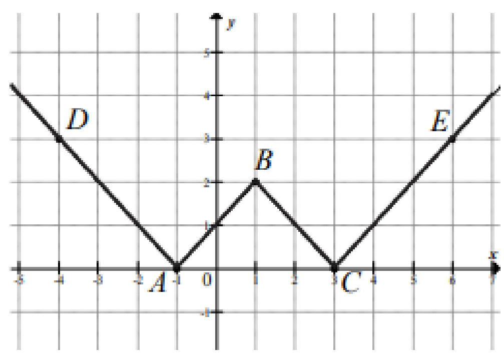
3.5. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AD i CE oraz dwóch odcinków AB i BC, gdzie $A = (-1,0), B = (1,2), C = (3,0), D = (-4,3), E = (6,3)$. Wyznacz wzór funkcji.

Rozwiązanie:
Punkt B przekształcamy w symetrii osiowej względem osi OX.
Otrzymujemy punkt B' o współrzędnych $B' = (1,-2)$
Rysujemy funkcję $g(x) = |x-1| - 2$ (rys.1)

rys.1



rys.2



Przekształcamy funkcję $g(x)$ i otrzymujemy $f(x) = g(x)$, (rys.2) czyli funkcję o wzorze $f(x) = ||x-1| - 2|$

3.6. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1; +\infty)$. Wykaż, że f jest funkcją rosnąca.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Rozwiązanie:

Niech $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ oraz $x_2 > x_1$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3x_2}{x_2+1} - \frac{3x_1}{x_1+1} = \frac{3x_2(x_1+1) - 3x_1(x_2+1)}{(x_2+1)(x_1+1)} = \frac{3(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)}$$

Dla $x_2 > x_1$ różnica $x_2 - x_1$ jest dodatnia, ponadto dla $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ każda z sum $(x_2+1)\mathrm{oraz}(x_1+1)$ jest dodatnia, więc iloraz $\frac{3(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)}$ również jest dodatni.
Oznacza to, że $f(x_2) > f(x_1)$ dla $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ oraz $x_2 > x_1$, zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1, +\infty)$. To kończy dowód.

3.7. Równanie $x^2 + 48x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę.

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1 + x_2 = -48$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 2$.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(-48)^2 - 2 \cdot 2}{2^2} = 575$$

3.8. Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spetniają warunek

$$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równość $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2\mathrm{w}$ sposób równoważny:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = 2$$
$$2((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2) + 5x_1x_2 = 2$$
$$2(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 = 2$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że

$$x_1 + x_2 = 3m + 2 \text{ oraz } x_1x_2 = 2m^2 + 7m - 15$$

o ile pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu istnieją.
Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej

$$20m^2 + 31m - 9 = 0$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}$$

Pozostaje sprawdzić, czy dla tych wartości m dany trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki. Możemy, tak jak w sposobie pierwszym, obliczyć wyróżnik i przekonać się, że jest on nieujemny. Możemy także podstawić znalezione wartości parametru m do danego trójmianu i przekonać się, że otrzymane trójmiany mają dwa różne pierwiastki.
Po podstawieniu $m = -\frac{9}{5}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{528}{25}$$

Po podstawieniu $m = \frac{1}{4}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{105}{8}$$

Oba trójmiany mają dwa różne pierwiastki. Można się o tym przekonać, obliczając wyróżniki lub zauważając, że oba trójmiany mają dodatni współczynnik przy x^2 i ujemny wyraz wolny.
Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru m :

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}$$

3.9. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy $4x^2 - 2(m+1)x+m$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Rozwiązanie:

Trójmian $4x^2 - 2(m+1)x + m$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta = [-2(m+1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot m > 0$$

i równoważnie dalej

$$4m^2 - 8m + 4 > 0$$
$$4(m-1)^2 > 0$$
$$m \neq 1$$

Warunek $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ma sens liczbowy tylko wtedy, gdy żaden z pierwiastków trójmianu $4x^2 - 2(m+1)x + m$ nie jest równy 0, czyli gdy $x_1 x_2 \neq 0$. Ze wzoru Viète'a otrzymujemy $\frac{m}{4} \neq 0$, czyli $m \neq 0$

Nierówność $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ zapisujemy w postaci równoważnej $x_1 + x_2 \leq \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}$

i po zastosowaniu wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\frac{2(m+1)}{4} \leq \frac{\frac{2(m+1)}{4}}{\frac{m}{4}}$$

i równoważnie dalej

$$\frac{(m+1)}{2} \leq \frac{2(m+1)}{m}$$
$$\frac{2(m+1)}{m} - \frac{m+1}{2} \geq 0$$
$$\frac{4(m+1) - m(m+1)}{2m} \geq 0$$
$$2m(m+1)(4-m) \geq 0 \text{ i } m \neq 0$$

Stąd $m \in (-\infty, -1) \cup (0,4)$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności otrzymanych w I i II etapie rozwiązania: $m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0,1) \cup (1,4)$

3.10. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie

$$x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Rozwiązanie:

Równanie $x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie x_1 i x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy: $\Delta > 0$ I $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$

Warunki te można zapisać równoważnie: $\Delta > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$.

1 Wyznaczamy wartości parametru a, dla których wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2 - 2ax + a^3 - 2a$ jest dodatni:

$$\Delta > 0$$
$$(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^3 - 2a) > 0$$
$$-4a^3 + 4a^2 + 8a > 0$$
$$a(a^2 - a - 2) < 0$$
$$a(a+1)(a-2) < 0$$
$$a \in (-\infty, -1) \cup (0,2)$$

2 Wyznaczamy wartości parametru a, dla których suma $x_1 + x_2$ jest dodatnia. Korzystamy ze wzorów Viète'a i otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 > 0$$
$$-\frac{(-2a)}{1} > 0$$
$$a > 0$$

3 Wyznaczamy wartości parametru a, dla których iloczyn $x_1 \cdot x_2$ jest dodatni. Korzystamy ze wzorów Viète'a i otrzymujemy:

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$
$$\frac{a^3 - 2a}{1} > 0$$
$$a(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) > 0$$
$$a \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Po uwzględnieniu wszystkich warunków otrzymujemy $a \in (\sqrt{2}, 2)$.

3.11. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzoren

$$f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1 - m)x + 2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1 - m)x + 2$ w zależności od współczynnika $a = m^2 - 1$ jest liniowa lub kwadratowa. Rozważmy dwa przypadki:

1 Gdy $m^2 - 1 = 0$, to funkcja f jest liniowa.

Dla $m = -1$ funkcja ma wzór $f(x) = -4x + 2$, więc $m = -1$ nie spełnia warunków zadania.

Dla $m = 1$ funkcja ma wzór $f(x) = 2$, więc $m = 1$ spełnia warunki zadania.

2 Gdy $m^2 - 1 \neq 0$, to funkcja f jest kwadratowa. Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy parabola będąca jej wykresem leży w całości nad osią Ox.
Funkcja $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1 - m)x + 2$ ma tę własność, kiedy zachodzą warunki:

- $m^2 - 1 > 0$,
- $\Delta < 0$.

Pierwszy wanunek jest spełniony dla $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Warunek $\Delta < 0$ jest spełniony, gdy.

$$4(1-m)^2 - 8(m^2 - 1) < 0$$
$$(m-1)^2 - 2(m-1)(m+1) < 0$$
$$(m-1)(m-1-2m-2) < 0$$
$$(m-1)(-m-3) < 0$$
$$-(m-1)(m+3) < 0,$$

$$m \leqslant (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Zatem funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla $m \in (-x, -3) \cup (1, +\infty)$.
Uwzględniając oba przypadki, otrzymujemy $m \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, +\infty)$ -

IV. WIELOMIANY, FUNKCJA WYMIERNA

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

gdzie $n \in N, x \in R, a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$
Liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu.
Funkcja stała $W(x) = c$, gdzie $c \neq 0$, jest wielomianem stopnia zerowego.
Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeżeli $W(a) = 0$.
Wielomian jednej zmiennej stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Dzielenie wielomianów
Wielomian $W(x)$ stopnia n można podzielić przez wielomian $G(x)$ stopnia $m \leq n$.
Wynikiem takiego dzielenia jest wielomian stopnia $(n - m)$, z resztą będącą wielomianem stopnia $m - 1$.

Twierdzenie Bezouta
Liczba p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - p$.

Jeżeli wielomian $W(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ma wszystkie współczynniki całkowite i$a_n = 1$, to liczba całkowita q jest pierwiastkiem tego wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy q jest dzielnikiem wyrazu a_0.

Liczbę p nazywamy m - krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - p)^m$, ale nie jest już podzielny przez $(x - p)^{m+1}$. Liczbę m nazywamy krotnością pierwiastka p.

Równania wielomianowe
Metody znajdowania pierwiastków wielomianupoprzez jego rozkład na wielomiany pierwszego i drugiego stopnia.
- grupowanie wyrazów podobnych
- stosowanie wzorów skróconego mnożenia
- stosowanie twierdzenia Bezouta
- rozwiązywanie równań kwadratowych

Nierówności wielomianowe
Do rozwiązywania nierówności wielomianowych stosuje się metodę graficzną.
Mając daną z nierówności wielomianową ($W(x) > 0$ lub $W(x) \geq 0$ lub $W(x) < 0$ lub $W(x) \leq 0$) wyznaczamy pierwiastki wielomianu W(x), a następnie szkicujemy wykres funkcji $y = W(x)$. Z wykresu odczytujemy, kiedy dana funkcja przyjmuje wartości dodatnie, nieujemne, ujemne lub niedodatnie.

Funkcja wymierna
Jeżeli $W(x)$ i $G(x)$ są wielomianami i $G(x)$ jest wielomianem niezerowym, to funkcję $F(x) = \frac{W(x)}{G(x)}$ nazywamy funkcją wymierną.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór
$D = x \in R: G(x) \neq 0$.

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci:

$$\frac{W(x)}{G(x)} = 0$$

gdzie $W(x)$ i $G(x)$ są wielomianami i $G(x)$ nie jest wielomianem zerowym.
Dziedziną równania wymiernego są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem pierwiastków wielomianu $G(x)$ znajdującego się w mianowniku wyrażenia $\frac{W(x)}{G(x)}$:

$$D = R \setminus \{x: G(x) = 0\}$$

Rozwiązanie równania wymiernego sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego $W(x) = 0$ z uwzględnieniem, że otrzymane rozwiązania należą do dziedziny równania wymiernego.
Zatem:

$$\frac{W(x)}{G(x)} = 0 \Leftrightarrow W(x) = 0 \wedge G(x) \neq 0$$

Nierównością wymierną nazywamy każdą nierówność postaci:
$\frac{W(x)}{G(x)} > 0, \frac{W(x)}{G(x)} < 0, \frac{W(x)}{G(x)} \leq 0, \frac{W(x)}{G(x)} \geq 0$, gdzie $W(x)$ oraz $G(x)$ są wielomianami, natomiast $G(x)$ nie jest wielomianem zerowym.
Wyznaczamy dziedziną nierówności wymiernej $(G(x) \neq 0)$, tzn. $D = \mathbb{R} \setminus x: G(x) = 0$
Rozwiązując nierówność wymierną korzystamy z faktu, że iloraz i iloczyn tych samych wyrażeń mają ten sam znak, tzn. $\frac{x}{y} \geq 0$ wtedy i tylko wtedy $xy \geq 0 \ \wedge \ y \neq 0$
Otrzymujemy w ten sposób nierówność wielomianową, przy rozwiązywaniu której trzeba uwzględnić dziedzinę nierówności wymiernej.

PRZYKŁADY

4.1. Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6px + 9$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Oblicz p.

Rozwiązanie:

$W(x)$ jest podzielny przez $x - 1$, zatem $W(1) = 0$.
$W(1) = 7 - 6p$. Stąd $p = 1\frac{2}{3}$

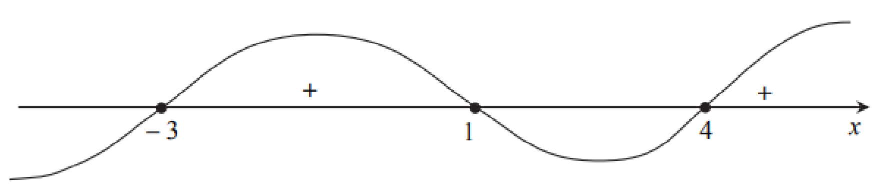
4.2. Wielomian $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x + 3$ i $x - 4$. Oblicz wartości współczynników n i m oraz rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

Rozwiązanie:

Wielomian $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$ jest podzielny przez dwumiany $x + 3$ i $x - 4$, zatem $\begin{cases} W(-3) = 0 \\ W(4) = 0 \end{cases}$
Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-3)^3 + m \cdot (-3)^2 - 22 \cdot (-3) + n = 0 \\ 2 \cdot 4^3 + m \cdot 4^2 - 22 \cdot 4 + n = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 \cdot (-27) + 9m + 66 + n = 0 \\ 2 \cdot 64 + 16m - 88 + n = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 9m + n = -12 \\ 16m + n = -40 \end{cases}$$
$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

Zatem wielomian W ma postać $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$
Rozwiąujemy nierównośc $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \geq 0$
Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $x + 3$ otrzymujemy iloraz $2x^2 - 10x + 8$, który dzielimy przez dwumian $x - 4$ i otrzymujemy iloraz $2x - 2$. W rezultacie wielomian W możemy zapisać w postaci $W(x) = 2(x + 3)(x - 1)(x - 4)$.
Pierwiastkami wielomianu W są liczby: $-3, 1, 4$
Szkicujemy wykres wielomianu W, z którego odczytujemy rozwiązanie nierówności.



Zatem rozwiązaniem nierówności $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ jest każda liczba rzeczywista $x \in \langle -3{,}1 \rangle \cup (4, +\infty)$

4.3. Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.

Rozwiązanie :

Pierwszy etap
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$, więc 2 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Zatem $W(2) = 0$. Stąd otrzymujemy

$$16 + 4m^3 + 8 - 22 - 4m - 2 = 0$$
$$4m^3 - 4m = 0$$

Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ otrzymujemy resztę 6, więc $W(-1) = 6$. Stąd otrzymujemy

$$-2 + m^3 + 2 + 11 - 4m - 2 = 6$$
$$m^3 - 4m + 3 = 0$$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} 4m^3 - 4m = 0 \\ m^3 - 4m + 3 = 0 \end{cases}$

I sposób
Z równania $4m^3 - 4m = 0$ otrzymujemy rozwiązania: $m = 0, m = -1, m = 1$.
Z tych trzech liczb tylko liczba 1 spetnia drugie równanie, zatem liczba 1 jest rozwiązaniem układu równań.

II sposób
Z równania $m^3 - 4m + 3 = 0$ otrzymujemy rozwiązania: $m = 1, m = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, m = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.
Z tych trzech liczb tylko liczba 1 spełnia pierwsze równanie, zatem liczba 1 jest rozwiązaniem układu równań.

III sposób
Przyrównując lewe strony obu równań $\begin{cases} 4m^3 - 4m = 0 \\ m^3 - 4m + 3 = 0 \end{cases}$ otrzymujemy

$$\begin{cases} 4m^3 - 4m = m^3 - 4m + 3 \\ 4m^3 - 4m = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3m^3 - 3 = 0 \\ 4m^3 - 4m = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} m^3 = 1 \\ 4m^3 - 4m = 0 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} m = 1 \\ 4m^3 - 4m = 0 \end{cases}$$

Sprawdzamy, czy liczba 1 spełnia jedno z równań:

$$4m^3 - 4m = 0$$
$$4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

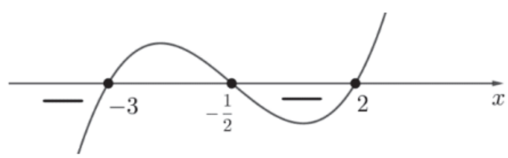
lub

$$m^3 - 4m + 3 = 0$$
$$1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 4 - 4 = 0$$

Liczba $m = 1$ spełnia każde z równań układu, więc jest jedynym rozwiązaniem tego układu.
Drugi etap
Dla $m = 1$ nierówność $W(x) \leq 0$ przyjmuje postać

$$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 \leq 0$$

Rozwiązujemy tę nierówność stosując przekształcenia równoważne i otrzymujemy kolejno:



Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, -3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, 2\right\rangle$

4.4. Reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ przez dwumiany $(x - 2)$ i $(x - 3)$ są odpowiednio równe (−8) oraz (−18). Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - 4)$

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że

$$W(2) = 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 = -8$$

$$W(3) = 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 = -18$$

Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} 8b + 4c = -24 \\ 27b + 9c = -99 \end{cases}$$

Po uproszczeniu przyjmuje on postać

$$\begin{cases}2b + c = -6\\3b + c = -11\end{cases}$$

Odejmując stronami od równania drugiego równanie pierwsze, otrzymujemy $b = -5$, więc $c = -6 - 2b = 4$
Wielomian W ma więc postać $W(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2$.
Stąd $W(4) = 4^4 - 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 = 256 - 320 + 64 = 0$
Sposób 2.
Przyjmijmy oznaczenie $P(x) = x^2 + bx + c$. Wtedy

$$W(x) = x^2 \cdot (x^2 + bx + c) = x^2 \cdot P(x)$$

Zauważmy, że $W(2) = 4 \cdot (-2), W(3) = 9 \cdot (-2)$.
Warunek ten możemy zapisać w postaci

$$P(2) = P(3) = -2$$

co oznacza, że wielomian $P(x) + 2$ jest podzielny przez dwumiany $(x - 2)$ oraz $(x - 3)$.
Stąd $P(x) + 2 = (x - 2)(x - 3)$
Wielomian W można przedstawić w jawnej postaci:

$$W(x) = x^2 \cdot [(x - 2)(x - 3) - 2]$$

Zatem $W(4) = 4^2 \cdot [(4 - 2) \cdot (4 - 3) - 2] = 0$.

4.5. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x - 1}{1 - x} \leq \frac{2 + 2x}{5x}$$

Rozwiązanie:

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x \neq 1$. Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{2x - 1}{1 - x} - \frac{2 + 2x}{5x} \leq 0$$

$$\frac{10x^2 - 5x - 2 - 2x + 2x + 2x^2}{5x(1 - x)} \leq 0$$

$$\frac{12x^2 - 5x - 2}{5x(1 - x)} \leq 0$$

Stąd dostajemy

$$12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(1-x)\cdot 5x \leq 0 \text{ i } x \neq 0 \text{ i } x \neq 1$$

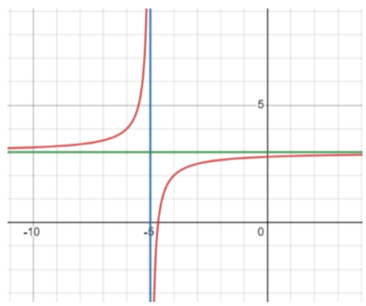
Zatem $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{4}\right) \cup \left(0,\frac{2}{3}\right) \cup (1,+\infty)$.

4.6. Punkt $A=(-5,3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x)=\frac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. Oblicz iloraz $\frac{d}{a}$

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Jeżeli punkt $A=(-5,3)$ jest jej środkiem symetrii, to jej asymptotami muszą być proste $x=-5$ i $y=3$.
W szczególności $d=5$ i

$$f(x)=\frac{ax+7}{x+5}=\frac{a(x+5)-5a+7}{x+5}=a+\frac{7-5a}{x+5}$$



Stąd $a=3$ i $\frac{d}{a}=\frac{5}{3}$.

4.7. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{3x+41}{x-13}$ dla $x \neq 13$.
Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji $\boldsymbol{f}$.

Rozwiązanie:

Funkcję f przedstawiamy w postaci:

$$f(x)=\frac{-3x+41}{x-13}=\frac{(-3(x-13)+2}{x-13}=-3+\frac{2}{x-13}$$

Wyznaczamy punkty kratowe.

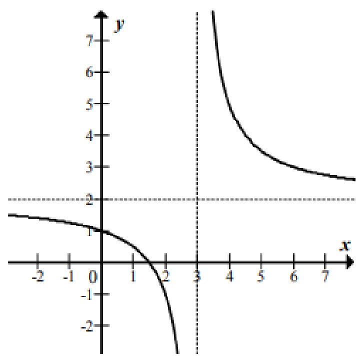
Wartość funkcji będzie liczbą całkowitą tylko wtedy, gdy $\frac{2}{x-13} \in Z$.

Szukamy całkowitych wartości x (rożnych od 13) takich, dla których $(x-13)$ jest dzielnikiem 2 . To prowadzi do następujących czterech przypadków:

- $x-13=-2$, co daje $x=11$ i $f(x)=-3-1=-4 \in Z$
- $x-13=-1$, co daje $x=12$ i $f(x)=-3-2=-5 \in Z$
- $x-13=1$, co daje $x=14$ i $f(x)=-3+2=-1 \in Z$
- $x-13=2$, co daje $x=15$ i $f(x)=-3+1=-2 \in Z$.

Do wykresu funkcji f należą cztery punkty kratowe o współrzędnych: $(11,-4), (12,-5), (14,-1), (15,-2)$

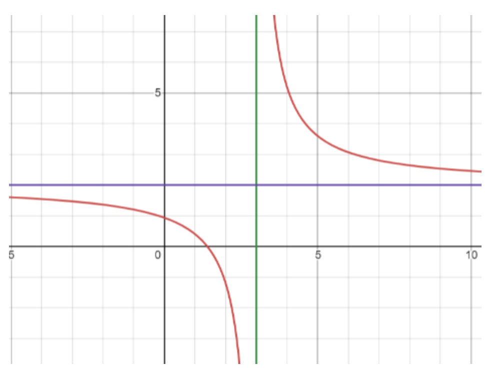
4.8. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji homograficznej $y=f(x)$, której dziedziną jest zbiór $D=(-\infty,3) \cup (3,+\infty)$.



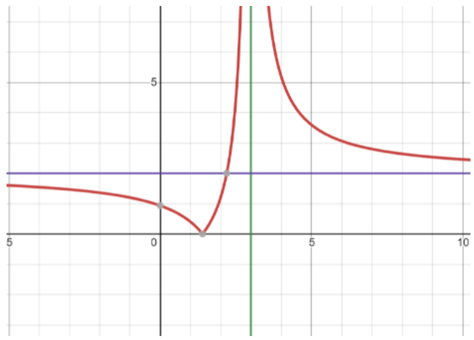
Dla jakiego p równanie $|f(x)|=p$ z niewiadomą x ma dokładnie jedno rozwiązanie

Rozwiązanie:

Rysujemy wykres funkcji y=*f(x)*.



Przekształcamy wykres funkcji y=*f(x)* i otrzymujemy wykres funkcji y=|*f(x)*|,



Mamy wykres funkcji y=|*f(x)*|,

Szukamy punktów wspólnych wykresu funkcji funkcji y=|*f(x)*| z prostą o równaniu *y=p*. Zmieniając wartość *p*, przesuwamy poziomą prostą wykresu funkcji *y=p* w górę lub w dół. Badamy wówczas, kiedy wykresy przecinają się w jednym punkcie. Ma to miejsce w dwóch przypadkach dla *p*=0 i *p*=2.

4.9. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{|x+3|+|x-3|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Rozwiązanie:

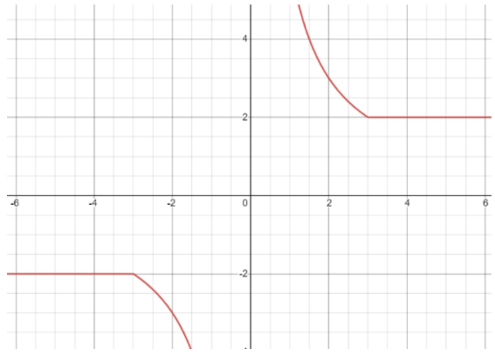
Wzór funkcji f możemy zapisać w każdym ze zbiorów: $(-\infty,-3), \langle -3,3) \setminus \{0\}, \langle 3,+\infty)$ bez symbolu wartości bezwzględnej. Wówczas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x+3)+[-(x-3)]}{x} & \text{dla } x \in (-\infty,-3) \\ \dfrac{x+3+[-(x-3)]}{x} & \text{dla } x \in \langle -3,0) \cup (0,3) \\ \dfrac{x+3+(x-3)}{x} & \text{dla } x \in \langle 3,+\infty) \end{cases}$$

czyli

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty,-3) \\ \dfrac{6}{x} & \text{dla } x \in \langle -3,0) \cup (0,3) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 3,+\infty) \end{cases}$$

Wykres ma więc postać



Zbiorem wartości funkcji f jest $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

4.10. Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \frac{3|x|-2}{|x|+1}$. Korzystając z wykresu odczytaj przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 2. $x \in (-4; 4)$

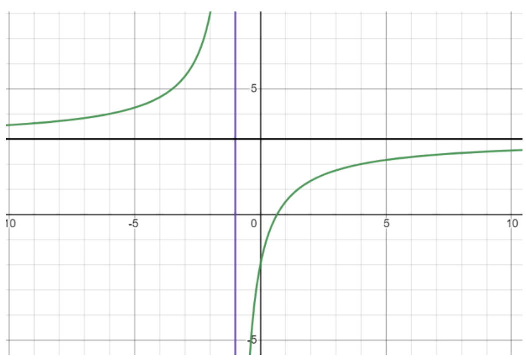
Rozwiązanie:

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej

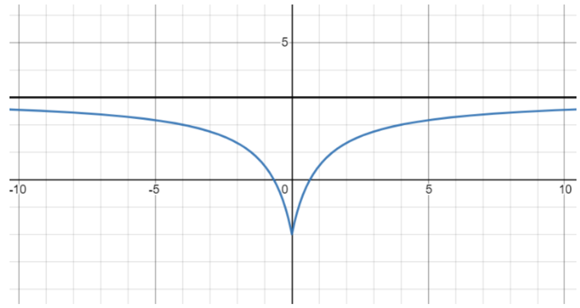
$$g(x) = \frac{3x-2}{x+1} = \frac{3(x+1)-5}{x+1} = 3 - \frac{5}{x+1}$$

Wykonujemy wykres funkcji

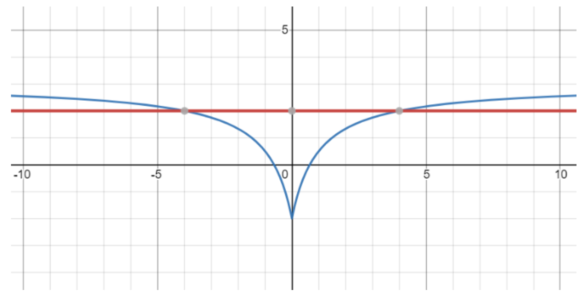
$$g(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$$



Przekształcamy wykres funkcji $g(x)$ i otrzymujemy wykres funcji $f(x) = \frac{3|x|-2}{|x|+1}$



Rysujemy dodatkowo prostą $y = 2$



Obliczamy punkty przecięcia funkcji $f(x) = \frac{3|x|-2}{|x|+1}$ i prostej $y = 2$

Współrzędne tych punktów to $(-4,0)$ i $(4,0)$.

Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności $\frac{3|x|-2}{|x|+1} < 2$.

Otrzymujemy rozwiązanie $x \in (-4; 4)$

V. FUNKCJE POTĘGOWE, WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

Funkcją potęgową nazywamy funkcję w postaci:
$f(x) = x^r$, gdzie $r \in R$, przy czym dziedzina D_f funkcji f zależy od r, to znaczy
a) jeżeli $r \in C$ i $r > 0$, to $D_f = R$,
b) jeżeli $r \in C$ i $r \leq 0$, to $D_f = R \setminus \{0\}$,
c) jeżeli $r \in R \setminus C$ i $r > 0$, to $D_f = R_+ \cup \{0\}$,
d) jeżeli $r \in R \setminus C$ i $r < 0$, to $D_f = R$.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$$f(x) = a^x, \text{ gdzie } a \in R_+, x \in R$$

Własności funkcji wykładniczej:
a) Funkcja wykładnicza jest określona dla każdej liczby rzeczywistej.
b) Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie (nie posiada więc miejsc zerowych).
c) Funkcja wykładnicza jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $0 < a < 1$.
Prawdziwe sa zatem następujące równoważności:
$1^\circ\ a^{x_1} = a^{x_2}$ wtedy i tylko wtedy $x_1 = x_2$ dla $a \neq 1$
$2^\circ a^{x_1} > a^{x_2}$ wtedy i tylko wtedy $x_1 > x_2$ dla $a > 1$
$3^\circ a^{x_1} > a^{x_2}$ wtedy i tylko wtedy $x_1 < x_2$ dla $0 < a < 1$
Ostatnie związki wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności wykładniczych.

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci: $f(x) = \log_a\ x$, gdzie $a \in R_+ \setminus \{1\}$

Dziedziną każdej funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich R_+, a zbiorem wartości zbiór liczb rzeczywistych R
Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się krzywą logarytmiczną.

Własności funkcji logarytmicznej: $f(x) = \log_a\ x$
a) Miejscem zerowym funkcji logarytmicznej jest $x = 1$.
b) Funkcja logarytmiczna jest rosnąca przy podstawie $a > 1i$ malejąca dla $0 < a < 1$
Prawdziwe sa zatem następujące równoważności:

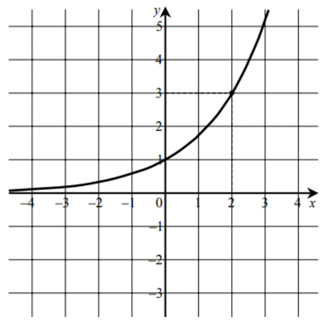
$$\log_p\ x_1 = \log_a\ x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy } x_1 = x_2$$
$$\log_p\ x_1 < \log_a\ x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy } x_1 < x_2\ dla\ a > 1$$
$$\log_p\ x_1 < \log_a\ x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy } x_1 > x_2\ dla\ 0 < a < 1$$

Ostatnie własności wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

PRZYKŁADY

5.1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in R$.



a) Oblicz a.
b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$ i podaj wszystkie wartości parametru $m \in R$, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie:

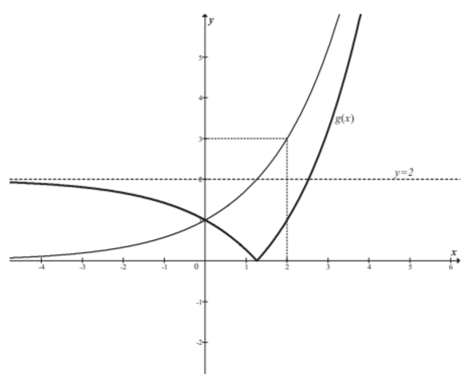
a) Do wykresu funkcji należy punkt $P(2,3)$

Podstawiamy do wzoru funkcji $3 = a^2$

$a = \sqrt{3}$ lub $a = -\sqrt{3}$ odrzucamy (niezgodne z definicją funkcji wykładniczej)

ostatecznie $a = \sqrt{3}$

b) Rysujemy wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$



Odczytujemy z wykresu
Wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie to $m \in \{0\} \cup \langle 2, +\infty)$.

5.2. Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x-x^2)$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że funkcja logarytmiczna dla podstawy równej $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest malejaca. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje najmniejsza wartość dla największego argumentu.
Wyznaczam dziedzine funkcji f :

$$8x-x^2>0$$
$$x\cdot(8-x)>0$$
$$x\in(0,8)$$

Wyrażenie $8x-x^2$ osiaga największą wartość dla $x=4$ i jest ona równa 16.
Najmniejsza wartościa funkcji $f(x)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x-x^2)$ jest liczba $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16)$.
Obliczamy wartość funkcji f dla argumentu 16, korzystając z definicji logarytmu:

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16)=y$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^y=16$$
$$\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^y=2^4$$
$$\frac{-y}{2}=4, \text{ więc } y=-8$$

Liczba (-8) jest najmniejszą wartością funkcji.

5.3. Dane są funkcje $f(x)=3^{x^2-5x}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$
Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

Rozwiązanie:

Warunki zadania są równoważne nierówności: $3^{x^2-5x}>3^{4x^2+6x-4}$.

Rozwiązujemy nierówność: $3^{x^2-5x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$

$$3^{x^2-5x}>(3^{-2})^{-2x^2-3x+2}$$
$$3^{x^2-5x}>3^{4x^2+6x-4}$$

Korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej otrzymujemy nierówność równoważną:

$$x^2 - 5x > 4x^2 + 6x - 4$$
$$-3x^2 - 11x + 4 > 0$$
$$\Delta = 169,\ x_1 = \frac{11-13}{-6} = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{11+13}{-6} = -4$$

Rozwiązaniem nierówności jest przedział: $\left(-4, \frac{1}{3}\right)$.

5.4. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciagu (a_n).

Wyrażenie: $\log_2(k-2)$ jest określone, gdy $k - 2 > 0, k > 2$.
z definicji ciągu geometrycznego wynika, że iloraz $q = \log_2(k-2)$.

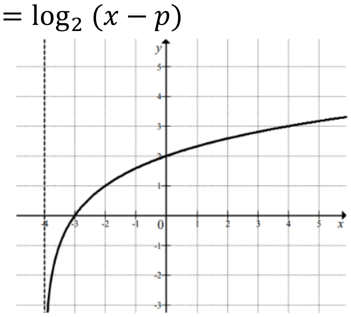
$$q \neq 0 \text{ więc } \log_2(k-2) \neq 0 \text{ czyli } k \neq 3$$

Aby istniała suma wszystkich wyrazów danego ciągu geometrycznego, iloraz ciągu musi spełniać warunek $|q| < 1$ co daje $|\log_2(k-2)| < 1$
Rozwiązujemy nierówność: $|\log_2(k-2)| < 1$,

$$\log_2(k-2) > -1\ i \log_2(k-2) < 1$$
$$\log_2(k-2) > \log_2\frac{1}{2}\ i \log_2(k-2) < \log_2 2$$
$$k - 2 > \frac{1}{2}\ i k - 2 < 2$$
$$k > \frac{5}{2}\ i\ k < 4$$

Rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste należące do przedziału $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.
Ostatecznie otrzymujemy, że suma wszystkich wyrazów danego ciągu o wszystkich wyrazach różnych od zera istnieje dla $k \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3,4)$.

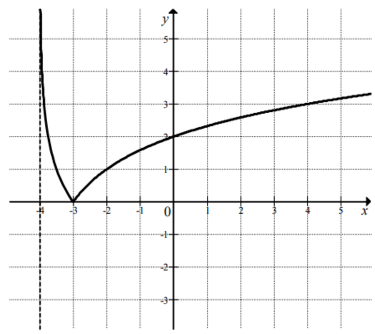
5.5. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x-p)$



a) Podaj wartość p.
b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.
c) Podaj wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy z wykresu, że $p = -4$. Możemy również zauważyć, że $f(0) = 2$. Stąd otrzymujemy $\log_2(-p) = 2$. Z definicji logarytmu mamy $-p = 2^2 = 4$. Stąd $p = -4$.
b) Wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$ uzyskamy z wykresu funkcji f. W tym celu wystarczy tę część wykresu funkcji f, która leży pod osią Ox, odbić symetrycznie względem tej osi, a pozostałą część wykresu pozostawić bez zmian. W rezultacie otrzymujemy wykres



c) Z wykresu odczytujemy, że równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków dla $m > 2$.

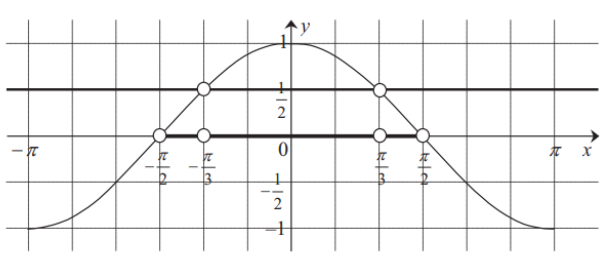
5.6. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{2\cos x}(9 - x^2)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Rozwiązanie:

Z definicji logarytmu zapisujemy wszystkie warunki określające dziedzinę funkcji f.

$$1)\quad 9 - x^2 > 0, \qquad 2)\quad 2\cos x > 0, \quad 2\cos x \neq 1.$$

Warunek 1)
Rozwiązujemy nierówność kwadratową: $x \in (-3,3)$.Warunek 2)



Rozwiązujemy nierówności $\cos\ x > 0$ i $\cos\ x \neq \frac{1}{2}$ w przedziale $(-3{,}3)$.
Otrzymujemy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $x \neq -\frac{\pi}{3}$ i $x \neq \frac{\pi}{3}$.
Zapisujemy dziedzinę funkcji f.: $D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5.7. Rozwiąż równanie, jeżeli wiadomo, że $x \in N$:

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = (0{,}04)^{-28}$$

Rozwiązanie

$$5^{2+4+6+\cdots+2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-28}$$

W wykładniku lewej strony mamy sumę x-wyrazów ciągu arytmetycznego, zatem

$$5^{\frac{2+2x}{2}x} = 5^{56}$$

$$(1 + x)x = 56$$

A więc $\qquad x_1 = -8 \notin N \qquad x_2 = 7$

Ostatecznie. $x = 7$.

5.8. Rozwiąż nierówność

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(x^2-2)} > 1.$$

Rozwiązanie:

Dziedziną nierówności jest zbiór x spełniających nierówność: $x^2 - 1 > 0$,
stąd $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Daną nierówność możemy przedstawić w postaci

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(x^2-2)} > \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

Następnie otrzymujemy

$$\log_2 (x^2 - 2) < 0,$$

$$\log_2 (x^2 - 2) < \log_2 1$$

stąd

$$x^2 - 2 < 1$$

czyli

$$x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

Ostatecznie uwzględniając dziedzinę danej nierówności, zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

VI. CIĄGI

Ciąg arytmetyczny - wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ początkowych n wyrazów ciagu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Ciąg geometryczny - wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ początkowych n wyrazów ciagu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej i kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów
Dane są ciągi (a_n) i (b_n), określone dla $n \geqslant 1$.
Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geqslant 1$ oraz $b \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, o ilorazie q.
Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dla $n \geqslant 1$.
Jeżeli $|q| < 1$, to ciągu (S_n) ma granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Tę granicę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

PRZYKŁADY

6.1. Wykaż, że jeżeli liczby $b, c, 2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby ab, b^2, c^2 sa kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie:

Jeżeli trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, to kwadrat środkowej musi być równy iloczynowi liczb sąsiednich

$$c^2 = b(2b - a)$$
$$c^2 = 2b^2 - ab$$
$$c^2 + ab = 2b^2$$
$$\frac{c^2 + ab}{2} = b^2$$

Otrzymana równość oznacza, że liczba b^2 jest średnią arytmetyczną liczb ab i c^2, co dowodzi, że ciąg (ab, b^2, c^2) jest arytmetyczny.

6.2. Ciąg $(a, 4, b, c)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(a, a + b, 4c)$ jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Jeżeli drugi wyraz tego ciągu jest równy 4, to $a = 4 - r, b = 4 + r$ i $c = 4 + 2r$.
Przy tych oznaczeniach, ciąg geometryczny $(a, a + b, 4c)$ możemy zapisać następująco $(4 - r, 8, 16 + 8r)$. Stąd otrzymujemy równanie

$$64 = (4 - r)(16 + 8r)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie $8r(r - 2) = 0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby $r = 0$ oraz $r = 2$.
Dla $r = 0$ otrzymujemy $a = b = c = 4$.
Dla $r = 2$ otrzymujemy $a = 2, b = 6, c = 8$.
Uwaga:
W rozwiązaniu można zapisać pierwszy i czwarty wyraz ciągu w zależności od trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego.
Jeżeli $a = 8 - b$ oraz $c = 2b - 4$, to ciąg geometryczny ma postać $(8 - b, 8, 2b - 4)$.
Wykorzystując wlasność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64 = (8 - b)(8b - 16)$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $b = 4$ oraz $b = 6$.
Gdy $b = 4$, to $a = 4$ i $c = 4$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Gdy $b=6$, to $a=2$ i $c=8$.
Możemy też zapisać trzeci i czwarty wyraz ciągu w zależności od pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego.
Jeżeli $b=8-a$ oraz $c=12-2a$, to ciąg geometryczny ma postać $(a, 8, 48-8a)$.
Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64=a(48-8a)$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $a=2$ oraz $a=4$.
Gdy $a=2$, to $b=6$ i $c=8$.
Gdy $a=4$, to $b=4$ i $c=4$.

6.3. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, że $a_1=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie:

Pierwszy wyraz i trzeci wyraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1=\frac{3}{4}, a_3=\frac{1}{3}$.
Ponieważ $a_3=a_1\cdot q^2$, stąd $q^2=\frac{a_3}{a_1}=\frac{4}{9}$. Zatem $q=-\frac{2}{3}$ lub $q=\frac{2}{3}$. Wyrazy ciacgu są dodatnie, więc $q=\frac{2}{3}$. Ponieważ $|q|=\left|\frac{2}{3}\right|<1$, więc

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{4}$$

Suma S wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równa: $S=\frac{9}{4}$.

6.4. Funkcja f, której dziedziną jest zbiór $(1,+\infty)$, jest określona wzorem

$$f(x)=x+1+\frac{x+1}{x}+\frac{x+1}{x^2}+\frac{x+1}{x^3}+\cdots$$

Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 6.

Rozwiązanie:

Dla $x\in(1,+\infty)$ wyrażenie

$$f(x) = x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \cdots$$

jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{x}$ takim, że $|q| < 1$, zatem

$$x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \cdots = \frac{x+1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

Z tego wynika, że

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} \text{ dla } x \in (1; +\infty)$$

Wyznaczamy argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 6 :

$$\frac{x^2 + x}{x - 1} = 6$$
$$x^2 + x = 6x - 6$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x = 2 \text{ lub } x = 3$$

Argumenty $x = 2$ oraz $x = 3$ należą do $(1, +\infty)$.
Funkcja f przyjmuje wartość 6 dla argumentów 2 i 3.

6.5. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia następujące równanie rekurencyjne: $a_1 = 7$,

$$a_{n+2} = \frac{1}{6} a_{n+1} + \frac{1}{3} a_n, \text{ dla } n \in \{1,2,3, \dots\}$$

Wyznacz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Rozwiązanie:

Ponieważ ciąg (a_n) jest geometryczny, jego wzór ogólny ma postać $a_n = 7 \cdot q^{n-1}$ dla $n \in 1,2,3, \dots$. Zauważmy, że $q \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie w równaniu rekurencyjnym dojdzie do sprzeczności dla $n = 1$.
Podstawiamy wyraz ogólny do wzoru rekurencyjnego:

$$7 \cdot q^{n+1} = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot q^n + \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot q^{n-1}$$

Podzielmy równanie przez $7 \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n}-1}$.

Otrzymujemy równanie

$$q^2 = \frac{1}{6} \cdot q + \frac{1}{3}$$

$$6q^2 - q - 2 = 0$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49$
stąd

$$q = -\frac{1}{2} \text{ lub } q = \frac{2}{3}$$

Zatem ciąg (a_n) ma postać
$a_n = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ lub $a_n = 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
Gdy ciąg (a_n) ma postać:

$$a_n = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ to } \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$$

więc suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{7}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{14}{3}$$

Gdy ciąg (a_n) ma postać:

$$a_n = 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ to } \left|\frac{2}{3}\right| < 1$$

więc suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{7}{1 - \frac{2}{3}} = 21$$

6.6. Ciągi $(a_n) i (b_n)$ są dane następującymi wzorami:

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}, b_n = \frac{3}{4n^2 + 2n}$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej n. Oblicz granicę ciągu (c_n) takiego, że $c_n = a_n \cdot b_n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n.

Rozwiązanie:

Znajdujemy ogólną postać wyrazów ciągu (c_n) :

$$c_n = a_n \cdot b_n = \frac{3n^2}{(4n^2+2n)(n+1)} =$$

$$= \frac{3n^2}{4n^3+6n^2+2n} = \frac{\frac{3}{n}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

Ciąg $\left(\frac{3}{n}\right)$ ma granicę równą 0, natomiast ciag $\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$ ma granicę równą 4. Stąd, z twierdzenia o granicy ilorazu, mamy $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

6.7. Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)}\right) \text{ dla } n \geq 1$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu jest równa 12.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wzór ciągu (a_n) do postaci

$$a_n = (p+1)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)}$$

Obliczamy następujące granice:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{n^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1$$

Zatem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[(p+1)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)}\right] = \\ &= (p+1)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} = \\ &= (p+1)\cdot 1 + (2p+2)\cdot 1 = 3p+3\end{aligned}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Z warunków zadania otrzymujemy $12 = 3p + 3$, więc $p = 3$.

6.8. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}-\frac{n^2}{3n^2+1}\right)$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{11}{n}}{7+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n^2}}$$

a ponadto $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{11}{n}}{7+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{9+0}{7+0+0+0}=\frac{9}{7}$$

Podobnie, wykorzystując to, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{3+0}=\frac{1}{3}$$

Zatem istnieją (skończone) obie granice ciągów. Stąd granica różnicy tych ciągów jest równa różnicy ich granic i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}-\frac{n^2}{3n^2+1}\right)=\frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{20}{21}$$

6.9. Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Zakładamy, że $a \neq 0, b \neq 0, a + b + c \neq 0$

Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, a zatem:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest ciągiem geometrycznym, a zatem:

$$\left(\frac{2}{3b}\right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2a+2b+c}$$

stąd po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{9}{4}b^2 = a(2a+2b+c)$$

Po podstawieniu b otrzymujemy:

$$\frac{9}{4}\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = 2a^2 + 2a \cdot \left(\frac{a+c}{2}\right) + ac$$
$$\frac{9}{4} \cdot \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = 2a^2 + 2\frac{a^2+ac}{2} + ac$$
$$9(a^2+2ac+c^2) = 32a^2 + 16a^2 + 16ac + 16ac$$

Równanie można doprowadzić do postaci:

$$-39a^2 - 14ac + 9c^2 = 0 \text{ lub } 9c^2 - 14ac - 39a^2 = 0$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $-39a^2 - 14ac + 9c^2$ (a traktujemy jako zmienną) jest równy

$$\Delta = 1600c^2,\ \sqrt{\Delta} = 40c$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $9c^2 - 14ac - 39a^2$ (c traktujemy jako zmienną) jest równy

$$\Delta = 1600a^2,\ \sqrt{\Delta} = 40a$$

Stąd pierwiastki równań odpowiednio $-39a^2 - 14ac + 9c^2 = 0$ i $9c^2 - 14ac - 39a^2 = 0$ są równe:

$$a_1 = -\frac{9}{13}c \text{ lub } a_2 = \frac{1}{3}c \text{ oraz } c_1 = -\frac{13}{9}a \text{ lub } c_2 = 3a$$

Rozwiązania $a_1 = -\frac{9}{13}c$ i $c_1 = -\frac{13}{9}a$ sa sprzeczne z założeniem o dodatniości wyrazów ciągu arytmetycznego.
A zatem $b = \frac{2}{3}c$ lub $b = 2a$

Iloraz ciągu geometrycznego jest równy $q = \frac{\frac{2}{3b}}{\frac{1}{a}} = \frac{2a}{3b}$, a zatem $q = \frac{1}{3}$.

Uwaga
Możemy też w rozwiązaniu zauważyć, że $q = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b}$ i $c = 2b - a$.
Wówczas otrzymamy równanie kwadratowe: $3q^2 + 8q - 3 = 0$
Wyznaczamy dwa rozwiązania tego równania: $q = -3$ lub $q = \frac{1}{3}$.
Zauważamy, że tylko $q = \frac{1}{3}$ spełnia warunki zadania.

6.10. W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.
Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n)

Rozwiązanie:

Z warunku

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

oraz z informacji o monotoniczności ciągu otrzymamy iloraz q ciągu (a_n) :

$$\frac{a_3 \cdot q^2 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

$$q^2 + 1 = \frac{29}{25}$$

$$q = \frac{2}{5} \text{ lub } q = -\frac{2}{5}$$

Ciąg jest ściśle monotoniczny, więc $q = \frac{2}{5}$.
Ponieważ dla $q = \frac{2}{5}$ ciąg ten jest zbieżny, więc sumę

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = 6$$

możemy zapisać następująco:

$$\frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2} = 6$$

i otrzymujemy

$$\frac{a_1 \cdot \frac{2}{5}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = 6$$
$$a_1 = \frac{63}{5}$$

Wzór ogólny ciągu ma postać: $a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

6.11. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.
Rozważmy ciągi $a_n = \sqrt[n]{7^n}$ oraz $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$ określone dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Zauważmy, że $7^n \le 6^n + 7^n \le 2 \cdot 7^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\sqrt[n]{7^n} \le \sqrt[n]{6^n + 7^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$$

Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n} = 7$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n} = 1 \cdot 7 = 7$, więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n} = 7$

6.12. W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) , spełniona jest równość $a_1+a_2+a_3=\frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3, są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

Rozwiązanie:

I sposób
Sumując wyrazy ciągu geometrycznego otrzymujemy równość

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4} \qquad (1)$$

Niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym.
Zatem $b_1 = a_1 q^2, b_2 = a_1 q, b_4 = a_1$, więc różnica tego ciągu $r = a_1 q - a_1 q^2$ oraz $b_4 = b_1 + 3r$, czyli $a_1 = a_1 q^2 + 3(a_1 q - a_1 q^2)$.
Stąd wynika, że $a_1 = 3a_1 q - 2a_1 q^2$ i $a_1(2q^2 - 3q + 1) = 0$.
Ponieważ z równości (1) wynika, że $a_1 \neq 0$, więc $2q^2 - 3q + 1 = 0$.
Zatem $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$.

Dla $q = 1$ ciąg (a_n) jest stały. Stąd ciąg (b_n) też jest stały. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n) może być ciągiem rosnącym. Otrzymujemy wtedy $r = \frac{1}{4}a_1$.
Z równości (1) otrzymujemy $a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{21}{4}$, a stąd wynika, że $a_1 = 3$.

II sposób
W ciągu arytmetycznym $b_1 = a_3, b_2 = a_3 + r, b_4 = a_3 + 3r$, gdzie $r > 0$
Ponieważ ciąg $(a_3 + 3r, a_3 + r, a_3)$ jest ciągiem geometrycznym, więc zachodzi równość

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3$$

skąd wynika, że $a_3^2 + 2a_3r + r^2 = a_3^2 + 3a_3r$, a zatem $r^2 = a_3r$
Ponieważ z założenia $r > 0$, więc $r = a_3$. Podana suma trzech wyrazów jest zatem równa

$$4a_3 + 2a_3 + a_3 = \frac{21}{4}$$

Otrzymujemy $a_3 = \frac{3}{4}$. Wtedy $a_1 = b_4 = 4a_3 = 3$.

6.13. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}$

Rozwiązanie:

Przekształcamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} [\frac{(3n+2)^2}{(2n-1)^2} - 1] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2}{(2n-1)^2} - 1 =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n^2+12n+4}{4n^2+4n+1} - 1 = 1\frac{1}{4}$

6.14. Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a + 100, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy
ciągu (a, b, c, d).

Rozwiązanie:

Oznaczmy różnicę ciągu arytmetycznego przez r. Ciąg jest rosnący, więc $r > 0$.
Z treści zadania otrzymujemy:

$$(a + 3r)^2 = 2(a^2 + (a + r)^2 + (a + 2r)^2)$$

Wyrazimy a za pomocą r :

$$a^2+6ar+9r^2=2(a^2+a^2+2ar+r^2+a^2+4ar+4r^2)$$
$$5a^2+6ar+r^2=0$$
$$5a^2+5ar+ar+r^2=0$$
$$(5a+r)(a+r)=0$$
$$a=-\frac{1}{5}r \text{ lub } a=-r$$

Gdy $a=-r$, to $b=0, c=r, d=2r$ i wówczas ciąg $(a+100,b,c)$ przyjmuje postać $(-r+100,0,r)$. Zatem $0^2=r\cdot(-r+100)$, skąd otrzymujemy $r=0$ lub $r=100$.
Rozwiązanie $r=0$ nie spełnia warunków zadania, ponieważ ciąg ma być rosnący.
Rozwiązanie $r=100$ odrzucamy, gdyż ciąg $(-100+100,0,100)$ nie jest geometryczny.
Gdy $a=-\frac{1}{5}r$, to $b=\frac{4}{5}r,\ c=\frac{9}{5}r,\ d=\frac{14}{5}r$ i ciąg $(a+100,b,c)$ przyjmuje postać $\left(-\frac{1}{5}r+100,\frac{4}{5}r,\frac{9}{5}r\right)$. Zatem $\left(\frac{4}{5}r\right)^2=\frac{9}{5}r\cdot\left(-\frac{1}{5}r+100\right)$

Stąd $r=0$ lub $\frac{16}{25}r=\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}r+100\right)$. Rozwiązanie $r=0$ odrzucamy, gdyż nie spełnia warunków zadania.
Rozwiązujemy równanie $\frac{16}{25}r=\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}r+100\right)$ i otrzymujemy $\frac{16}{25}r=-\frac{9}{25}r+180, r=180$. Wtedy $a=-\frac{1}{5}r=-36, b=144, c=324$ i $d=504$.
Ciąg $(-36+100,144,324)$ jest geometryczny (o ilorazie równym $\frac{9}{4}$).

Rozwiązaniem jest ciąg o wyrazach $a=-36, b=144, c=324$ i $d=504$.

6.15. Pierwszy wyraz a_1 nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\sqrt{2}$, natomiast suma pierwszych trzech jego wyrazów jest równa $\frac{7}{4}\sqrt{2}$.
Szereg nieskończony $a_1+a_2+a_3+\cdots$ jest zbieżny. Oblicz jego sumę.

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem danego ciągu geometrycznego.
Z założenia, $a_1=\sqrt{2}$ oraz

$$a_2+a_3=\sqrt{2}q+\sqrt{2}q^2=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Otrzymujemy stąd równanie kwadratowe

$$q^2+q-\frac{3}{4}=0$$

którego pierwiastkami są $\frac{1}{2}$ i $-\frac{3}{2}$. Pierwsze dwa warunki zadania spełniają zatem dwa ciągi (o ilorazach $\frac{1}{2}$ i $-\frac{3}{2}$.), lecz tylko szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ jest zbieżny. Ze wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sqrt{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Pochodna funkcji
Założmy, że mamy daną funkcję $f(x)$ oraz argument x_0, w otoczeniu, którego funkcja $f(x)$ jest określona. Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 oznaczamy symbolem:

$$f'(x_0)$$

i definiujemy jako granicę:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in R$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, gdy $g(x) \neq 0$

Styczna do wykresu funkcji
Prosta styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ wyraża się wzorem:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Współczynnik kierunkowy prostej stycznej, to $f'(x_0)$.
Równanie prostej stycznej zapisane w postaci kierunkowej, to:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b), czyli ma pochodną w każdym punkcie tego przedziału oraz jeżeli:

a) Dla każdego $x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, to funkcja jest stała w tym przedziale

b) Dla każdego $x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$, to funkcja jest rosnąca w tym przedziale

c) Dla każdego $x \in (a, b)$ $f'(x) < 0$, to funkcja jest malejaca w tym przedziale

PRZYKŁADY

7.1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (1,0)$.

Rozwiązanie:

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest równy pochodnej $f'(x_0)$ w tym punkcie.
Liczymy pochodną
$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' = \frac{1(x^2+1)-(x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ $f'(1) = \frac{-1+2+1}{4} = \frac{1}{2}$
Sposób I
Korzystamy ze wzoru

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

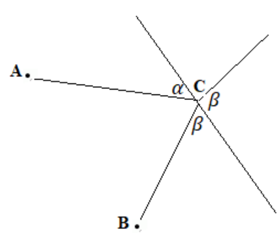
na styczna do wykresu $y = f(x)$ w punkcie $x = x_0$.
Mamy zatem $y = \frac{1}{2}(x-1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
Sposób II
Wiemy, że styczna jest postaci $y = \frac{1}{2}x + b$. Współczynnik b wyliczamy z tego, że ma ona przechodzić przez punkt $(1,0)$.

$$0 = \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Styczna ma więc równanie $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

7.2. Dane są punkty $A = (2,3), B = (5,4)$. Na prostej o równaniu $y = 5$ wyznacz punkt C tak, aby łamana ACB miała jak najmniejszą długość. Odpowiedź uzasadnij.

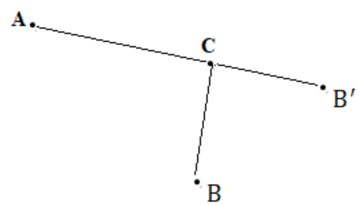
Rozwiązanie:



Punkt B' jest obrazem punktu B w symetrii względem danej prostej, więc

$$AC + CB = AC + CB'$$

i ta ostatnia liczba jest najmniejsza, gdy punkty A, C i B' leżą na jednej prostej, co sprowadza się do warunku $\alpha = \beta$.



Wyznaczamy obraz punktu B przy symetrii względem tej prostej: $B' = (5,6)$.
Wyznaczamyrównanie prostej AB' i wyznaczamy jej punkt C wspólny z prosta $y = 5$.
Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty
$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

I otrzymujemy

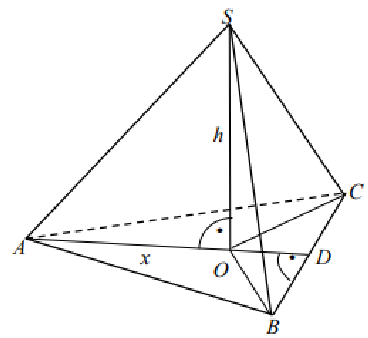
$$(y - 3)(5 - 2) - (6 - 3)(x - 2) = 0$$
$$(y - 3) - (x - 2) = 0$$
$$y - x - 1 = 0$$

Zatem dla $y = 5$ mamy $x = 4$
Współrzędne szukanego punktu to $C = (4,5)$

7.3. Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest
równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie

Niech $x = |AO| = |BO| = |CO|$ (zobacz rysunek) oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz $h = |SO|$ oznacza wysokość tego ostrosłupa.
Wówczas $x + h = 24$.



Wysokość AD w trójkącie ABC jest równa $|AD| = \frac{|AB|\cdot\sqrt{3}}{2}$. Zatem promień x okręgu opisanego na trójkącie ABC (podstawie ostrosłupa) jest równy: $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = \frac{|AB|\sqrt{3}}{3}$, stąd $|AB| = x\sqrt{3}$. Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa: $P = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$
Ponadto z równości $x + h = 24$ otrzymujemy $h = 24 - x$, gdzie $0 < x < 24$.
Zatem objętość tego ostrosłupa jest określona wzorem: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (24 - x)$,
czyli $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3 + 24x^2)$

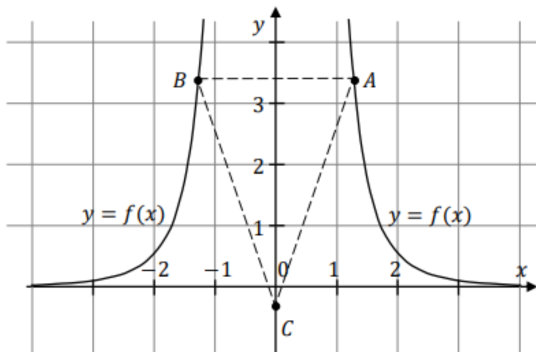
Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 24$ funkcja V określona wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3 + 24x^2)$ przyjmuje wartość największa.
Rozważamy funkcję $f(x) = -x^3 + 24x^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.
Wyznaczamy pochodną tej funkcji f: $f'(x) = -3x^2 + 48x$.
Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = 16, x_2 = 0$.
Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(16, +\infty)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $(0,16)$.
  Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0\rangle$ oraz $\langle 16, +\infty)$ i rosnąca w przedziale $\langle 0,16\rangle$

Ponieważ $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} f(x)$ dla $x \in (0,24)$, więc w przedziale $x \in (0,24)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że dla $x = 16$ funkcja V przyjmuje wartość największa.
Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(-16^3 + 24 \cdot 16^2) = 512\sqrt{3}$.
Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest największa i równa $V = 512\sqrt{3}$, gdy promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 16 .

7.4. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9}{x^4}$ dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $(0, -\frac{1}{3})$, a punkty A i B są położone symetrycznie względem osi Oy (zobacz rysunek). Oblicz współrzędne wierzchołków A i B, dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Rozwiązanie:



Oznaczmy $A = \left(a, \frac{9}{a^4}\right)$, gdzie $a > 0$. Wtedy $B = \left(-a, \frac{9}{a^4}\right)$. Podstawa AB trójkąta ABC ma długość $|AB| = 2a$, natomiast wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa $\frac{9}{a^4} + \frac{1}{3}$.
Wyznaczamy pole P trójkąta ABC :

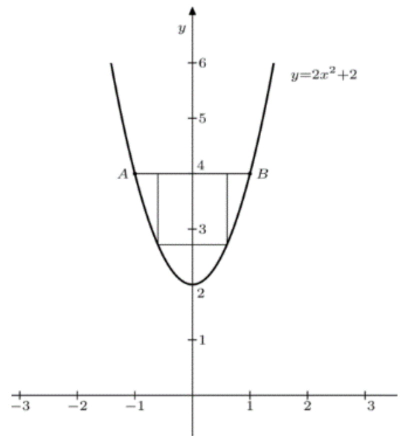
$$P = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \left(\frac{9}{a^4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{a^3} + \frac{1}{3}a \text{ dla } a > 0$$

Pochodna tej funkcji jest równa

$$P'(a) = \frac{-27}{a^4} + \frac{1}{3} = \frac{a^4 - 81}{3a^4}$$

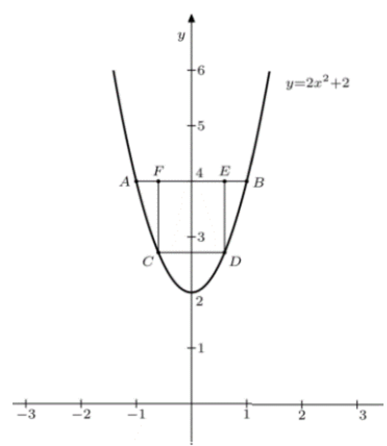
Obliczamy miejsca zerowe, badamy znak pochodnej i wyznaczamy przedziały monotoniczności funkcji P dla $a > 0$.
$P'(a) = 0$ wtedy, gdy $a^4 - 81 = 0$.
Stąd $a = 3$.
Dla $a \in (0,3)$ pochodna jest ujemna, więc funkcja P jest malejąca w przedziale $(0,3\rangle$.
Dla $a \in (3, +\infty)$ pochodna jest dodatnia, więc funkcja P jest rosnąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$. Funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $a = 3$.
Gdy $a = 3$, to wtedy $A = \left(3, \frac{1}{9}\right)$, $B = \left(-3, \frac{1}{9}\right)$ oraz $P(3) = \frac{9}{3^3} + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{4}{3}$.

7.5. Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku AB, gdzie $A = (-1,4)$ i $B = (1,4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + 2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.



Rozwiązanie:

Niech punkty C i D leżą na paraboli $y = 2x^2 + 2$, a punkty E i F leżą na odcinku AB (zobacz rysunek). Oznaczmy przez x odległość punktu D od osi Oy.



Wówczas punkt D ma współrzędne $D = (x, 2x^2 + 2)$, punkt C ma współrzędne $C = (-x, 2x^2 + 2)$. Punkty E i F leżą na prostej o równaniu $y = 4$, zatem ich współrzędne są równe: $E = (x, 4)$ i $F = (-x, 4)$.
Wyznaczamy długości boków CD i DE prostokąta $CDEF$:

$|CD| = 2x$ oraz $|DE| = 2 - 2x^2$ dla $0 < x < 1$

Zatem pole prostokąta $CDEF$ jest określone wzorem: $P(x) = 2x \cdot (2 - 2x^2)$, czyli

$P(x) = -4x^3 + 4x$ dla $0 < x < 1$

Rozważamy funkcję $f(x) = -4x^3 + 4x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.
Wyznaczamy pochodną tej funkcji f: $f'(x) = -12x^2 + 4$
Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$.
Ponieważ $P(x) = f(x)$ dla $x \in (0,1)$, więc w przedziale $x \in (0,1)$ funkcja $P(x)$ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.
Obliczamy wymiary prostokąta: $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, |DE| = 2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$
Największe pole ma prostokąt o wymiarach $\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}$. Jest ono równe $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

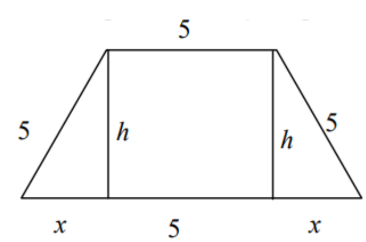
7.6. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5 . Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Rozwiązanie:

Niech $2x + 5$ oznacza długość dłuższej podstawy, a h wysokość trapezu. Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P = \frac{2 \cdot 5 + 2x}{2} \cdot h = (5 + x) \cdot h \text{ i } 0 < x < 5$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność $x^2 + h^2 = 5^2$, stąd $h = \sqrt{25 - x^2}$



Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$\begin{aligned} P(x) &= (5 + x) \cdot \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{(5 + x)^2 \cdot (25 - x^2)} = \\ &= \sqrt{(5 + x)^3 \cdot (5 - x)} = \sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625} \end{aligned}$$

gdzie $0 < x < 5$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 5$ funkcja P określona wzorem $P(x) = \sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625}$ przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa ($y = \sqrt{t}$) jest rosnąca, więc wystarczy zbadać funkcję $f(x) = -x^4 - 10x^3 + 250x + 625$. Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$f'(x) = -4x^3 - 30x^2 + 250$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = -5, x_2 = \frac{5}{2}$.

Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w przedziale $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, -5)$ oraz $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$,
- $f'(-5) = 0$.

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $\left\langle\frac{5}{2}, +\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle -\infty, \frac{5}{2}\right\rangle$.
Ponieważ $P(x) = \sqrt{f(x)}$ dla $x \in (0,5)$, więc w przedziale $(0,5)$ funkcja P ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja f. Stąd wynika, że w punkcie $x = \frac{5}{2}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.
Zauważmy wreszcie, że jeżeli $x = \frac{5}{2}$, to $2x + 5 = 10$. Zatem dłuższa podstawa ma długość 10

Obliczamy największe pole trapezu dla $x = \frac{5}{2}$:

$$P(x) = \left(5 + \frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{75}{4}\sqrt{3}$$

Największe pole ma trapez, którego dłuższa podstawa ma długość 10 .

Pole tego trapezu jest równe $\frac{75\sqrt{3}}{4}$

7.7. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, takich, że $x \neq -\sqrt{6}$ i $x \neq \sqrt{6}$.
Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = 1$.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = \frac{(2x^4+15)'(6-x^2)-(2x^4+15)(6-x^2)'}{(6-x^2)^2} =$$
$$= \frac{8x^3(6-x^2)+2x(2x^4+15)}{(6-x^2)^2} = \frac{2x(-2x^4+24x^2+15)}{(6-x^2)^2}$$
$$f'(1) = \frac{2(-2+24+15)}{(5)^2} = \frac{2\cdot 37}{25} = \frac{74}{25} = 2{,}96$$

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

Zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej $y = 10x + 9$.
Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 12x^2 - 2$.
Zauważamy, że dla $x = -1$ oraz dla $x = 1$ pochodna funkcji f ma wartość 10 i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej l.
Obliczamy wartość funkcji f w punkcie $x = -1$: $f(-1) = -1$ oraz w punkcie $x = 1$: $f(1) = 3$.
Punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ leży na prostej l, natomiast punkt o współrzędnych $(1,3)$
nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f, co kończy dowód.

7.8. Punkt $P = (10{,}2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy, że funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 + x + 2219$.
Równanie stycznej do krzywej w punkcie $P = (x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Z danych zadania wynika, że: $x_0 = 10$, $f(x_0) = f(10) = 2429$.
Pochodna funkcji f jest określona wzorem: $f'(x) = 4x + 1$
Wartość tej pochodnej dla argumentu $x_0 = 10$ jest równa

$$f'(x_0) = f'(10) = 4\cdot 10 + 1 = 41.$$

Ponieważ $f'(x_0) = a$, zatem $a = 41$.

Na podstawie równania stycznej do krzywej w danym punkcie mamy:

$$y - 2429 = 41(x - 10), \text{ a}$$

stąd po przekształceniach otrzymujemy: $y = 41x + 2019$.
Zatem $b = 2019$.

7.9. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Rozwiązanie:

Funkcja f jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest funkcją wielomianową.
Ponieważ $f(0) = 1$ oraz $f(2) = 64 - 32 - 8 + 1 = 25$ i funkcja jest ciągla na przedziale $(0,2)$, więc, na mocy twierdzenia Darboux, przyjmuje w przedziale $(0,2)$ wszystkie wartości pośrednie pomiędzy $f(0)$ a $f(2)$. Wobec tego istnieje taki argument $x \in (0,2)$, dla którego zachodzi $f(x) = 5$.
To oznacza, że liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji

7.10. Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2,2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2$ dla $x \in R$.
Obliczymy wartości funkcji f w kilku punktach przedziału $(-2,2)$:

$$f(-1) = (-1)^4 - 7 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 2 = 7$$
$$f(0) = -2$$
$$f(1) = 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 2 = 9$$

Funkcja f jest ciągła jako funkcja wielomianowa, więc na mocy twierdzenia Darboux funkcja f przyjmuje w przedziale $(-1,0)$ wszystkie wartości ze zbioru $(-2,7)$.
Zatem istnieje $x_1 \in (-1,0)$ takie, że $f(x_1) = 0$.
Podobnie, funkcja f przyjmuje w przedziale $(0,1)$ wszystkie wartości ze zbioru $(-2,9)$, więc istnieje $x_2 \in (0,1)$ takie, że $f(x_2) = 0$.
To oznacza, że w przedziale $(-2,2)$ równanie podane w treści zadania ma co najmniej dwa różne rozwiązania.

7.11. Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i żadna z krawędzi bryły nie jest krótsza niż 4.

Rozwiązanie:

Objętość każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c$$

gdzie $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$ jest długością jednej z krawędzi bryły.
Spośród rozpatrywanych prostopadłościanów oblicz objętość tego prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza.

W celu znalezienia prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza, należy zbadać funkcje $V(c)$.
Obliczamy pochodną funkcji V i obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(c) = 3c^2 - 40c + 128$$
$$V'(c) = 0$$
$$3c^2 - 40c + 128 = 0$$
$$\Delta = 64$$
$$c = 8 \text{ lub } c = \frac{16}{3}$$

Zbadamy monotoniczność funkcji V. Wiemy, że

$$V'(c) > 0 \text{ dla } c \in \left[4, \frac{16}{3}\right) \cup \left(8, \frac{28}{3}\right]$$
$$V'(c) < 0 \text{ dla } c \in \left(\frac{16}{3}, 8\right)$$

więc funkcja V jest rosnąca w przedziałach $\left[4, \frac{16}{3}\right]$ oraz $\left[8, \frac{28}{3}\right]$ funkcja V jest malejąca w przedziale $\left[\frac{16}{3}, 8\right]$.
Wiemy, że $V(4) = 256$, $V(8) = 256$ oraz $V\left(\frac{28}{3}\right) \approx 265$, więc najmniejsza możliwa objętość prostopadłościanu jest równa 256.

7.12. Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie 0 oddalonym od szczytu o $4\ \text{km}$, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem
$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t$ dla $t \in [0{,}24]$
gdzie x jest wyrażone w metrach, a $t -$ w godzinach.

Oś Ox jest skierowana do wierzcholka qóry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza qóry. Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

Rozwiązanie:

Najpierw wyznaczymy najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry.
Obliczamy pochodną funkcji x
$x'(t) = -3t^2 + 33t = 180 \quad dla\ t \in [0,24]$

i obliczamy jej miejsca zerowe:

$$x'(t) = 0$$

$$-3t^2 + 33t + 180 = 0$$
$$t^2 - 11t - 60 = 0$$
$$\Delta=361$$

$$t_1 = 15 \qquad t_2 < 0$$

Ponieważ:
$x'(t) > 0$ dia $t \in [0,15)$
$x'(t) < 0$ dla $t \in (15,24]$
więc
funkcja x jest rosnąca w przedziale $[0,15]$,
funkcja x jest malejaca w przedzisle $[15,24]$
Zatem $x_{\max} = x(15) = 3037{,}5$ i Syzyf zbliży się do wierzchołka góry na odległość $962{,}5$ m.
Obliczamy maksymalną wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę.
Niech v oznacza prędkość Syzyfa wtaczającego kulę.
Ponieważ v = x' , więc
$v(t)$ = $x'(t)$ = $-3t^2 + 33t + 180$ dla $t \in$ [0, 24]
Korzystamy z własności funkcji kwadratowej i obliczamy największą wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę:
$p = \frac{-\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = \frac{33}{2 \cdot (-3)} = \frac{11}{2}$ ∈ [0, 24]

$$v\left(\frac{11}{2}\right) > 0$$

Zatem największa wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę pod górę jest równa

$$v(5{,}5) = 270{,}75 \text{ m/h}.$$

7.13. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}+4\log_{\frac{1}{2}}x$ dla wszystkich $x>0$
Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Rozwiązanie:

Obliczymy wartości funkcji na krańcach przedziału $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{2}+2}+4\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=-\frac{4}{5}+4=3\frac{1}{5}$$
$$f(4)=\frac{2\cdot 4-3}{4+2}+4\log_{\frac{1}{2}}4=\frac{5}{6}-8=-7\frac{1}{6}$$

Zauważmy, że $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$ i $f(4)<0$
Funkcja f jest funkcją ciągłą, jako suma funkcji ciągłych. Ma zatem własność Darboux.
Dlatego w przedziale $\left[\frac{1}{2},4\right]$ przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $\left[-7\frac{1}{6},3\frac{1}{5}\right]$.
W szczególności przyjmuje wartość 0 dla pewnego $x_0\in\left[\frac{1}{2},4\right]$ To kończy dowód.

7.14. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=x^4+0{,}5\cdot(2x+1)^4$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.
Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pochodną funkcji f korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

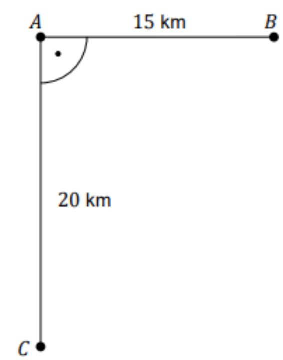
$$f'(x)=4x^3+0{,}5\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2 \text{ dla } x\in\mathbb{R}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f:
$4x^3+0{,}5\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2=0$
$x^3+(2x+1)^3=0$
$(x+2x+1)[x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2]=0$
$(3x+1)(3x^2+3x+1)=0$
$3x+1=0$ lub $3x^2+3x+1=0$
Pierwsze z tych równań ma rozwiązanie $x=-\frac{1}{3}$, natomiast drugie jest sprzeczne.
Sprawdzamy, czy w punkcie $x=-\frac{1}{3}$ funkcja f osiąga ekstremum.
Badamy monotoniczność funkcji f stosując rachunek pochodnych:
$$f'(x)=4x^3+0{,}5\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2=4(3x+1)(3x^2+3x+1)$$
$f'(x)>0$ dla $x\in\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$
$f'(x)<0$ dla $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$, więc

funkcja f jest malejąca w zbiorze $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$
funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$,
co oznacza, że w punkcie $x = -\frac{1}{3}$ funkcja f ma ekstremum lokalne, będące jednocześnie minimum globalnym. Funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 + 0{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{54}$$

7.15. Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi. O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp Tropiciele i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy Korsarze i przemieszczał się z prędkością 2 km/h
Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.



Rozwiązanie:

Niech d_1 będzie odległością (w km) zastępu .Tropiciele od miejscowości A.
Wyznaczamy zalezność d_1 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości A:

$$d_1(t) = 4t \text{ dla } t \in [0{,}5]$$

Niech d_2 będzie odległością (w km) zastępu Korsarze od miejscowości A.
Wyznaczamy zależność d_2 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości B:

$$d_2(t) = 15 - 2t \text{ dla } t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$$

Odległość d między zastępami w chwili t jest równa

$$d(t) = \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)} = \sqrt{16t^2 + (15-2t)^2} \text{ dla } t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$$

Badamy, dla jakiego argumentu $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.
Ponieważ funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją rosnąca w przedziale $[0, +\infty)$, więc funkcja d osiąga wartośc najmniejszą wtedy, gdy funkcja
$f(t) = 16t^2 + (15-2t)^2 = 20t^2 - 60t + 225$ określona dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$ osiąga wartość najmniejszą.

Funkcja f jest funkcją kwadratowa, która osiąga wartość najmniejszą dla

$$t = \frac{60}{2 \cdot 20} = 1{,}5 \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$$

Zatem funkcja d osiaga wartość najmniejszą dla argumentu $t = 1{,}5$.
Odległość między zastępami harcerzy będzie najmniejsza o godzinie 10:30.

7.16. Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144 m^2. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:
– 100 zł za 1 m^2 dna
– 75 zł za 1 m^2 ściany bocznej.
Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy następujące oznaczenia:
x –długość krawędzi zbiornika (w metrach)
h – wysokość zbiornika (w metrach).
Pojemność zbiornika ma wynosić $144\ \mathrm{m}^2$, więc $144 = x^2h$. Stąd $h = \frac{144}{x^2}$.
Koszt f wykonania zbiornika jest równy $f = 100x^2 + 75 + 4xh$, więc

$$f(x) = 100x^2 + 4x \cdot \frac{144}{x^2} \cdot 75$$

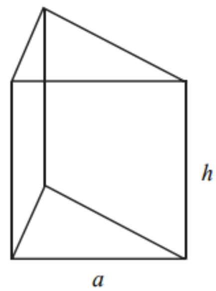
gdzie $x \in [4{,}9]$
Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = 200\ \mathrm{cm} - \frac{43200}{x^2}$$

Miejscem zerowym pochodnej funkcji f jest $x = 6$.
Badamy monotoniczność funkcji f :
$f'(x) > 0$ dla $x \in (6{,}9)$
$f'(x) < 0$ dla $x \in (4{,}6)$
Zatem
funkcja f jest malejąca w przedzale $x \in [4{,}6]$
funkcja f jest rosnąca w przedziale $x \in [6{,}9]$.
Stąd funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu 6 .
Wtedy $h = 4$.
Wymiary zbiornika da którego koszt wykonania jest najmniejszy to $6\ \mathrm{m} \times 6\ \mathrm{m} \times 4\ \mathrm{m}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

7.17. Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości V = 2. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.
Oblicz to najmniejsze pole.



Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:
a – krawędź podstawy, h – wysokość graniastosłupa.

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Stąd otrzymujemy:

$$2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Zatem $h = \frac{8}{a^2\sqrt{3}}$.
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h jest równe:

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot \frac{8}{a^2\sqrt{3}}$$

Stąd po podstawieniu h i przekształceniach otrzymujemy:

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{24}{a\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$$

Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $a \in (0; +\infty)$.
Zapiszmy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jako funkcję f zmiennej a :

$$P_c = f(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a} = \frac{a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a}, \text{ dla } a \in (0; +\infty)$$

Wyznaczamy wartość najmniejszą funkcji f w przedziale $a \in (0; +\infty)$.
W tym celu obliczmy pochodną funkcji f :

$$f'(a) = \frac{3a^2\sqrt{3} \cdot 2a - \left(a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}\right) \cdot 2}{4a^2} = \frac{4a^3\sqrt{3} - 32\sqrt{3}}{4a^2}$$

Szukamy miejsc zerowych pochodnej funkcji f :

$$\frac{4a^3\sqrt{3} - 32\sqrt{3}}{4a^2} = 0$$

Ustalamy, że $a = 2$.
W przedziale $a \in (0; +\infty)$ pochodna funkcji f ma tylko jedno miejsce zerowe $a = 2$.

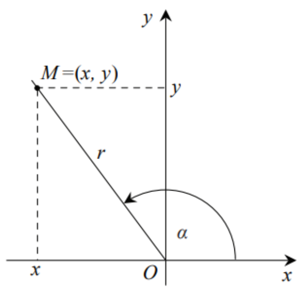
Ponadto
$f'(a) > 0$ dla $a \in (2; +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0; 2)$.
Wynika stąd, że dla $a = 2$ funkcja f ma minimum lokalne, które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji fw przedziale $(0, +\infty)$, ponieważ funkcja f w przedziale $\langle 2, +\infty)$ jest rosnąca, a w przedziale $(0,2\rangle$ funkcja f jest malejąca.
Gdy $a = 2$, to $h = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8}{2^2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Natomiast pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe:

$$Pc = \frac{a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a} = \frac{2^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{24\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

Najmniejsze pole powierzchni całkowitej równe $6\sqrt{3}$ ma graniastosłup prawidłowy trójkątny o wymiarach: krawędź podstawy $a = 2$ i wysokość $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

VIII. TRYGONOMETRIA

Definicje funkcji trygonometrycznych



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k - \text{ całkowite}$$

Funkcje sumy i różnicy katów
Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

Funkcje podwojonego kata

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Wybrane wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha\qquad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha\qquad \cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha\qquad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha\qquad \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha\qquad \cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha\qquad \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

Okresowość funkcji trygonometrycznych

$\sin(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\sin\alpha$ $\cos(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\cos\alpha$ $\operatorname{tg}(\alpha+k\cdot 180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha,\ k-$ całkowite

PRZYKŁADY

8.1. Równanie $\sin^2 x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie $\sin^2 x = \sin x$ do postaci $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$, zatem $\sin x = 0$ lub $\sin x = 1$.
Rozwiązaniami równania $\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ jest $x = 0$ oraz $x = \pi$,
a rozwiązaniem równania $\sin x = 1$ jest $x = \frac{\pi}{2}$. Stąd równanie $\sin^2 x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ ma dokładnie 3 rozwiązania.

8.2. Rozwiąż równanie $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie, korzystając ze wzoru na sumę sinusów:
$2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$.
Stąd $\cos 2x \cdot (2\sin 3x - 1) = 0$.
Zatem $\cos 2x = 0$ lub $2\sin 3x - 1 = 0$
Rozwiązaniami równania $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$ są liczby:
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowita, lub
$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowita, lub
$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

8.3. Rozwiąż równanie $-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$ w przedziale $< 0, 2\pi >$.

Rozwiązanie:

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, sprowadzamy równanie

$$-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$$

do równania z jedną funkcją trygonometryczną:

$$-2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x + 3 = 0$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą, np. $\sin x = t, t \in \langle -1, 1 \rangle$.
Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t :

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

Rozwiązaniem równania są liczby $t_1 = -1,\ t_2 = -\frac{1}{2}$.
Powracając do podstawienia, otrzymujemy: $\sin x = -1$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$, a stąd dane równanie w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$ ma rozwiązania:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi$$

8.4. Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość:

$$4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha.$$

Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) = (a^2 + b^2)\cdot((a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2)$$

przekształcamy wyrażenie $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) &= 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) = \\ &= 4(1 - 3\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

Przekształcamy teraz prawą stronę równości, korzystając ze wzoru na cosinus kąta podwojonego.

$$\begin{aligned} 1 + 3\cos^2 2\alpha &= 1 + 3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 = 1 + 3((\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 4\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) = \\ &= 1 + 3(1 - 4\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) = 4 - 12\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha = 4(1 - 3\sin^2 \alpha\cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

To kończy dowód.

8.5. Rozwiąż nierówność $\cos 5x > \frac{1}{2}$ dla $-\pi \le x \le \pi$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\cos 5x > \frac{1}{2}$.
Zatem $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 5x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowita,
czyli $-\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} < x < \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Rozwiązaniami tej nierówności dla $-\pi \le x \le \pi$ są:

$-\frac{13\pi}{15} < x < -\frac{11\pi}{15}$ lub $-\frac{7\pi}{15} < x < -\frac{5\pi}{15}$ lub $-\frac{\pi}{15} < x < \frac{\pi}{15}$ lub $\frac{5\pi}{15} < x < \frac{7\pi}{15}$ lub $\frac{11\pi}{15} < x < \frac{13\pi}{15}$

8.6. Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x.$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie i otrzymujemy:

$$\cos x\left[2\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\sin x$$
$$\sin x\cdot\cos x-\frac{1}{2}\sin x=0,$$
$$\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$\sin x=0 \text{ lub } \cos x-\frac{1}{2}=0$$

Rozwiązania to:

$$x=k\pi \text{ lub } x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \text{ lub } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

8.7. Rozwiąż nierówność

$$(2-\cos x)^2\le 4\sin^2\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}+4{,}75$$

w zbiorze $(0,\pi)$

Rozwiązanie:

Przekształcamy nierówność podaną w treści zadania do prostszej postaci. Skorzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta:

$$(2-\cos x)^2 \le 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4\frac{3}{4}$$
$$\cos^2 x - 4\cos x + 4 \le -4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 4\frac{3}{4}$$
$$\cos^2 x - 4\cos x + 4 \le -4\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) + 4\frac{3}{4}$$
$$\cos^2 x \le \frac{3}{4}$$
$$|\cos x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } \cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z wykresu funkcji cosinus i odczytujemy rozwiązania ostatnich dwóch nierówności w przedziale $(0,\pi)$:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6},\pi\right) \text{ i } x \in \left(0,\frac{5}{6}\pi\right]$$

Otrzymujemy rozwiązanie: $x \in< \frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi >$

8.8. Rozwiąż równanie $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla x∈ $\langle 0, 2\pi \rangle$.
Rozwiązanie:

Przekształcamy dane równanie w sposób równoważny:

$$3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$$
$$3(1-2\sin^2 x) + 10(1-\sin^2 x) = 24\sin x - 3$$
$$3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3$$
$$16 - 16\sin^2 x = 24\sin x$$
$$16\sin^2 x + 24\sin x - 16 = 0$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Niech $t = \sin x$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$
$$\Delta = 3^2 + 4\cdot 2\cdot 2 = 9 + 16 = 25$$
$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$
$$t_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Równanie $\sin x = -2$ jest sprzeczne, a równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0,2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

8.9. Rozwiąż równanie cos 2x = $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale ⟨0, π⟩.

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

więc równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ można zapisać w postaci równoważnej

$$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Jego rozwiązaniami są liczby x spełniające warunek

$$2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.
Stąd $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$
Zatem rozwiązaniami równania $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ są liczby: $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{7\pi}{12}$

8.10. Wykaż, że prawdziwa jest tożsamość

$$\cos 2x\cos x - \sin 4x\sin x = \cos 3x\cos 2x$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy niezależnie obie strony tożsamości:

$$\begin{aligned} L &= \cos 2x\cos x - \sin 4x\sin x = \cos 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x\sin x \\ &= \cos 2x(\cos x - 4\sin x\cos x\sin x) = \cos 2x\cos x(1 - 4\sin^2 x), \\ P &= \cos 3x\cos 2x = \cos(2x + x)\cos 2x = (\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x)\cos 2x \\ &= \left((1 - 2\sin^2 x)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x\right)\cos 2x = \cos x\cos 2x(1 - 4\sin^2 x) \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathrm{L} = \mathrm{P}$ dla każdego x, zatem tożsamość została wykazana.

8.11. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \log(1 + \cos x)}{(1 - \sqrt{x - 1})\sqrt{5 - x}}$$

Rozwiązanie:

Wzór określający wartości funkcji narzuca zestawione niżej ograniczenia.
1° Argument x funkcji tangens musi spełniać warunek

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \boldsymbol{Z})$$

2° Argument funkcji logarytm musi być dodatni, tzn. musi być

$$1 + \cos x > 0 \Rightarrow \cos x > -1 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi \ (k \in \boldsymbol{Z})$$

3° Liczba pierwiastkowana nie może być ujemna, zatem musi być

$$x - 1 \geq 0 \text{ i } 5 - x \geq 0, \text{ tzn. } x \geq 1 \text{ i } x \leq 5$$

4° Mianownik nie może zerować sie, zatem musi być

$$(1 - \sqrt{x - 1})\sqrt{5 - x} \neq 0, \text{ tzn. } x \neq 2 \text{ i } x \neq 5$$

Koniunkcja powyższych warunków daje dziedzinę

$$D_f = \langle 1,5) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, 2, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\} =< 1, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\right) \cup (2, \pi) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 5\right).$$

8.12. Rozwiąż równanie:

$$\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzorów na sinus sumy i cosinus sumy kątów:

$$\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Stąd $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Z ostatniej równości otrzymujemy

$$2x = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \text{ lub } 2x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, a stąd

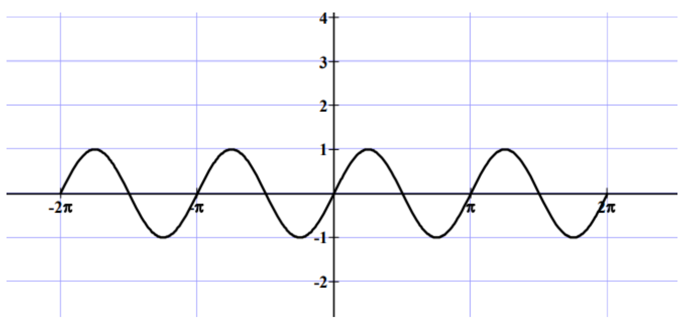
$$x = -\frac{1}{8}\pi + k\pi \text{ lub } x = \frac{1}{8}\pi + k\pi$$

przy dowolnej liczbie całkowitej k.

8.13. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

Rozwiązanie:

Rysujemy wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

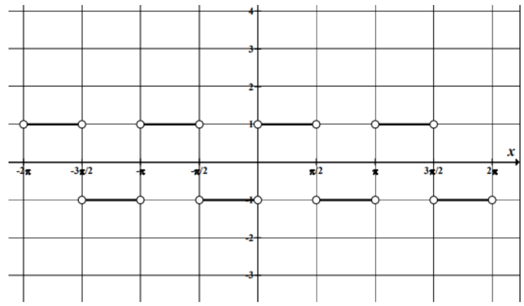


Wyznaczam dziedzinę funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$: $\sin 2x \neq 0$ dla $x \neq \frac{k\pi}{2}$
Na podstawie wykresu $y = \sin 2x$ określmy wzór funkcji:

$$y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \sin 2x > 0 \\ -1 & \text{dla} \quad \sin 2x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{dla} \quad x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{cases}$$

Wykonujemy wykres tej funkcji i odczytujemy z wykresu rozwiązanie



Rozwiązaniem nierówności $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$ jest zbiór:

$$x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

8.14. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.
a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

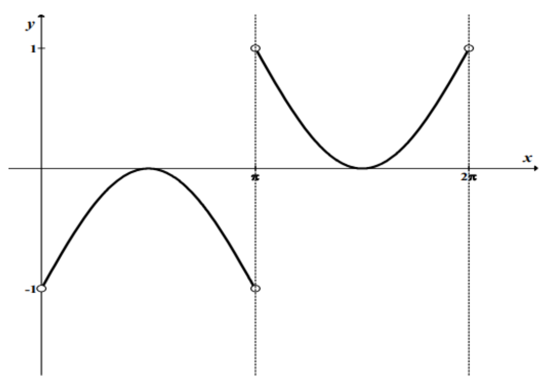
Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej i zapisuję wzór funkcji f w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x - \sin x}{\sin x} & \text{dla } \sin x > 0 \\ \dfrac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x} & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & \text{dla } \sin x > 0 \\ \sin x + 1 & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$$

Szkicujemy wykres funkcji w podanym zbiorze:



Na podstawie wzoru wyznaczamy miejsca zerowe funkcji: $f(x) = 0$ dla x takich, że $sinx - 1 = 0$ lub $sinx + 1 = 0$, czyli dla $x = \frac{\pi}{2}$, oraz $x = \frac{3\pi}{2}$.

8.15. Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzór na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x :

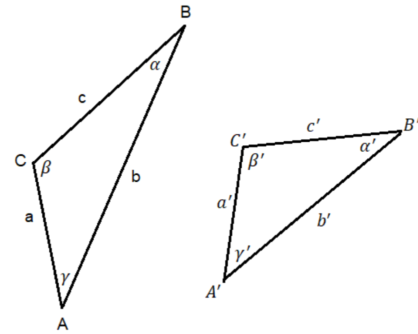
$$(2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadoma, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1,1 \rangle$.
Otrzymujemy równanie kwadratowe $2t^2 - 3t + 1 = 0$.
Rozwiązujemy równanie kwadratowe, otrzymując: $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$.
Rozwiązujemy równania $\cos x = 1$ i $\cos x = \frac{1}{2}$.
Zapisujemy rozwiązania równań:
$x = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowita lub
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowita lub
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowita.

IX. PLANIMETRIA

Cechy podobieństwa trójkątów:

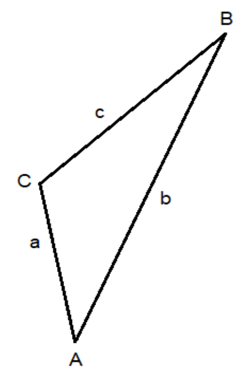


(BBB) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$

(KKK)$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

(BKB)$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \gamma = \gamma' \Rightarrow \alpha = \alpha', \beta = \beta', \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$

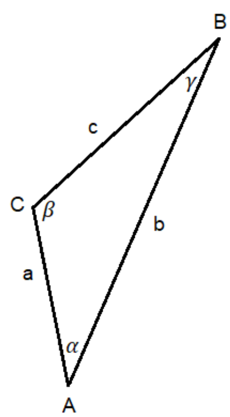
Twierdzenia o bokach trójkąta :



$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$c + a > b$$

Lub

$$a > |c - b|$$
$$b > |c - a|$$
$$c > |b - a|$$



Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

R - promień okręgu opisanego na danym trójkącie

Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Wzory na pole trójkąta

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} \; P_{\triangle ABC} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\triangle ABC} = rp \; P_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

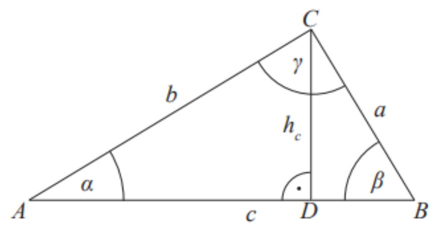
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym
Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

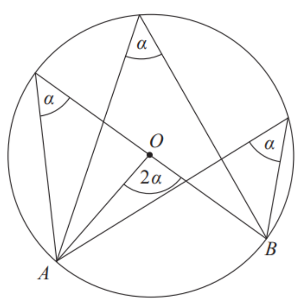
$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$



Kąty w okręgu

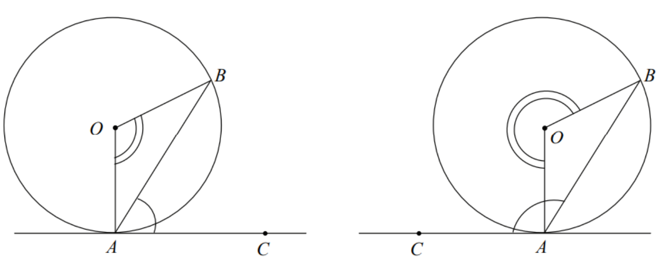


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary katów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku,
są równe.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na łukach równych, są równe.

Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwa

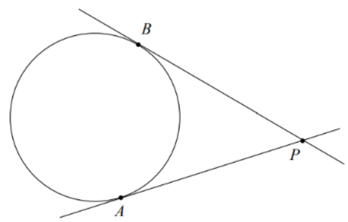


Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Wtedy $|\measuredangle AOB| = 2 \cdot |\measuredangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to

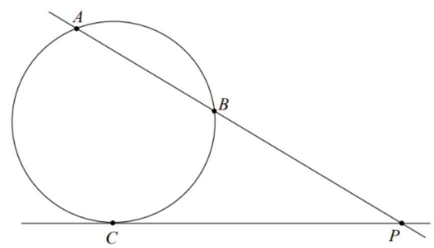
$$|PA| = |PB|$$



Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

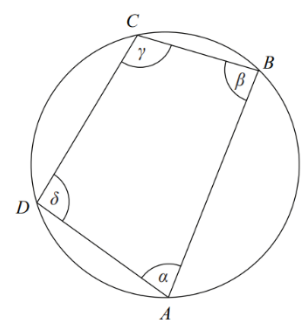
Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



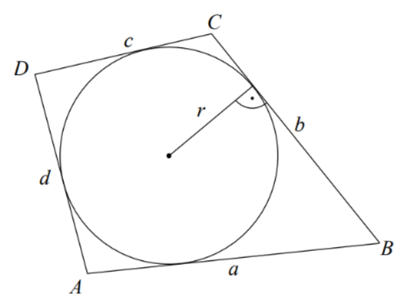
Okrąg opisany na czworokącie Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$$



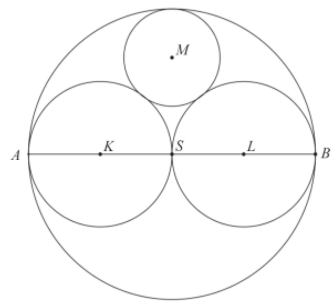
Okrąg wpisany w czworokąt W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$



PRZYKŁADY

9.1. Dany jest okrąg o średnicy AB i środku S oraz dwa okręgi o średnicach AS i BS. Okrąg o środku M i promieniu r ma z każdym z danych okręgów dokładnie jeden punkt wspólny (zobacz rysunek). Wykaż, że $r = \frac{1}{6}|AB|$.

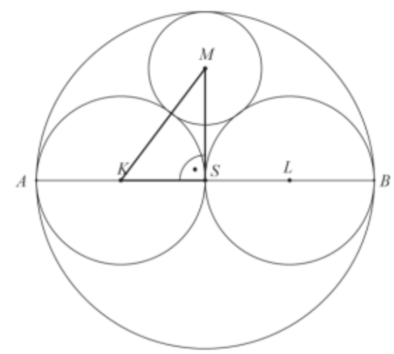


Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, niech ponadto r_S oznacza promień okręgu o środku w punkcie S i średnicy AB.
Wtedy $|AB| = 2(|AK| + |LB|)$ oraz

$$r_S = |AS| = \frac{1}{2}|AB| \text{i} |KS| = \frac{1}{4}|AB| = \frac{1}{2}r_S.$$

Trójkąt KLM jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek KL. Punkt S jest środkiem odcinka KL.



Zatem punkty K, S, M są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym $|KS|^2 + |MS|^2 = |KM|^2$ przy czym

$$|MS| = \frac{1}{2}|AB| - r = r_S - r$$

oraz

$$|KM| = \frac{1}{4}|AB| + r = \frac{1}{2}r_S + r$$

Stąd mamy kolejno:

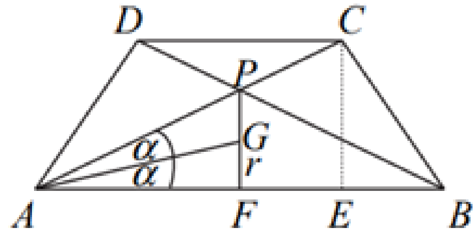
$$\left(\frac{1}{2}r_S\right)^2 + (r_S - r)^2 = \left(\frac{1}{2}r_S + r\right)^2 \ \frac{1}{4}r_S^2 + r_S^2 - 2r_S \cdot r + r^2 = \frac{1}{4}r_S^2 + r_S \cdot r + r^2 \ r_S^2 = 3r_S \cdot r$$

Po wykorzystaniu zależności $\frac{1}{2}|AB| = r_S$ otrzymujemy: $\frac{3r}{\frac{1}{2}|AB|} = 1$.

Zatem $r = \frac{1}{6}|AB|$, co kończy dowód.

9.2. W trapezie równoramiennym ABCD, w którym AB||CD, dane są AB = 84 , CD = 36 , BC= AD = 40 . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABP, gdzie P jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu.

Rozwiązanie:



Wprowadzamy oznaczenia: $|\sphericalangle FAP| = 2\alpha, |FG| = r$.
W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BEC, obliczamy wysokość CE trapezu

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32$$

W trójkącie AEC mamy $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$.

Korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta, obliczamy kolejno:

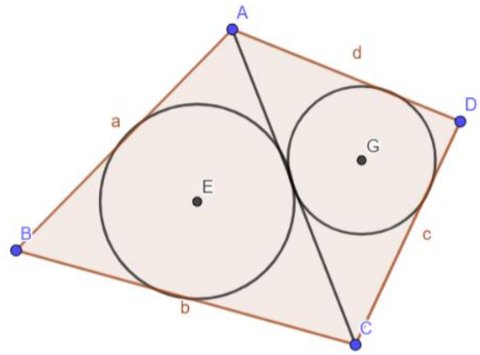
$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{8}{15}$$
$$15\operatorname{tg}\alpha = 4 - 4\operatorname{tg}^2\alpha$$
$$4\operatorname{tg}^2\alpha + 15\operatorname{tg}\alpha - 4 = 0$$
$$\Delta = 289$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-15 + 17}{8} = \frac{1}{4}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo α jest kątem ostrym.
Obliczamy promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABP :

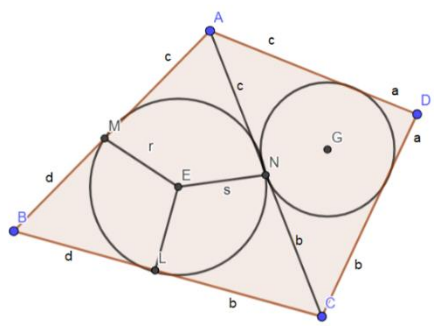
$$r = |AF| \cdot \operatorname{tg}\alpha = 42 \cdot \frac{1}{4} = 10{,}5$$

9.3. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne.
Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie:



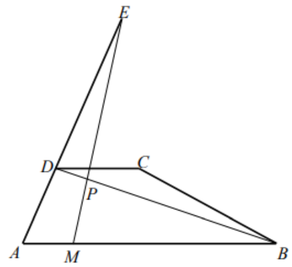
Aby wykazać, że w czworokąt można wpisać okrąg, trzeba pokazać, że sumy przeciwległych boków są sobie równe.



Jeżeli na rysunku zaznaczymy równe odcinki łączące wierzchołki czworokąta z punktami styczności odpowiednich okręgów, to widzimy, że obie sumy przeciwległych boków są równe i wynoszą $a + b + c + d$.

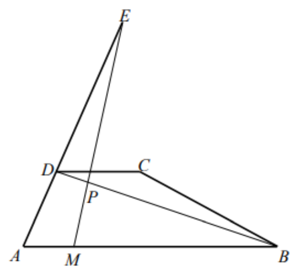
9.4. Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3 \cdot |AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4 \cdot |AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BDw punkcie P (zobacz rysunek).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020



Udowodnij, że $|BP| = 6 \cdot |PD|$

Rozwiązanie:



Niech N oznacza punkt przecięcia odcinka EM z prostą DC.

Trójkąt AME jest podobny do trójkąta DNE (kąty *MAE* i NDE są równe oraz kąty *AME* i DNE są równe, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|AM|}{|AE|} = \frac{|DN|}{|DE|}$$

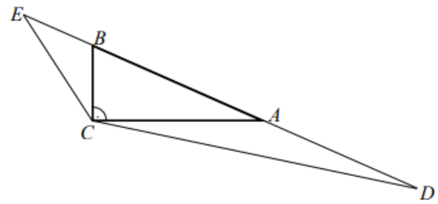
ale $|AE| = 3 \cdot |AD|$, więc $|DN| = \frac{2}{3} \cdot |AM|$.
Trójkąt MBP jest podobny do trójkąta NDP (kąty MBP i NDP sa równe oraz kąty BMP i DNP, gdyż proste AB i DC sa równolegle). Stąd

$$\frac{|BP|}{|BM|} = \frac{|DP|}{|DN|}$$

ale $|BM| = 4 \cdot |AM|$, więc $|BP| = \frac{4 \cdot |AM| \cdot |DP|}{|DN|} = \frac{4 \cdot |AM|}{\frac{2}{3}|AM|} \cdot |DP| = 6 \cdot |DP|$.

To kończy dowód.

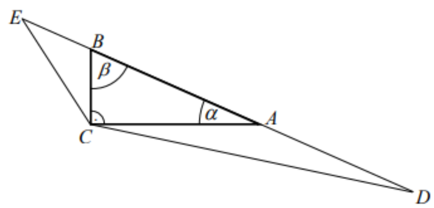
9.5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech $\alpha = |\measuredangle BAC|, \beta = |\measuredangle ABC|$ (zobacz rysunek).



Kąty CAD i CBE to katy przylegle odpowiednio do kątów BAC i ABC trójkąta ABC, więc

$$|\measuredangle CAD| = 180° - \alpha \text{ oraz } |\measuredangle CBE| = 180° - \beta$$

Trójkąty CAD i CBE sa równoramienne, więc

$$|\measuredangle DCA| = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} \text{ oraz } |\measuredangle ECB| = \frac{180° - (180° - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Zatem miara kąta ECD jest równa

$$|\measuredangle ECD| = |\measuredangle DCA| + 90° + |\measuredangle ECB| = \frac{\alpha}{2} + 90° + \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Stąd

$$|\measuredangle ECD| = 90° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 135°$$

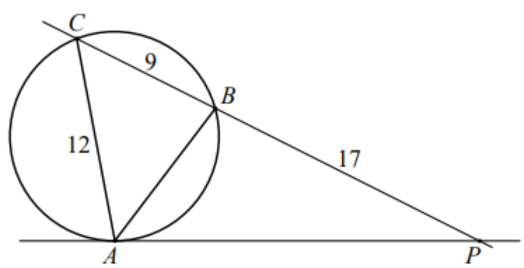
Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD wynika, że

$$\frac{|ED|}{\sin \measuredangle ECD} = 2R$$

gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie ECD. Ponieważ $|ED| = a + b + c = 2p$ i $\sin\measuredangle ECD = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $2R = \frac{2p}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Stąd $R = p\sqrt{2}$, co kończy dowód.

9.6. Dany jest trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków AC, BC i PB zostały podane na rysunku.



Oblicz długość odcinka AB.

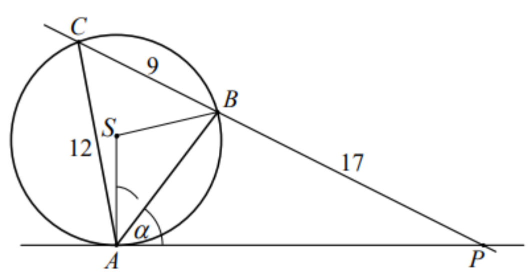
Rozwiązanie:

Niech S oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech $\alpha = |\measuredangle PAB|$. Kąt PAS jest prosty, więc $|\measuredangle BAS| = 90^\circ - \alpha$. Trójkąt ABS jest równoramienny, zatem

$$|\measuredangle ASB| = 180^\circ - 2\cdot|\measuredangle BAS| = 180^\circ - 2\cdot(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że

$$|\measuredangle ACB| = \frac{1}{2}\cdot|\measuredangle ASB| = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$$



Oznaczmy

$$|AB| = x \text{ oraz } |PA| = y$$

Trójkąty APB i CPA są podobne, gdyż $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCA|$ i kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem tych trójkątów.
Zatem

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|}$$
$$\frac{y}{26} = \frac{17}{y}$$
$$y^2 = 17 \cdot 26$$

Stąd

$$y = \sqrt{17 \cdot 26}$$

Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

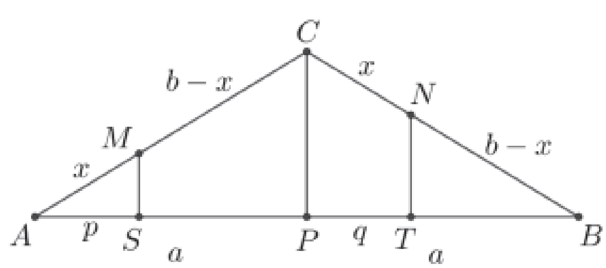
$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|PC|}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{12}{26}$$

Zatem $x = \frac{12y}{26} = \frac{12\sqrt{17 \cdot 26}}{26} = \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$

9.7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt $M(M \neq A$ i $M \neq C)$, a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

Rozwiązanie:

Niech P będzie środkiem podstawy AB tego trójkąta. Oznaczmy też $x = |AM| = |CN|$, $b = |AC| = |BC|, a = |AP|$, jak na rysunku.



Ponieważ P jest spodkiem wysokości trójkąta równoramiennego, więc $|BP| = |AP| = a$. Trójkąty ASM i APC sa podobne na mocy cechy kkk, ponieważ obydwa są trójkątami prostokątnymi (odcinki SM i PC sa równoległe), a kąt PAC jest kątem wspólnym obu trójkątów. Stąd wynika, że

$$\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x} = \frac{a}{b}$$

Stąd $p = \frac{ax}{b}$. Zatem $|SP| = |AP| - p = a - \frac{ax}{b}$.
Ponieważ $NT \parallel CP$ i kąt CBP jest kątem wspólnym, więc na mocy cechy kkk trójkąt BTN jest podobny do trójkąta BPC. Stąd wynika, że

$$\frac{|BT|}{|BN|} = \frac{|BP|}{|BC|}, \text{ czyli } \frac{|BT|}{b-x} = \frac{a}{b}$$

Stac $|BT| = \frac{a(b-x)}{b}$, więc $|PT| = |BP| - |BT| = a - \frac{a(b-x)}{b} = \frac{ab-ab+ax}{b} = \frac{ax}{b}$ Zatem

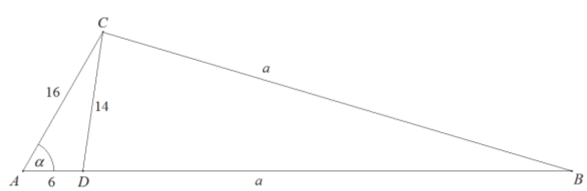
$$|ST| = |SP| + |PT| = a - \frac{ax}{b} + \frac{ax}{b} = a = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

To kończy dowód.

9.8. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16, |AD| = 6, |CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC otrzymujemy

$$14^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{16^2 + 6^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

Zatem $\alpha = 60°$.
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC otrzymujemy

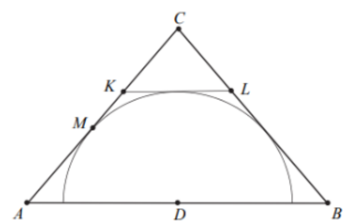
$$a^2 = 16^2 + (a+6)^2 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \cos\alpha$$
$$a^2 = 256 + a^2 + 12a + 36 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \frac{1}{2}$$
$$4a = 196$$
$$a = 49$$

Obwód trójkąta ABC jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120$$

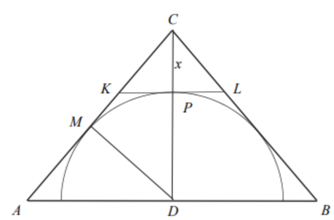
9.9. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}|$=6, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz
$|\mathrm{KC}| = |\mathrm{LC}|$= 2 (zobacz rysunek).

Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$



Rozwiązanie:

Najpierw uzupełnimy rysunek.

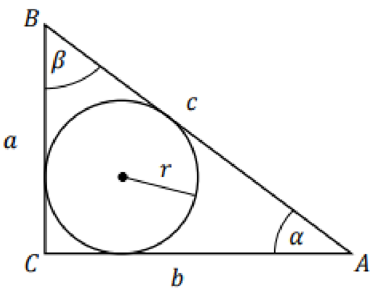


Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB.
Oznaczmy środek odcinka KL przez P i niech $|CP| = x$.
Trójkąty CKP i CAD sa podobne (cecha KKK) w skali 1:3. Wtedy $|PD| = 2x$ i $|MD| = 2x$.
Trójkąty CPK i CMD są podobne (cecha KKK). Stąd $\frac{|PK|}{|CK|} = \frac{|MD|}{|CD|}$, czyli $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$.
Stąd $|PK| = \frac{4}{3}$, więc $|AM| = \frac{8}{3}$ oraz $|MC| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{4}{5}$
To kończy dowód.

9.10. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest pięć razy krótszy od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Oblicz sinus tego z kątów ostrych trójkąta ABC, który ma większą miarę.

Rozwiązanie:



Przyjmijmy następujące oznaczenia:
a, b, c - długości boków trójkąta ABC,
α, β - miary kątów ostrych trójkąta
r - promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
(Zobacz rysunek).
Wtedy $a^2+b^2=c^2$ oraz $r=\frac{a+b-c}{2}$.
Z warunków zadania wynika, że $r=\frac{1}{5}c$.
Zatem

$$\frac{c}{5}=\frac{a+b-c}{2}$$
$$2c=5a+5b-5c$$
$$b=\frac{7}{5}c-a$$

Podstawiając otrzymana zależność do równości wynikającej z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy.

$$a^2+\left(\frac{7}{5}c-a\right)^2=c^2$$
$$2a^2-\frac{14}{5}ac+\frac{24}{25}c^2=0$$
$$25a^2-35ac+12c^2=0$$

Potraktujmy otrzymane równanie jak równanie kwadratowe z niewiadomą a i parametrem c. Otrzymujemy zatem

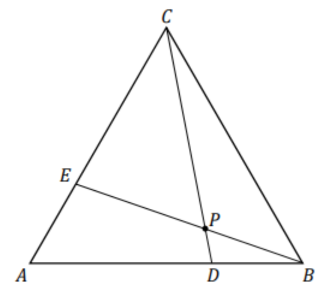
$$\Delta=(-35c)^2-4-25-12c^2=25c^2$$
$$a=\frac{35c-5c}{50}=\frac{3}{5}c \text{ lub } a=\frac{35c+5c}{50}=\frac{4c}{5}$$

Gdy $a=\frac{3}{5}c$, to wedy $b=\frac{7}{5}c-\frac{3}{5}c=\frac{4}{5}c$, a gdy $a=\frac{4}{5}c$, to $b=\frac{7}{5}c-\frac{4}{5}c=\frac{3}{5}c$. W każdym z tych przypadków otrzymujemy więc taki sam trójkąt (z dokładnością do oznaczeń).

Bez straty ogólności można przyjąć, że $a = \frac{3}{5}c$ i $b = \frac{4}{5}c$.
Przy oznaczeniach z rysunku mamy

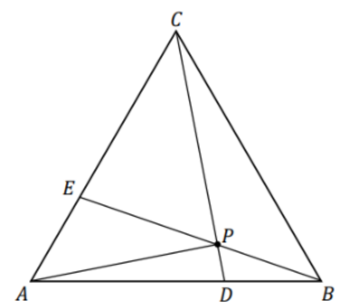
$\sin\alpha = \frac{a}{e} = \frac{3}{5}c = \frac{3}{5}$ oraz $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{5}{c}c = \frac{4}{5}$.
Kąty α i β są ostre, więc ten z nich ma większą miarę, dla którego sinus przyjmuje większa wartość.
Zatem sinus większego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{5}$ -

9.11. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$.
Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).
Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC?



Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $P_{\Delta ABC} = S, P_{\Delta DBP} = Q, P_{\triangle APE} = Y, P_{\Delta BCP} = X$.
W dalszym ciągu rozumowania będziemy wielokrotnie korzystać z faktu, że stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość jest opuszczona.



Zatem $P_{ABE} = \frac{1}{3}S, P_{CBE} = \frac{2}{3}S, P_{DBC} = \frac{1}{3}S, P_{ADC} = \frac{2}{3}S$.
Ponadto

$$\frac{P_{APE}}{P_{CPE}} = \frac{1}{2} \text{ oraz } \frac{P_{DBP}}{P_{ADP}} = \frac{1}{2}$$

Otrzymaliśmy więc układ równań

$$\begin{cases} Q + X = \frac{1}{3}S \\ 2Y + X = \frac{2}{3}S \\ Y + 3Q = \frac{1}{3}S \end{cases}$$

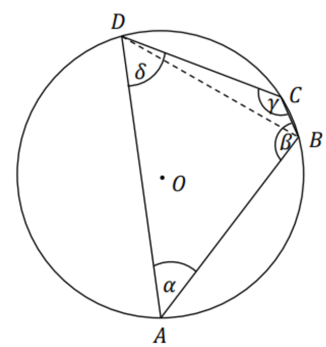
Wyznaczając wielkość X z pierwszego równania i wielkość Y z trzeciego oraz wstawiając wyznaczone wielkości do równania drugiego, otrzymujemy:

$$2\left(\frac{1}{3}S - 3Q\right) + \left(\frac{1}{3}S - Q\right) = \frac{2}{3}S$$
$$\frac{1}{3}S = 7Q$$
$$Q = \frac{1}{21}S$$

To należało wykazać

9.12. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC czworokąta $ABCD$ są ostre, a iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

Rozwiązanie:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Korzystamy z twierdzenia sinusów, aby obliczyć miarę kąta BAD: więc $\alpha = 45°$
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc $\alpha + \gamma = 180°$, skąd $\gamma = 135°$.
Z warunków zadania $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta = \frac{3}{8}$, więc

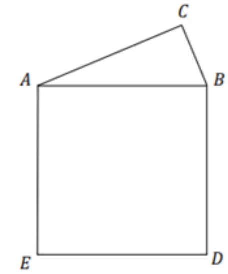
$$\sin 45° \cdot \sin\beta \cdot \sin 135° \cdot \sin\delta = \frac{3}{8}$$

Z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg mamy $\beta + \delta = 180°$, skąd $\beta = 180° - \delta$
Wstawiając tę zależnośc do równania z iloczynem sinusów, otrzymujemy kolejno

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(180° - \delta) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\delta = \frac{3}{8}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \sin\delta \cdot \sin\delta = \frac{3}{8}$$
$$\sin^2\delta = \frac{3}{4}$$
$$\sin\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

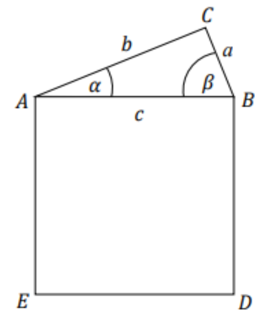
skąd $\delta = 60°$. Zatem $\beta = 180° - \delta = 120°$
Kąty wewnętrzne tego czworokąta mają miary:
$|\measuredangle BAD| = 45°$, $|\measuredangle BCD| = 135°$, $|\measuredangle CDA| = 60°$

9.13. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ABDE$ (zobacz rysunek). Stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest równy k. Wykaż, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2}$.



Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Z warunków zadania mamy: $\frac{P_{AABC}}{P_{ABDE}} = k$, co zapisujemy: $\frac{\frac{1}{2}ab}{c^2} = k$.
Wyznaczamy tangensy kątów ostrych trójkąta ABC :
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$
i obliczamy ich sumę:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc $a^2 + b^2 = c^2$ i otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{c^2}{ab}$$

Zależności $\frac{\frac{1}{2}ab}{c^2} = k$ wyznaczamy c^2: $c^2 = \frac{ab}{2k}$.
Podstawiamy otrzymane wyrażenie do sumy $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ i otrzymujemy:

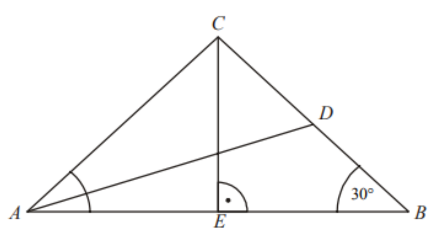
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{c^2}{ab} = \frac{\frac{ab}{2k}}{ab} = \frac{1}{2k}$$

To należało wykazać.

9.14. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$ i $|\sphericalangle ABC| = 30°$ oraz $|BE| = 4$



Z trójkąta prostokątnego BEC otrzymujemy: $\cos 30° = \frac{|BE|}{|BC|}$

Zatem $\frac{4}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$ i $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Obliczamy $|AD| > 0$, stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD.

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cdot \cos \sphericalangle ABD$

$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$|AD|^2 = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{16 \cdot 7}{3}$

Stąd $|AD| = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$

X. GEOMETRIA ANALITYCZNA

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A,y_A), B=(x_B,y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB :

$$(x_s,y_s)=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A,y_B-y_A]$$

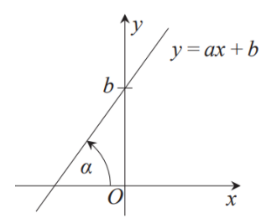
Jeżeli $\vec{u}=[u_1,u_2], \vec{v}=[v_1,v_2]$ sa wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u}+\vec{v}=[u_1+v_1,u,+v_2]$$

$$a\cdot\vec{u}=[a\cdot u_1,a\cdot u,]$$

Prosta
Równanie ogólne prostej:

$$Ax+By+C=0$$



gdzie $A^2+B^2\neq 0$ (tj. współczynniki A,B nie są równocześnie równe 0).
Jeżeli $A=0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B=0$, to prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C=0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y=ax+b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a=\operatorname{tg}\alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.
Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P=(x_0,y_0)$:

$$y=a(x-x_0)+y_0$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=(x_A,y_A), B=(x_B,y_B)$:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

Odległość punktu $P=(x_0,y_0)$ od prostej o równaniu $Ax+By+C=0$
jest dana wzorem: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
Dwie proste o równaniach kierunkowych:

$$y=a_1x+b_1;\ y=a_2x+b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy $a_1=a_2$
- są prostopadłe, gdy $a_1a_2=-1$
- tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}\right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x+B_1y+C_1=0\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

- są równoległe, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$
- są prostopadłe, gdy $A_1A_2+B_1B_2=0$
- tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$

Odległość prostych równoległych
Jeśli dane są równania prostych równoległych

$$Ax+By+C_1=0;\ \ Ax+By+C_2=0$$

gdzie $A^2+B^2>0$, to odległość d tych prostych wyraża się wzorem

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A,y_A), B=(x_B,y_B), C=(x_C,y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Przekształcenia geometryczne

przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt

$$A' = (x + a, y + b)$$

symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$

symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$

symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt

$$A' = (2a - x, 2b - y)$$

jednokładność o środku w punkcie O i skali $s \neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'} = s \cdot \overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O = (x_0, y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx + (1 - s)x_0, sy + (1 - s)y_0)$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c >$

PRZYKŁADY

10.1. Okrąg jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$. Punkt $B=(-1,9)$ leży na tym okręgu. Wyznacz równanie tego okręgu.

Rozwiązanie:

Niech $S=(a,b)$ będzie środkiem szukanego okręgu. Ponieważ okrąg ten jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$, więc $S=(2,b)$. Z definicji okręgu wynika, że $|AS|=|BS|$, czyli

$$(2-2)^2+(b-0)^2=(2+1)^2+(b-9)^2$$

Stąd

$$b^2=9+b^2-18b+81$$
$$b=5$$

Zatem $S=(2,5)$, a równanie okręgu ma postać $(x-2)^2+(y-5)^2=25$.

10.2. Punkty $A=(1,1)$ i $B=(6,2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie $M=(3,3)$. Oblicz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy równanie prostej AB, korzystając ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty: $(y-1)(6-1)-(2-1)(x-1)=0$

$$5(y-1)-(x-1)=0$$
$$5(y-1)=x-1$$

Zatem prosta AB ma równanie $y=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$.
Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB, przechodzącej przez punkt M

$$y=-5x+18$$

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(1,1)$ i $M=(3,3)$:

$$(y-1)(3-1)-(3-1)(x-1)=0$$
$$2(y-1)-2(x-1)=0$$

Zatem prosta AM ma równanie $y=x$.

Współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $a_2=-1$ i do prostej należy punkt B, więc równanie prostej ma postać $y=-x+8$.

Punkt $C = (x, y)$ jest punktem wspólnym prostych CM i BC, więc jego współrzędne wyznaczamy, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = -5x + 18 \\ y = -x + 8 \end{cases}$

Zatem punkt C ma współrzędne $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC.

Obliczamy dhugość odcinka AB: $|AB| = \sqrt{(6-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$.

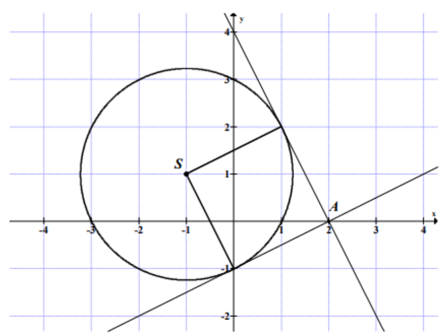
Wyznaczamy odległość h punktu C od prostej AB.

$$h = \frac{\left|\frac{5}{2} - 5 \cdot \frac{11}{2} + 4\right|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{26}}$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC: $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{21}{\sqrt{26}} = \frac{21}{2} = 10{,}5$.

10.3. Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2,0)$

Rozwiązanie:



Przekształcamy równanie okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ do postaci $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S = (-1,1), r = \sqrt{5}$.

Stwierdzamy, że prosta o równaniu $x = 2$ nie jest styczna do okręu

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $A = (2,0)$ i stycznej do okręgu:

$y = a(x-2)$ lub $y = ax - 2a$ lub $ax - y - 2a = 0$ w zależności od parametru a (gdzie a oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej).

Wyznaczamy odległość środka S okregu od prostej o równaniu $ax - y - 2a = 0$:

$$d = \frac{|-a - 1 - 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Ponieważ promień okręgu jest równy odległości środka okręgu S od stycznej, więc otrzymujemy równanie

$$\sqrt{5} = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Przekształcamy to równanie

$$\sqrt{5a^2+5} = |-3a-1|$$

$$5a^2+5 = 9a^2+6a+1$$

$$4a^2+6a-4=0$$

rozwiązujemy równanie $2a^2+3a-2=0$:

$$a_1 = -2 \text{ lub } a_2 = \frac{1}{2}$$

Z tego, że a_1, a_2 oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i $a_1 \cdot a_2 = -1$ wynika, że styczne są do siebie prostopadłe.
Stąd miara kąta między stycznymi jest równa $90°$.

10.4. Okrąg o środku $S=(3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ i jest do niego styczny.
Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Rozwiązanie:

Środkiem okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ jest punkt $S_1=(6,8)$, a promień tego okręgu jest równy 10. Środki S i S_1 okręgów leżą na prostej o równaniu $y=2x-4$. Szukana styczna jest prostopadła do tej prostej, więc ma równanie postaci $y=-\frac{1}{2}x+b$. Odległość środka $S_1=(6,8)$ od stycznej jest równa 10 , zatem

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 6+8-b\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}} = 10$$

$$|11-b| = 10\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$|11-b| = 5\sqrt{5}$$

Stąd $11-b=5\sqrt{5}$ lub $11-b=-5\sqrt{5}$, czyli $b=11-5\sqrt{5}$ lub $b=11+5\sqrt{5}$.

Otrzymujemy więc dwie proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ oraz
$y=-\frac{1}{2}x+11+5\sqrt{5}$
Odległość środka S od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ jest równa

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 3+2+11-5\sqrt{5}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{29}{5}\sqrt{5}-10$$

Ponieważ $\frac{29}{5}\sqrt{5}-10<10$, więc ta prosta jest szukaną styczną.

10.5. Dane są okręgi o równaniach $x^2+y^2-12x-8y+43=0$ i $x^2+y^2-2ax+4y+a^2-77=0$.
Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

Rozwiązanie:

Okrąg o równaniu $x^2+y^2-12x-8y+43=0$ ma środek punkcie $S_1=(6,4)$ i promień $r_1=3$, a okragg o równaniu $x^2+y^2-2ax+4y+a^2-77=0$ ma środek w punkcie $S_2=(a,-2)$ i promień $r_2=9$.
Ponieważ te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny, więc odległość pomiędzy środkami okręgów jest równa sumie promieni lub różnicy promieni:

$$|S_1S_2|=r_1+r_2 \text{ lub } |S_1S_2|=r_2-r_1$$

Otrzymujemy zatem równania

$$\sqrt{(a-6)^2+6^2}=12 \text{ lub } \sqrt{(a-6)^2+6^2}=6$$

Zatem

$$(a-6)^2=108 \text{ lub } (a-6)^2=0$$

Równanie $(a-6)^2=108$ ma dwa rozwiązania: $a=6(1+\sqrt{3})$ oraz $a=6(1-\sqrt{3})$, natomiast równanie $(a-6)^2=0$ ma jedno rozwiązanie $a=6$.
Zatem podane okręgi są styczne zewnętrznie dla $a=6(1+\sqrt{3})$ lub dla $a=6(1-\sqrt{3})$, natomiast są okręgami stycznymi wewnętrznie dla $a=6$.

10.6. Prosta o równaniu x+y-10=o przecina okrąg o równaniu $x^2+y^2-8x-6y+8=0$ w punktach K i L . Punkt S jest środkiem cięciwy KL . Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali k = −3.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.
Obliczamy współrzędne punktów K i L rozwiązując układ równań:
$\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y+8=0 \\ y=10-x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+(10-x)^2-8x-6(10-x)+8=0 \\ y=10-x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-11x+24=0 \\ y=10-x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$$

Zatem $K=(3,7)$ i $L=(8,2)$. Środek cięciwy KL, który jest środkiem jednokładności to punkt $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$
Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$ takim, że $\overrightarrow{SP'}=-3\cdot\overrightarrow{SP}$.
Otrzymujemy równość:

$$\left[a-\frac{11}{2},b-\frac{9}{2}\right]=-3\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$\left[a-\frac{11}{2},b-\frac{9}{2}\right]=\left[\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right]$$

a stąd $a=10$ i $b=9$
Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

10.7. Prosta przechodząca przez punkty A = (8, −6) i B = (5, 15) jest styczna do okręgu o środku w punkcie O = (0, 0). Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy równanie prostej AB.
Niech $y=ax+b$ będzie równaniem kierunkowym prostej AB.

Punkty A i B leżą na tej prostej, więc:

$$-6 = 8a + b \text{ i } 15 = 5a + b$$

Stąd $a = -7$ i $b = 50$.

Prosta AB ma równanie:w postaci kierunkowej: $y = -7x + 50$;
w postaci ogólnej: $7x + y - 50 = 0$.
Obliczamy odległość punktu O od prostej AB :

$$d(O, AB) = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - 50|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczona odległość jest długością promienia okręgu: $d(O, AB) = r = 5\sqrt{2}$.
Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu.
Prosta OP przechodzi przez punkt $O = (0,0)$ i jest prostopadła do prostej AB,
więc ma równanie: $y = \frac{1}{7}x$.
Obliczamy współrzędne punktu P :

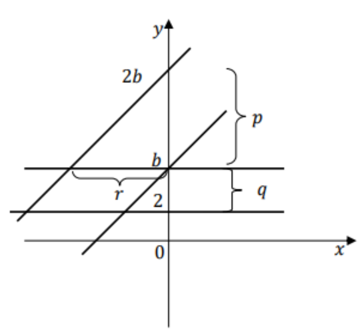
$$\begin{cases} y = \frac{1}{7}x \\ y = -7x + 50 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $x = 7$ i $y = 1$, więc $P = (7,1)$.

10.8. Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$ i $b \neq 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (przyjęliśmy, że $b > 2$ – w rozwiązaniu korzystamy tylko z własności podanych w treści zadania).



Zauważmy, że $p = r$ oraz $p = |2b - b| = |b|$. Zauważmy ponadto, że $q = |b - 2|$.
Zatem pole P równoległoboku jest równe $P = r \cdot q = |b| \cdot |b - 2|$

Z warunków zadania otrzymujemy $|b \cdot (b - 2)| = 1$, stąd

$$b \cdot (b-2) = -1 \text{ lub } b \cdot (b-2) = 1$$
$$b^2 - 2b + 1 = 0 \text{ lub } b^2 - 2b - 1 = 0$$
$$(b-1)^2 = 0 \text{ lub } b = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} \text{ lub } b = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}$$
$$b = 1 \text{ lub } b = 1 - \sqrt{2} \text{ lub } b = 1 + \sqrt{2}$$

Pole równoległoboku jest równe 1 tylko wtedy, gdy $b \in \{1 - \sqrt{2}; 1; 1 + \sqrt{2}\}$.

10.9. W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty P postaci: $P = \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}, m\right)$, gdzie $m \in \langle -1,7 \rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q = \left(\frac{55}{2}, 0\right)$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy odległość punktów P i Q:

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{55}{2} - \frac{1}{2}m - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}.$$

Wyznaczamy wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$:

$$f(m) = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2 = \frac{5}{4}(m^2 - 20m + 500) \text{ dla } m \in \langle -1,7 \rangle$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f :
$m_w = \left(\frac{5}{4} \cdot 20\right) : \left(2 \cdot \frac{5}{4}\right) = 25 : \frac{5}{2} = 25 \cdot \frac{2}{5} = 10$

Ponieważ $10 \notin \langle -1,7 \rangle$, więc w tym przedziale funkcja f jest monotoniczna.
Zatem największa i najmniejsza wartość funkcji f dla $m \in \langle -1,7 \rangle$ są przyjmowane dla argumentów, będących końcami tego przedziału.

$$f(-1) = \frac{5}{4}(1 + 20 + 500) = 651{,}25$$

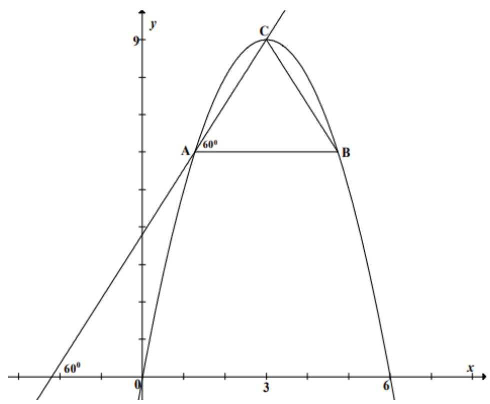
oraz $$f(7) = \frac{5}{4}(49 - 140 + 500) = 511{,}25$$

Zatem najmniejsza i największa wartość $|PQ|^2$ to odpowiednio 511,25 oraz 651,25 .

10.10. Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi $0x$. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Aby sporządzić rysunek wyznaczamy współrzędne wierzchołka danej paraboli:
$y = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9$, więc wierzcholek paraboli ma wspólrzędne $(3{,}9)$.
Wykonujemy rysunek ilustrujący treść zadania:



Trójkąt ABC jest równoboczny, więc kąt BAC ma miarę $60°$. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty AiC jest więc równy $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.
Wyznaczamy równanie prostej AC :
prosta $y = \sqrt{3}x + b$ przechodzi przez punkt $C = (3{,}9)$, więc współzzynnik b jest równy $b = -3\sqrt{3} + 9$.
Prosta AC ma równanie: $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu A rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$

Rozwiązaniem równania są liczby: $x_1 = 3, x_2 = 3 - \sqrt{3}$.
Współrzędne punktów przecięcia prostej AC z parabola $y = -x^2 + 6x$ są więc następujące: $A(3 - \sqrt{3}, 6)$ oraz $C(3{,}9)$ (wierzchołek paraboli)

Współrzędne punktu B wyznaczamy wykorzystując fakt, iż osią symetrii paraboli $y = -x^2 + 6x$ jest prosta $x = 3$.
Punkt B jest więc obrazem punktu A w symetrii względem tej prostej, czyli $B = \left(3 + \sqrt{3}, 6\right)$.

10.11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ oraz punkt $A=(0,-1)$. Prosta o równaniu $x=0$ jest jedną ze stycznych do tego okregu przechodzących przez punkt A. Wyznacz równanie drugiej stycznej do tego okręgu, przechodzącej przez punkt A.

Rozwiązanie:

Zapisujemy równanie szukanej rodziny stycznych przechodzącej przez punkt $A=(0,-1)$.

$$y=ax-1 \text{ lub } ax-y-1=0$$

Stwierdzamy, że aby prosta k o równaniu $y=ax-1$ była styczna do danego okręgu,

odległość środka okręgu $S(-2,-3)$ od prostej k musi być równa promieniowi okręgu $d=r=2$

Podstawiamy do wzoru

$$\frac{|a\cdot(-2)-3-1|}{\sqrt{a^2+1}}=2.$$

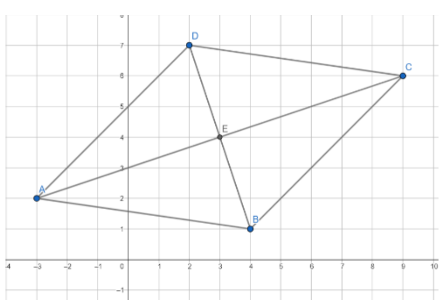
Obliczamy $a=-\frac{3}{4}$

Wyznaczamy równanie szukanej stycznej $y=-\frac{3}{4}x-1$.

10.12. Punkty $A=(-3,2)$ i $C=(9,6)$ sa przeciwległymi wierzchołkami rombu o polu 40 . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek ilustrujący treść zadania:



Obliczamy długość przekątnej AC

$$AC=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}.$$

Drugą przekątna obliczamy korzystając ze wzoru na pole rombu.

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

Stąd

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10} \cdot BD = 40$$

$$BD = \frac{40}{2\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

Następnie liczymy długość boku rombu

$$AB = \sqrt{AS^2 + BS^2} = \sqrt{40 + 10} = \sqrt{50}$$

Szukamy teraz punktów, które są odległe od A i C o $\sqrt{50}$.

$$\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{50} \\ \sqrt{(x-9)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{50} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-2)^2 = 50 \\ (x-9)^2 + (y-6)^2 = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 50 \\ x^2 - 18x + 81 + y^2 - 12y + 36 = 50 \end{cases}$$

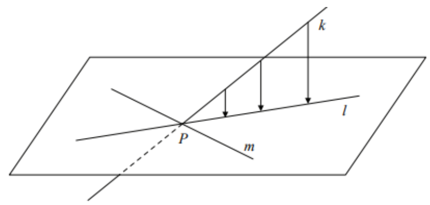
$$\begin{cases} x^2 + 6x + y^2 - 4y - 37 = 0 \\ x^2 - 18x + y^2 - 12y + 67 = 0 \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymujemy

$$24x + 8y - 104 = 0 \ \Rightarrow \ y = -3x + 13$$

XI. STEREOMETRIA

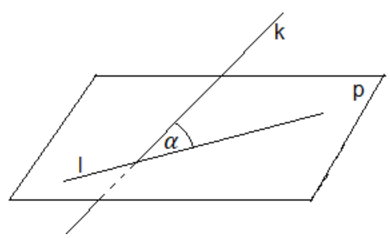
Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych



Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę plaszczyznę. Prosta m leży na tej plaszczyźnie i przechodzi przez punkt P. Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l.

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

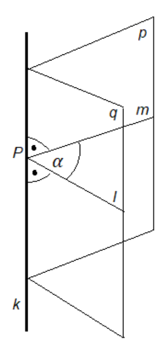
Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz prostą k, która nie jest ani równoległa, ani prostopadła do płaszczyzny p. Kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny p nazywamy kąt ostry między tą prostą i jej rzutem prostokątnym l na płaszczyznę p.



Kąt między dwiema płaszczyznami

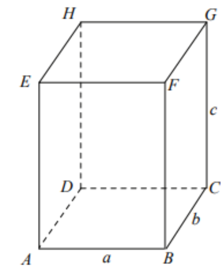
Rozpatrzmy płaszczyzny p i q, gdy te płaszczyzny nie są ani równoległe, ani prostopadłe.

Z dowolnego punktu P wybranego na krawędzi k tych płaszczyzn (czyli na prostej, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny p i q) prowadzimy w każdej z tych płaszczyzn prostą prostopadłą do krawędzi k - oznaczmy te proste przez l i m. Mniejszy z kątów utworzonych przez proste l i m nazywamy kątem nachylenia plaszczyzny p do płaszczyzny q



Prostopadłościan

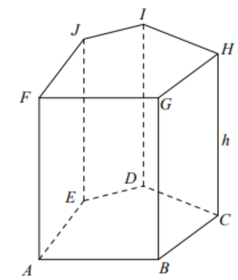
$$P = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$
$$d = \sqrt{a + b + c}$$



Graniastosłup prosty

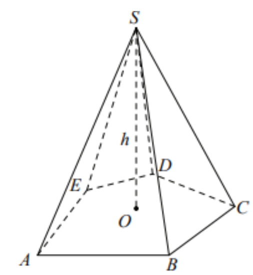
$$P_b = 2p \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastostupa



Ostrosłup

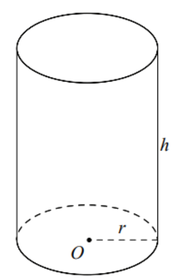
$$V = \frac{1}{3} P_P \cdot h$$



Walec

$$P_b = 2\pi r h$$
$$P = 2\pi r(r + h)$$
$$V = \pi r^2 h$$

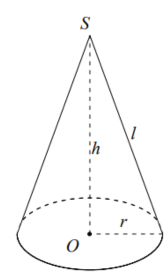
gdzie r jest promieniem podstawy, h - wysokością walca



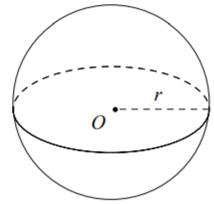
Stożek

$$P_b = \pi r l$$
$$P = \pi r(r + l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h - wysokością,
l - długością tworzącej stożka



Kula

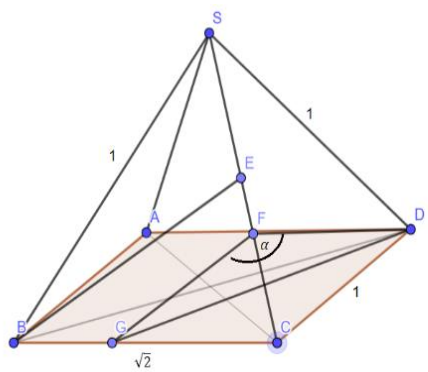


$$P = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

PRZYKŁADY

11.1. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 1, |BC| = \sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1 . Wyznacz wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że trójkąt CDS jest równoboczny, a trójkąt BCS prostokątny. Rysujemy płaszczyznę, prostopadłą do krawędzi CS, w której będziemy liczyć miarę kąta między ścianami. Płaszczyzna ta musi przechodzić przez punkt D. W otrzymanym trójkącie DFG znamy długość boku DF, ponieważ jest to wysokość w trójkącie równobocznym.

$$DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z twierdzenia cosinusów wyliczymy $\cos \measuredangle GFD$ Najpierw musimy ustalić, gdzie na boku BC leży punkt G. Wiemy, że odcinek GF jest prostopadły do krawędzi SC oraz $FC = \frac{1}{2}$. Jak wcześniej zauważyliśmy $\measuredangle GCF = 45°$ (bo BCS jest równoramiennym trójkątem prostokątnym). Zatem GCF jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, czyli

$$GF = FC = \frac{1}{2}$$

Ponadto $GC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc z trójkata prostokątnego GCD mamy

$$GD^2 = GC^2 + CD^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Stosujemy więc twierdzenie cosinusów w trójkącie GFD.

$$GD^2 = GF^2 + DF^2 - 2GF \cdot DF\cos\alpha$$
$$\frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$$
$$\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

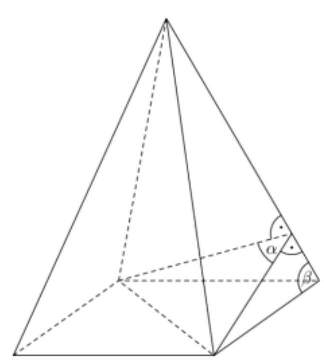
Stąd

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ostatecznie $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{2},$$

a więc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$

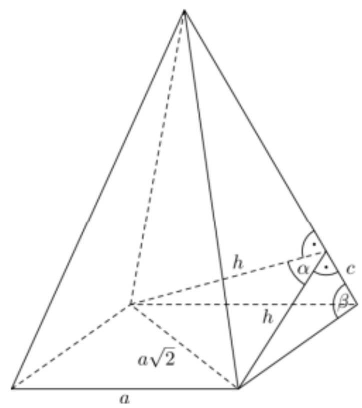
11.2. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa) - zobacz rysunek



Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = -1$

Rozwiązanie:

Oznaczmy, tak jak na poniższym rysunku: a - długość krawędzi podstawy, h - wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, c - długość odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości h.



Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy:

$$(a\sqrt{2})^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos\alpha$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2}$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy

$$c^2 = a^2 - h^2$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{c}, \text{ a stąd wynika, że } \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2}{c^2}.$$

Obliczamy zatem

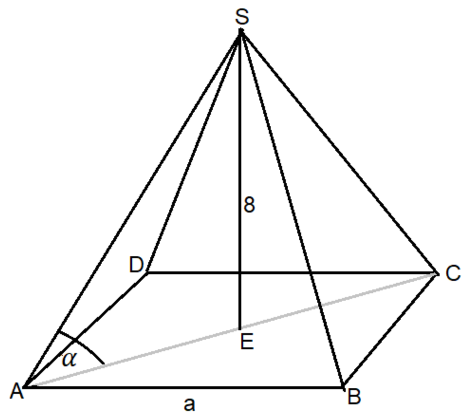
$$\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2 - a^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{-(a^2 - h^2)}{c^2} = \frac{-c^2}{c^2} = -1$$

To kończy dowód.

11.3. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa h. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek zgodny z danymi



Jeżeli oznaczymy długość krawędzi podstawy ostrosłupa przez a to odcinek AE ma długość równą połowie długości przekątnej kwadratu $ABCD$, czyli $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Z trójkąta prostokątnego AES mamy

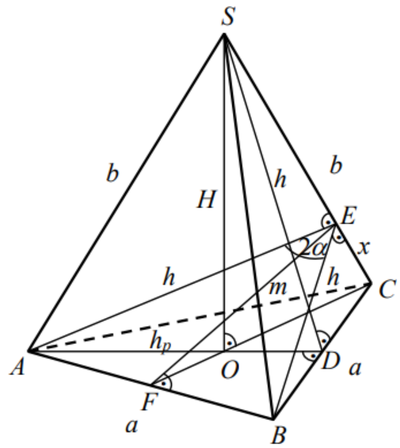
$$\frac{AE}{SE} = \operatorname{ctg}\alpha$$
$$AE = SE\operatorname{ctg}\alpha$$
$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = h\operatorname{ctg}\alpha$$
$$a = h\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha$$

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2h^2 ctg^2\,\alpha \cdot h = \frac{2}{3}h^3 ctg^2\,\alpha$$

11.4. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Wyznaczamy wysokość FE trójkąta równoramiennego ABE

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

Wyznaczamy długość odcinka EC z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCE :

$$x = \sqrt{h_p^2 - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{4\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów OCS i ECF mamy

$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}$, czyli $\frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}$

Stąd $H = \frac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \frac{\frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$

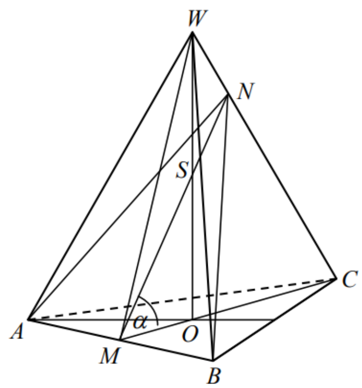
Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$$

11.5. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia takie jak na rysunku.



W trójkącie równobocznym ABC mamy:

$$|AB| = a, |CM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |OM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Stąd

$$|OS| = |OM| \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } |OW| = 2 \cdot |OS| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{12} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Następnie

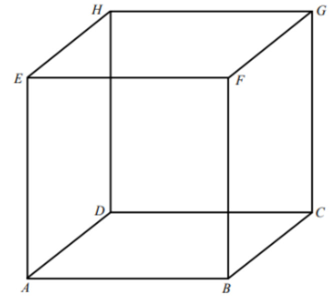
$$|MW|^2 = |OM|^2 + |OW|^2 = \frac{3a^2}{36} + \frac{3a^2}{9}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12}(1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha)$$

$$|MW| = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}$$

i stąd otrzymujemy

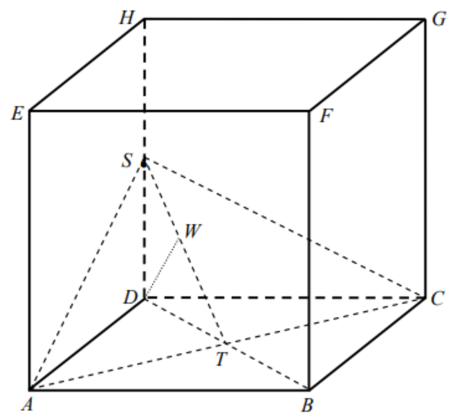
$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}$$

11.6. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej 1 . Punkt S jest środkiem krawędzi DH . Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS .
Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.



Rozwiązanie:

Łączymy punkty A i S , A i C oraz C i S (zobacz rysunek). Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy tego sześcianu.



Punkt S leży na krawędzi DH , więc $AS = CS$, a zatem trójkąt ACS , stanowiący podstawę ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek ST jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka ST obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego TDS :

$$|ST|^2 = |SD|^2 + |DT|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{, czyli } |ST| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zauważamy, że odcinek DW jest wysokościa trójkąta prostokątnego TDS poprowadzoną do przeciwprostokątnej TS. Dtugość odcinka DW obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta TDS:

$$\frac{1}{2} \cdot |SD| \cdot |TD| = \frac{1}{2} \cdot |ST| \cdot |DW|$$

$$|DW| = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego SWD wynika, że:

$$|SW| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Teraz zauważamy, że wysokość ST trójkąta równoramiennego ACS jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW = CW$. Długość odcinka AW obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ATW, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Otrzymujemy zatem

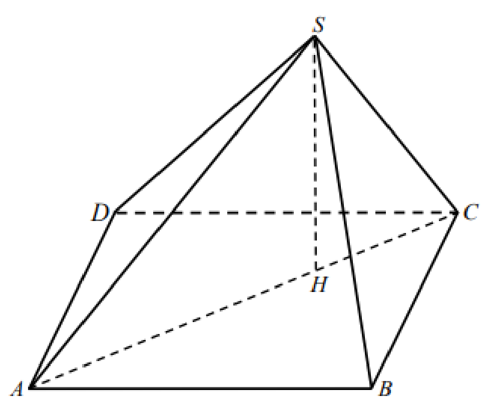
$$|AW|^2 = |AT|^2 + |TW|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{6}$$

skąd

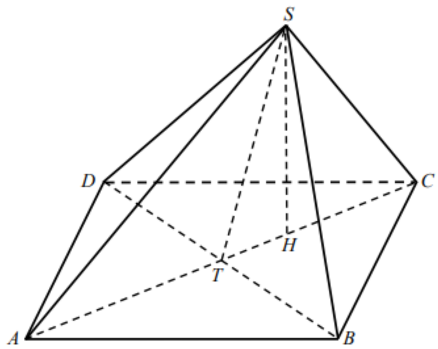
$$|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}, |SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

11.7. Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku 2 : 1 (zobacz rysunek). Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1 . Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.



Rozwiązanie:



Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy ostrosłupa (zobacz rysunek).

Ponieważ $|AC| = \sqrt{2}$, więc $|CH| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $|HT| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Trójkat BSD jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, dlatego że jego ramiona mają długości $|BS| = |DS| = 1$, a podstawa $|BD| = \sqrt{2}$. Stąd wynika, że $|ST| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Obliczamy zatem wysokość HS tego ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SHT:

$$|HS|^2 = |ST|^2 - |HT|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}, \text{ skąd wynika, że } |HS| = \frac{2}{3}$$

Objętość V tego ostrosłupa jest zatem równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Pozostaje obliczyć jeszcze długości krawędzi bocznych AS i CS. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dwukrotnie, najpierw do trójkąta AHS, otrzymujemy

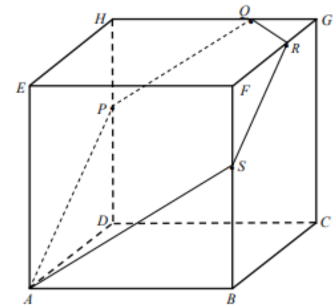
$$|AS|^2 = |AH|^2 + |HS|^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}, \text{ więc } |AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

natomiast do trójkąta CHS

$$|CS|^2 = |CH|^2 + |HS|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}, \text{ skąd } |CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

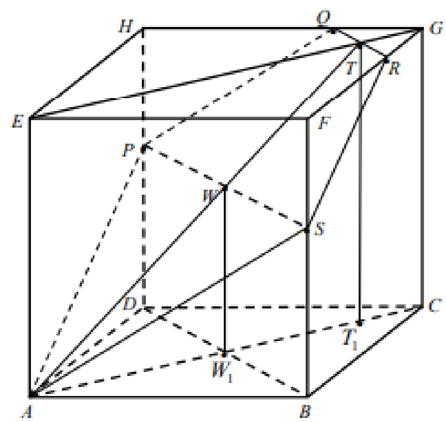
Rozważany ostrosłup nie jest prawidłowy, a wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

11.8. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



Rozwiązanie:

Rysujemy przekątne AC, BD, EG oraz łączymy punkty P i S. Oznaczmy kolejno:
W – środek odcinka PS,
W_1 – punkt przecięcia przekątnych AC i BD,
T – środek odcinka QR (zobacz rysunek).
Niech ponadto T_1 będzie takim punktem przekątnej AC, że $GT = CT_1$.



Zauważamy, że $DP = BS$ co wynika, z symetrii względem płaszczyzny $ACGE$. Zatem czworokąt BSPD jest prostokątem. Stąd wynika, że prosta przechodząca przez środki boków tego prostokąta - punkty W i W_1 - jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Ponadto, prosta przechodząca przez punkty T i T_1 jest także prostopadła do tej płaszczyzny. Zauważamy,
że punkty: A, W, W_1, T i T_1 leżą w jednej plaszczyźnie – jest nią płaszczyzna $ACGE$. Na mocy cechy kkk, trójkąty prostokatne AW_1W i AT_1T sa podobne, więc możemy zapisać równość

$$\frac{|TT_1|}{|AT_1|} = \frac{|WW_1|}{|AW_1|}, \text{ skąd wynika, ze } |WW_1| = \frac{|TT_1| \cdot |AW_1|}{|AT_1|}$$

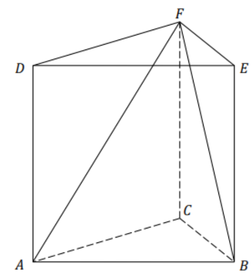
Ponieważ $|TT_1| = 15, |AW_1| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ oraz $|AT_1| = 15\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$, więc

$$|WW_1| = \frac{15 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2}}{\frac{25\sqrt{2}}{2}} = 9$$

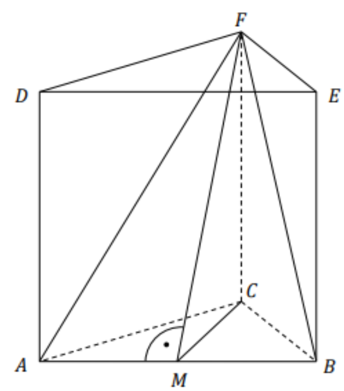
Oczywiście $|DP| = |BS| = |WW_1| = 9$

11.9. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek).

Oblicz sinus kąta AFB.



Rozwiązanie:



Trójkąt ABF jest równoramienny: $|AF| = |BF|$.
Prowadzimy odcinek $FM -$ wysokość trójkąta ABF.
Trójkąt CMF jest prostokątny i $|CM| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
Stosujemy do trójkąta CMF twierdzenie Pitagorasa i obliczamy $|FM|$: $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = |FM|^2$, stąd $|FM| = 4\sqrt{3}$
Obliczamy pole trójkąta ABF:
$P_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |FM| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
Obliczamy długość odcinka AF:
$|AF| = \sqrt{|AC|^2 + |CF|^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.
Obliczamy pole trójkąta ABF: $P_{\Delta ABF} = \frac{1}{2}|AF|^2 \cdot \sin|\measuredangle AFB|$
$P_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{13})^2 \cdot \sin|\measuredangle AFB| = 26\sin|\measuredangle AFB|$.
Z porównania pól trójkąta ABF otrzymujemy $26\sin|A\measuredangle FB| = 8\sqrt{3}$ i obliczamy wartość sinusa: $\sin|\measuredangle AFB| = \frac{4\sqrt{3}}{13}$.

XII. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Wariacje z powtórzeniami – liczba sposobów, na które zn różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

Wariacje bez powtórzeń – liczba sposobów, na które zn różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się $zk(1 \leqslant k \leqslant n)$ różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutacje – liczba sposobów, na które $n(n \geqslant 1)$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Kombinacje – liczba sposobów, na które spośród n różnyych elementów można wybrać $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$
$P(\Omega) = 1$ $\Omega -$ zdarzenie pewne
$P(\emptyset) = 0$ $\emptyset -$ zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)
$P(A) \leq P(B),$ gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$
$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzen $A, B \subset \Omega$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jezeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe sa jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ - liczbę elementów zbioru Ω.

Prawdopodobieństwo warunkowe
Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A \mid B)$ nazywamy liczbę

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym
Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1 $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j < n$,

2 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

3 $P(B_i) > 0$ dla $1 < i < n$,

to dla każdego zdarzenia losowego A zawartego w Ω zachodzi równość

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

PRZYKŁADY

12.1. Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.
B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

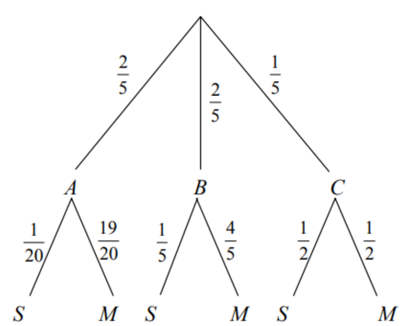
Rozwiązanie:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$

12.2. Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

Rozwiązanie:

Wprowadzam następujące oznaczenia zdarzeń:
A-autobus prowadzi kierowca A,
B - autobus prowadzi kierowca B,
C - autobus prowadzi kierowca C,
S-autobus szkolny spóźnia się,
M-autobus przyjeżdża punktualnie.
Zdarzenia A, B, C spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, więc:



$$P(S) = P(S \mid A) \cdot P(A) + P(S \mid B) \cdot P(B) + P(S \mid C) \cdot P(C)$$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(S) = \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

12.3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.
Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1 .
Suma kwadratów trzech liczb będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1 .
Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.
Kwadraty liczb $1,2,4$ i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1 .
$|A|$ możemy obliczać następująco:
I sposób
ciagi o wartościach ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2^3 = 8$,
ciągi o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4^3 = 64$,
czyli $|A| = 2^3 + 4^3 = 72$
II sposób
ciągi stałe – jest ich 6,
ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2 \cdot 3 = 6$,
ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$,
ciągi różnowartościowe o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$,
czyli $|A| = 6 + 6 + 36 + 24 = 72$,
III sposób
ciagi, w których występują liczby dające tę sama resztę przy dzieleniu przez 3 – jest ich $3 \cdot 2^3 = 24$
ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2– - jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,
ciagi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 2 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,
czyli $|A| = 24 + 24 + 24 = 72$,
Zatem $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.

12.4. Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1,2,3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:
B_1 - wylosujemy liczbę 1 ,
B_2 - wylosujemy liczbę 2 ,
B_3 - wylosujemy liczbę 3
A-otrzymamy co najmniej jednego orła.
Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega;\ B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B_3 = B_2 \cap B_3 = \emptyset; P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} > 0$$

Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym do zdarzenia A, otrzymujemy

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3)$$

Ponieważ $P(A \mid B_1) = \frac{1}{2}, P(A \mid B_2) = \frac{3}{4}, P(A \mid B_3) = \frac{7}{8}$, więc

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe $\frac{17}{24}$.
Uwaga
Można rozwiazać zadanie za pomoca drzewa.

12.5. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Za zdarzenia elementarne przyjmijmy pary wylosowanych kul, czyli

$$|\Omega| = 9 \cdot 6 = 54$$

Dwie kule białe możemy wylosować na $4 \cdot 2$, dwie czarne na $3 \cdot 3$, a dwie zielone na $2 \cdot 1$ sposobów. Daje to w sumie

$$8 + 9 + 2 = 19$$

zdarzeń sprzyjających i prawdopodobieństwo wynosi $\frac{19}{54}$.

12.6. Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}8$, to $P(A \mid B) \geq 0{,}625$.
$P(A \mid B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wykażemy najpierw, że jeżeli $P(A)=0{,}7$ i $P(B)=0{,}8$, to $P(A\cap B)\geq 0{,}5$.
Wiemy, że $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ oraz $P(A\cup B)\leq 1$.

Mamy więc: $1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, stąd $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$, czyli $P(A\cap B)\geq 0{,}5$.
Stąd $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq\frac{0{,}5}{0{,}8}=0{,}625$

12.7. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1,2,3,\dots,12,13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1,2,3,\dots,12,13\}$. Jest to model klasyczny.
Wprowadzamy oznaczenia:
A - wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8 ,
B - suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.
Mamy obliczyć $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.
Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej, $|B|=7\cdot 6=42$

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej, $|A\cap B|=1\cdot 7=7$,
stąd

$$P(A\mid B)=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}$$

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\frac{1}{6}$.

12.8. Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24

Rozwiązanie:

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.
Mamy więc pięć, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24 :

1 Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

- $8 \cdot \binom{7}{3} = 280$ - wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki
albo tak:
- $\binom{8}{4}.4 = 280$ - wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki, albo tak:
- $\frac{8!}{3!4!} = 280$ - ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.

2 Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$).
Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

- $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ - wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa albo tak:
- $\binom{8}{3} \cdot 3! = 336$ - wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,
albo tak:
- $\frac{8!}{5!} = 336$ - ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111 .

3 Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek ($24 = 3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$).
Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

- $8 \cdot 7 = 56$ - wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki albo tak:
- $\binom{8}{2} \cdot 2 = 56$ - wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich, albo tak:
- $\frac{8!}{6!} = 56$ - ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111 .

4 Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek ($24 = 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$).
Liczbę takich liczb można obliczyć na przyklad tak:

- $8.7 = 56$ - wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki albo tak:
- $\binom{8}{2} \cdot 2 = 56$ - wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich, albo tak:
- $\frac{8!}{6!} = 56$ - ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111 .

5 Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek ($24 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$).
Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

- $\binom{7}{2} = 168$ - wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek, albo tak:
- $\binom{8}{3} \cdot 3 = 168$ - wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki, albo tak:
- $\frac{8!}{2!5!} = 168$ - ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111 .

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest

$$280 + 336 + 56 + 56 + 168 = 896$$

12.9. Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

Rozwiązanie:

Wszystkie liczby stucyfrowe o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry $0,1,3,5$ możemy podzielić na 4 grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu liczby:

1 Liczba $5000 \dots 000$,w której po cyfrze 5 następuje 99 zer. Jest jedna taka liczba.

2 Liczby postaci $3000 \dots 1 \dots 000 \dots 1 \dots 000$, w których po cyfrze 3 występuje 97 cyfr 0 i dwie cyfry 1, stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{2} = \frac{99 \cdot 98}{2} = 99 \cdot 49 = 4851$ takich liczb.

3 Liczby postaci $1000 \dots 3 \dots 000 \dots 1 \dots 000$ lub $1000 \dots 1 \dots 000 \dots 3 \dots 000$, w których po cyfrze 1 występuje 97 cyfr 0 oraz cyfry 1 i 3 (w dowolnej kolejności), stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $99.98 = 9702$ takich liczb.

4 Liczby postaci $1000 \dots 1 \dots 000 \dots 1 \dots 000 \dots 1 \dots 000 \dots 1 \dots 000$, w których po cyfrze 1 występuje 95 cyfr 0 i cztery cyfry 1 , stojące na czterech miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{4} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{24} = 33 \cdot 49 \cdot 97 \cdot 24 = 3764376$ takich liczb.

Zatem wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry $0,1,3,5$, jest

$$1 + 4851 + 9702 + 3764376 = 3778930$$

12.10. W urnie znajduje się 20 kul: 9 białych, 9 czerwonych i 2 zielone. Z tej urny losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Obliczymy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{20}{3} = 1140$.

Zdarzenie A polega na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

Ustalamy moc zdarzenia A:

$|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} = 978$

Obliczamy szukane prawdopodobieństwo, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{489}{570} = \frac{163}{190}$$

12.11. Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety jest równe 0,1 .
Obliczamy, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Rozwiązanie:

Oznaczamy n-liczba kobiet, $2n$-liczba mężczyzn i $n \geq 2$.

Zdarzeniem elementarnym jest każdy dwuelementowy podzbiór zbioru $3n$ - elementowego.

Wyznaczamy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω :

$$|\Omega| = \binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}$$

A-zdarzenie polegające na tym, że w delegacji znajdują się tylko kobiety.

Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A:

$$|A| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{n-1}{3(3n-1)}$$

Zapisujemy równanie wynikające z warunków zadania:

$$\frac{n-1}{3(3n-1)}=\frac{1}{10}$$
$$10n-10=9n-3$$
$$n=7$$

W grupie jest 7 kobiet i 14 mężczyzn.

12.12. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najkrótszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:

$$111+112+113+121+122+123+131+132+133=1098$$
$$211+212+213+221+222+223+231+232+233=1998$$
$$311+312+313+321+322+323+331+332+333=2898$$

Suma wszystkich liczb jest równa

$$1098+1998+2898=5994$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9\cdot 100+(11+12+13+21+22+23+31+32+33)=900+198=1098$$
$$9\cdot 200+(11+12+13+21+22+23+31+32+33)=1800+198=1998$$
$$9\cdot 300+(11+12+13+21+22+23+31+32+33)=2700+198=2898$$

Dodawanie

$$11+12+13+21+22+23+31+32+33=198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a\cdot 100+b\cdot 10+c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100 , oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100 . Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dadzą sumę

$$9 \cdot 100 + 9 \cdot 200 + 9 \cdot 300 = 9 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 100 \cdot 6 = 5400$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dadzą sumę

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + 9 \cdot 30 = 9 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 10 \cdot 6 = 540$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 9 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 6 = 54$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem

$$5400 + 540 + 54 = 5994$$

12.13. Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

Rozwiązanie:

Rozpatrzymy trzy rozłączne przypadki, w zależności od tego, jaka cyfra została zapisana na pierwszym miejscu.

→.Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 1 , to miejsce dla pozostałych dwóch jedynek wybieramy na $\binom{9}{2}$ sposobów, na pozostalych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2^7 = 36 \cdot 128 = 4608$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr $1,2,3$, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 1.
→. jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 2, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy

na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr $1,2,3$, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 2 .
→. (rozumowanie analogiczne jak w p. 2.). Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 3 , to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr $1,2,3$, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 3.
Sumujemy liczby powstałe w każdym z trzech przypadków i otrzymujemy:

$$4608 + 2 \cdot 5376 = 15360$$

12.14. Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.
Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$.
Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Mamy zatem

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5!}{2!\,5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21$$

W kroku drugim obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwukrotnie z reguły mnożenia.

Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie występuje zero, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: $2,4,6,8$. Mamy zatem $4^2 = 16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: $1,3,5$, 7, 9. Mamy zatem $5^5 = 3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostalych miejscach.

W kroku trzecim obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy

$21 \cdot 4^2 \cdot 5^5 = 21 \cdot 16 \cdot 3125 = 1050000$ liczb.

12.15. Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7 , 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

Rozwiązanie:

Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest tyle, ile permutacji zbioru 5 -elementowego, czyli $5! = 120$ liczb.
Zapisując te liczby, jedna pod drugą, można zauważyć, że każda z cyfr $-1,3,5,7,9$ pojawia się w każdej kolumnie dokładnie 24 razy.

Dodając do siebie wszystkie cyfry z kolumny jedności otrzymujemy
$$24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 24 \cdot 25 = 600$$
Dodając do siebie wszystkie cyfry z kolumny dziesiątek otrzymujemy
$$10 \cdot 24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 10 \cdot 24 \cdot 25 = 6000$$
Dodając do siebie wszystkie cyfry z kolumny setek otrzymujemy
$$100 \cdot 24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 100 \cdot 24 \cdot 25 = 60000$$
Dodając do siebie wszystkie cyfry z kolumny tysięcy otrzymujemy
$$1000 \cdot 24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 1000 \cdot 24 \cdot 25 = 600000$$
Dodając do siebie wszystkie cyfry z kolumny dziesiątek tysięcy otrzymujemy
$$10000 \cdot 24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 10000 \cdot 24 \cdot 25 = 6000000$$

Zatem suma wszystkich rozważanych liczb jest równa 6666600 .

Rozwiązanie tą metodą można przedstawić w sposób skrócony
$(10000 + 1000 + 100 + 10 + 1) \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 24 = 11111 \cdot 25 \cdot 24 = 6666600$

12.16. Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Rozwiązanie:

Rozważamy trzy przypadki.

- I. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1 . Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie dwie cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje
$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2 = 15\cdot 6\cdot 64 = 5760$$
- II. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej jest 2. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje
$$\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot 8^2 = 20\cdot 3\cdot 64 = 3840$$
- III. Pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. Pierwsza cyfra jest też różna od 0 . Zatem na pierwszym miejscu stoi jedna z siedmiu cyfr ze zbioru $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje
$$7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8 = 7\cdot 20\cdot 3\cdot 8 = 3360$$

Łącznie istnieje zatem $5760 + 3840 + 3360 = 12960$ rozważanych liczb.
Istnieje 12960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2 .

12.17. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

Rozwiązanie:

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15.
Niech B oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest podzielna przez 18.

W zadaniu mamy obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Zbiór liczb naturalnych czterocyfrowych zawiera 9000 elementów, zatem $|\Omega| = 9000$.
Do zbioru B należą liczby:
$1008, 1026, 1044, \ldots, 1008 + (n-1)\cdot 18$ (gdzie $1008 + (n-1)\cdot 18 \le 9999$,
a liczba naturalna n jest liczbą elementów zbioru B).

Ponieważ

$$n \leq \frac{9999 - 1008}{18} + 1 = 500{,}5$$

więc $n = 500$.

Zatem

$$P(B) = \frac{500}{9000} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

Zdarzenie $A \cap B$ zachodzi tylko wtedy, gdy wylosowana liczba jest jednoczesnie podzielna przez 15 i przez 18, czyli przez 90
Do zbioru $A \cap B$ należą zatem liczby: $1080, 1170, 1260, \ldots, 1080 + (m-1) \cdot 90$
(gdzie $1080 + (m-1) \cdot 90 \leq 9999$, a liczba naturalna m jest liczbą elementów zbioru $A \cap B$).

Ponieważ

$$m \leq \frac{9999 - 1080}{90} + 1 = 100{,}1$$

więc $m = 100$.
Zatem

$$P(A \cap B) = \frac{100}{9000} = \frac{1}{90}$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego otrzymujemy

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{90}}{\frac{1}{18}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

SPIS TREŚCI

Źródła:

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki
od roku szkolnego 2014/2015
opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki
(poziom rozszerzony) od roku szkolnego 2022/2023
opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną

Matura z matematyki materiały pomocnicze dla nauczycieli i uczniów
opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną 2014

Wybrane wzory matematyczne
opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną 2015

Arkusze maturalne
opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną