Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

III Liceum Ogólnokształcącego im. św. Jana Kantego w Poznaniu

Tytuł zajęć

„ Zajęcia wyrównawcze z matematyki- poziom podstawowy”

Autor/Autorzy opracowania

Mgr Justyna Nowak

Niniejszy skrypt powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:

„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań*”

Poznań 2021

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Liczby rzeczywiste	3
2.	Wyrażenia algebraiczna. Równania i nierówności	2
3.	Funkcje.	3
4.	Ciągi	2
5.	Trygonometria	2
6.	Planimetria	2
7.	Geometria analityczna	2
8.	Stereometria	2
9.	Statystyka. Kombinatoryka. Rachunek prawdopodobieństwa	2
	Łączna liczba godzin	20

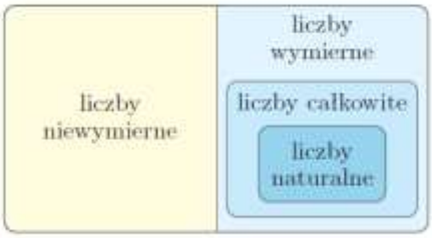
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

SPIS TREŚCI

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

I. LICZBY RZECZYWISTE

Część 1. Teoria



1. Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy ***zbiorem liczb rzeczywistych*** i oznaczamy literą R.
2. ***Liczby naturalne***- są to liczby całkowite nieujemne. Zbiór liczb naturalnych oznaczany jest literą $\mathbb{N}$.

   UWAGA! Zero jest kwestią umowną czy należy do zbioru liczb naturalnych czy też nie. My zaliczać będziemy go do tego zbioru.
3. Liczba naturalna n jest podzielna przez liczbę naturalną m różną od zera wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $n = m \cdot k$. Liczbę m nazywamy dzielnikiem liczby n, zaś o liczbie n mówimy wówczas, że jest wielokrotnością liczby m. Fakt, że m jest dzielnikiem liczby n, oznaczamy: $m \mid n$.
4. Niech n i m będą liczbami naturalnymi oraz $m \neq 0$. W wyniku dzielenia liczby n przez liczbę m otrzymujemy resztę r wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k, dla której $n = m \cdot k + r$, gdzie $k, r \in \boldsymbol{N}$ oraz $r < m$.
5. ***Liczby całkowite*** to liczby naturalne dodatnie: $1,2,3,4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0 . Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą $\mathbb{Z}$.

   Każda liczba całkowita jest albo parzysta, albo nieparzysta.
6. Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi $(n \neq 0)$, nazywamy ***liczbami wymiernymi***. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.
7. Liczby, które nie są wymierna nazywamy ***niewymiernymi***. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy $\mathbf{I}\mathbb{Q}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

8. Ułamki o mianownikach: 10, 100, 1000, … - nazywamy **ułamkami dziesiętnymi.** Mogą one mieć postać, np.: $\frac{1}{10} = 0{,}1\,; \frac{7}{100} = 0{,}07$. Zapis po prawej stronie nazywamy postacią dziesiętną lub rozwinięciem dziesiętnym liczby.
   - Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej;
   - Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.
9. W rozwinięciu dziesiętnym nawias oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką powtarzającą się grupę cyfr nazywamy okresem. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy długością okresu
10. Niech $m \neq 0$ i n bedą liczbami naturalnymi. ***Liczbę $\boldsymbol{m}$ nazywamy dzielnikiem liczby $\boldsymbol{n}$***, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $n = m \cdot k$.

    Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n, to mówimy, że liczba n jest podzielna przez liczbę m lub że liczba n jest wielokrotnością liczby m. Zauważmy, że:

    - liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,

    - liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,

    - każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.
11. Niech n będzie liczbą naturalną.
    Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy parzystą. Oznaczenie liczby parzystej: $n = 2k,\ k \in Z$
    Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy nieparzystą. Oznaczenie liczby nieparzystej:
    $n = 2k + 1,\ k \in Z$

12. Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy liczbą ***pierwszą***. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy liczbą ***złożoną***. Liczby 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb
13. Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze będące liczbami pierwszymi. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).
    Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Praktyczne zastosowanie rozkładu na czynniki pierwsze przy wyznaczaniu NWD i NWW liczb.

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

14. Niech dane będą liczby naturalne a, b, z których co najmniej jedna jest różna od zera.

    Największym wspólnym dzielnikiem liczb a, b nazywamy największą liczbę naturalną, która jest dzielnikiem każdej z liczb a i b; oznaczamy ją $\boldsymbol{NWD(a, b)}$.

15. Niech dane będą liczby naturalne a, b, obie różne od zera.

    Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od 0, która jest podzielna przez a i przez b; oznaczamy ją $\boldsymbol{NWW(a, b)}$.

16. ***Cechy podzielności liczb***

    Liczba naturalna jest podzielna przez:

    - 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8;
    - 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3
    - 4, gdy dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 2;
    - 5 , gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5 ;
    - 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9;
    - 10, gdy ostatnią cyfrą jest cyfra 0.

17. ***Wartością bezwzględną*** liczby rzeczywistej a (oznaczenie $|a|$) nazywamy:

    - liczbę a, jeśli a jest liczbą nieujemną
    - liczbę przeciwną do a, jeśli a jest liczbą ujemną.

    Zapis symboliczny:

    $$|a| = \begin{cases} a, \text{jeśli } a \geqslant 0 \\ -a, \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

    Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej a jest równa odległości punktu o współrzędnej a od punktu zerowego *OX*.

    Odległość na osi liczbowej między dwoma dowolnymi punktami o współrzędnych a i b jest równa $|a - b|$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

18. Potęgą o wykładniku naturalnym $n, n > 0$ i podstawie a, gdzie a jest dowolna liczbą rzeczywistą, nazywamy liczbę

$$a^1 \underset{\text{z def.}}{=} a$$
$$a^n \underset{\text{zdef.}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}, \text{ jeśli } n > 1$$

Potęgę o wykładniku 0 (zero) określamy następująco:

$$a^0 \underset{\text{z def.}}{=} 1$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od zera $(a \neq 0)$.

19. Własności potęgowania:

Jeśli m i n są liczbami całkowitymi, a i b są liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, to:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $a^m : a^n = a^{m-n}$, jeśli $m \geqslant n$

c) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

d) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

e) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

20. Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leqslant x < 10$, a n - liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy ***notacją wykładniczą.***

21. ***Pierwiastkiem arytmetycznym*** n-tego stopnia, $n \in N - \{0,1\}$, z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, dla której $b^n = a$.

Zapis symboliczny:

Jeśli $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$, to $(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n \underset{\text{zdef.}}{=} a)$

Przypomnijmy: pierwiastek stopnia drugiego nazywamy pierwiastkiem kwadratowym i oznaczamy symbolem $\sqrt{}$, a pierwiastkiem stopnia drugiego nazywamy pierwiastkiem sześciennym $\sqrt[3]{}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

UWAGA: Jeśli stopień pierwiastka (n) jest liczbą nieparzysta, to ostatnią definicję można rozszerzyć na przypadek liczb ujemnych $(a < 0)$:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow_{\text{z def.}} b^n = a$$

Pierwiastek taki nazywamy **pierwiastkiem stopnia nieparzystego** z liczby ujemnej (nie używamy określenia „arytmetyczny").

22. Własności pierwiastka arytmetycznego

Jeśli a, b są liczbami nieujemnymi, n, m - liczbami naturalnymi większymi od $1, p$ jest liczbą naturalną dodatnią, to:

a) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

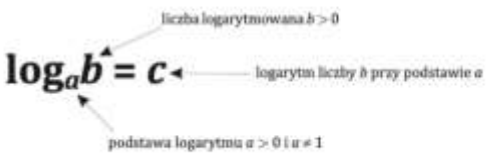
c) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

d) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

23. Potęgą o wykładniku $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N} - \{0,1\}$ i nieujemnej podstawie $a(a \geqslant 0)$, nazywamy pierwiastek arytmetyczny stopnia n z liczby a.
Zapis symboliczny:
Jeśli $a \geqslant 0$, to $a^{\frac{1}{n}} = \underset{\text{z def.}}{=} \sqrt[n]{a}$.

24. Potęgę o wykładniku wymiernym określamy następująco:
a) $a^{\frac{m}{n}} \underset{\text{zdef.}}{=} (\sqrt[n]{a})^m$, gdzie $a \geqslant 0, n \in \boldsymbol{N} - \{0,1\}, m \in \boldsymbol{N}_+$
b) $a^{-\frac{m}{n}} \underset{\text{zdef.}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, gdzie $a > 0, n \in \boldsymbol{N} - \{0,1\}, m \in \boldsymbol{N}_+$

25. Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a, dodatniej i różnej od jedności, nazywamy liczbę c, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę b.
Zapis symboliczny:
Jeśli $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0$, to $\left(\log_a b = c \underset{\text{zdef.}}{\Leftrightarrow} a^c = b\right)$
liczba logarytmowana $b > 0$



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

26. Własności logarytmów cz. 1

Jeśli $a \in \boldsymbol{R}_{+} - \{1\}, b \in \boldsymbol{R}_{+}$ i $r \in \boldsymbol{R}$, to:

a) $\log_a a = 1$

b) $\log_a 1 = 0$

c) $\log_a a^r = r$

d) $a^{\log_a b} = b.$

27. Własności logarytmów cz. 2

Jeśli $a, b \in \boldsymbol{R}_{+} - \{1\}, c, x, y \in \boldsymbol{R}_{+}$ i $r \in \boldsymbol{R}$, to:

a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

d) $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

28. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (kwadrat sumy wyrażeń a i b jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń, zwiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń);
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (kwadrat różnicy wyrażeń a i b jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń, zmniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń);
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (różnica kwadratów wyrażeń a i b jest równa kwadratowi różnicy tych wyrażeń przez sumę tych wyrażeń);
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sześcian sumy liczb a i b;
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ sześcian różnicy liczb a i b;
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ suma sześcianów liczb a i b;
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ różnica sześcianów liczb a i b;

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 1.1

Liczba $17^3 + m^3$ jest podzielna przez 19 dla

A. $m = -8$

B. $m = -2$

C. $m = 2$

D. $m = 8$

ROZWIĄZANIE: $17^3 + m^3 = (17 + m)(17^2 - 17m + m^2), m = 2$

Zadanie 1.2

Liczba $\frac{9^5 \cdot 5^9}{45^5}$ jest równa

A. 45^{40}

B. 45^9

C. 9^4

D. 5^4

ROZWIĄZANIE: $\frac{9^5 \cdot 5^9}{45^5} = \frac{9^5 \cdot 5^9}{9^5 \cdot 5^5} = 5^4$

Zadanie 1.3

W rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{2}{7}$ na trzydziestym miejscu po przecinku stoi cyfra

A. 7

B. 1

C. 2

D. 4

ROZWIĄZANIE: $\frac{2}{7} = 0,(285714)\ 30: 6 = 5r0$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 1.4

Liczba $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ jest równa

A. $\sqrt[6]{3}$

B. $\sqrt[4]{3}$

C. $\sqrt[3]{3}$

D. $\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE: $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Zadanie 1.5

Różnica $50001^2 - 49999^2$ jest równa

A. 2000000

B. 200000

C. 20000

D. 4

ROZWIĄZANIE:

$$50001^2 - 49999^2 = (50001 - 49999) \cdot (50001 + 49999) = 200000$$

Zadanie 1.6

Słoń waży 5 ton, a waga mrówki jest równa 0,5 grama. Ile razy słoń jest cięższy od mrówki?

A. 10^6

B. 10^7

C. 10

D. 10^8

ROZWIĄZANIE: $5t = 5\,000\,000g = 5 \cdot 10^6 g = 0{,}5 \cdot 10^7 g$, $(0{,}5 \cdot 10^7) : 0{,}5 = 10^7$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 1.7

Suma pięciu kolejnych liczb całkowitych jest równa 195. Najmniejszą z tych liczb jest:

A. 37

B. 38

C. 39

D. 40

ROZWIĄZANIE: $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 195$

$$5n + 10 = 195$$

$$5n = 185$$

$$n = 37$$

Zadanie 1.8

Suma $16^{24} + 16^{24} + 16^{24} + 16^{24}$ jest równa

A. 4^{24}

B. 4^{25}

C. 4^{48}

D. 4^{49}

ROZWIĄZANIE: $16^{24} + 16^{24} + 16^{24} + 16^{24} = 16^{24} \cdot 4 = (4^2)^{24} \cdot 4 = 4^{48} \cdot 4 = 4^{49}$

Zadanie 1.9

Niech $a = -2, b = 3$. Wartość wyrażenia $a^b - b^a$ jest równa

A. $\frac{73}{9}$

B. $\frac{71}{9}$

C. $-\frac{73}{9}$

D. $-\frac{71}{9}$

ROZWIĄZANIE: $a^b - b^a = (-2)^3 - 3^{-2} = -8 - \frac{1}{9} = -\frac{72}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{73}{9}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 1.10

Liczba $9^9 \cdot 81^2$ jest równa

A. 81^4

B. 81

C. 9^{13}

D. 9^{36}

ROZWIĄZANIE: $9^9 \cdot 81^2 = 9^9 \cdot (9^2)^2 = 9^9 \cdot 9^4 = 9^{13}$

Zadanie 1.11

Liczba $(2\sqrt{7} - 5)^2 \cdot (2\sqrt{7} + 5)^2$ jest równa

A. 9

B. 3

C. 2809

D. $28 - 20\sqrt{7}$

ROZWIĄZANIE: $\left((2\sqrt{7} - 5)(2\sqrt{7} + 5)\right)^2 = (28 - 25)^2 = 3^2 = 9$

Zadanie 1.12

Dane są liczby $a = 3{,}6 \cdot 10^{-12}$ oraz $b = 2{,}4 \cdot 10^{-20}$. Wtedy iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy

A. $8{,}64 \cdot 10^{-32}$

B. $1{,}5 \cdot 10^{-8}$,

C. $1{,}5 \cdot 10^{8}$

D. $8{,}64 \cdot 10^{32}$

ROZWIĄZANIE: $\frac{a}{b} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-12}}{2{,}4 \cdot 10^{-20}} = 1{,}5 \cdot 10^{-12-(-20)} = 1{,}5 \cdot 10^{-12+20} = 1{,}5 \cdot 10^{8}$

Zadanie 1.13

Liczba $\log 4 + \log 5 - \log 2$ jest równa

A. 10

B. 2

C. 1

D. 0

ROZWIĄZANIE: $\log 4 + \log 5 - \log 2 = \log\left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right) = log 10 = 1$

Zadanie 1.14

Suma $\log_8 16 + 1$ jest równa

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. $\log_8 17$

D. $\frac{7}{3}$

ROZWIĄZANIE: $\log_8 16 + 1 = \log_8 16 + \log_8 8 = \log_8(16 \cdot 8) = x$

$8^x = 16 \cdot 8;$ $2^{3x} = 2^4 \cdot 2^3$; $2^{3x} = 2^{12};$ $3x = 7;$ $x = \frac{7}{3}$

Zadanie 1.15

Dane są liczby: $a = \log_{\frac{1}{2}} 8, b = \log_4 8, c = \log_4 \frac{1}{2}$. Liczby te spełniają warunek

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $b > c > a$

ROZWIĄZANIE: $\left(\frac{1}{2}\right)^a = 8;$ $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $a = -3;$

$4^b = 8;$ $2^{2b} = 2^3;$ $2b = 3;$ $b = \frac{3}{2};$

$4^c = \frac{1}{2};$ $2^{2c} = 2^{-1};$ $2c = -1;$ $c = -\frac{1}{2};$

$\frac{3}{2} > -\frac{1}{2} > \frac{3}{2}$; $b > c > a$;

Zadanie 1.16

Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230 . Równaniem opisującym tę zależność jest

A. $0{,}15 \cdot x = 230$

B. $0{,}85 \cdot x = 230$

C. $x + 0{,}15 \cdot x = 230$

D. $x - 0{,}15 \cdot x = 230$

Zadanie 1.17

Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

obniżek cena nart zmniejszyła się o

A. 44%

B. 50%

C. 56%

D. 60%

ROZWIĄZANIE: $0{,}8x \cdot 0{,}7 = 0{,}56x;$ $x - 0{,}56x = 0{,}44x$

Zadanie 1.18

Marża równa 1,5% kwoty pożyczonego kapitału była równa 3000 zł. Wynika stąd, że pożyczono

A. 45zł

B. 2000zł

C: 200000zł

D. 450000zł

ROZWIĄZANIE: $1{,}5\% = 0{,}015;$ $\frac{3000}{0{,}015} = \frac{3\,000\,000}{15} = 200\,000\ [zł]$

Zadanie 1.19

Liczby a i b są dodatnie oraz 12% liczby a jest równe 15% liczby b. Stąd wynika, że a jest równe

A. 103% liczby b

B. 125% liczby b

C. 150% liczby b

D. 153% liczby b

ROZWIĄZANIE: $0{,}12a = 0{,}15b;$ $a = \frac{0{,}15}{012}b;$ $a = \frac{15}{12}b;$ $a = \frac{5}{4}b;$

$a = 1{,}25b;$ $a = 125\%b;$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 1.20

Czterech przyjaciół zarejestrowało spółkę. Wysokość udziałów poszczególnych wspólników w kapitale zakładowym spółki wyraża stosunek $12:8:3:2$. Jaką część kapitału zakładowego stanowi udział największego inwestora?

A. 12%

B. 32%

C. 48%

D. 52%

ROZWIĄZANIE: $12x + 8x + 3x + 2x = 25x$; $\frac{12x}{25x} = \frac{48}{100} = 0{,}48$.

Zadanie 2.21

Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa

A. $1000 \cdot \left(1 - \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

B. $1000 \cdot \left(1 + \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

C. $1000 \cdot \left(1 + \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

D. $1000 \cdot \left(1 - \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

Zadanie 2.22

Liczbami spełniającymi równanie $|2x + 3| = 5$ są:

A. 1 i -4

B. 1 i 2

C. -1 i 4

D. -2 i 2

ROZWIĄZANIE: $2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ lub $2x + 3 = -5 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$;

Zadanie 2.23

Liczba $|9 - 2| - |4 - 7|$jest równa:

A. 4

B. 10

C. -10

D. -4

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

II. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚĆI

Część 1. Teoria

1. ***Przedziałem otwartym*** o końcach $a, b(a < b)$ nazywamy zbiór wSzystkich liczb rzeczywistych, które są większe od a i jednocześnie mniejsze od b.

   Zapis symboliczny:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \underset{\text{def.}}{=} \{x : x \in \boldsymbol{R} \wedge a < x < b\}$$

   Na osi liczbowej przedział otwarty zaznaczamy następująco:

   Końce a, b przedziału są oznaczone kółkami niezamalowanymi dla zaznaczenia, że nie należą one do przedziału (a, b). Przedział (a, b) można też zaznaczać na osi tak:

   W przedziale otwartym nie ma liczby największej ani najmniejszej.

2. ***Przedziałem domkniętym*** o końcach $a, b, (a < b)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są nie mniejsze od a (czyli większe od a lub równe a) i jednocześnie nie większe od b (czyli mniejsze od b lub równe b).

   Zapis symboliczny:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle_{\text{z def.}} = \{x : x \in \boldsymbol{R} \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$$

   Na osi liczbowej przedział domknięty zaznaczamy tak:

   W tym wypadku końce a, b oznaczone są kółkami zamalowanymi, by zaznaczyć, że należą one do przedziału. W przedziale $\langle a, b \rangle$ najmniejszą liczbą jest a, natomiast największą liczbą jest b.

   Wyróżniamy jeszcze:

   $\langle a, b\ )$ - przedział lewostronnie domknięty (nazywany też prawostronnie otwartym).

   W przedziale tym najmniejszą liczbą jest a, nie ma za to liczby największej.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$\langle a, b\rangle$ - przedział lewostronnie otwarty (nazywany też prawostronnie domkniętym).

Z kolei w tym przedziale nie ma najmniejszej liczby, natomiast największą liczbą jest b.

3. ***Przedziały nieograniczone***
   - $(\boldsymbol{a}, +\infty)$ - przedział lewostronnie otwarty nieograniczonym

   - $\langle a, +\infty)$ - przedział lewostronnie domknięty nieograniczony

   - $(-\infty, a)$ - przedział prawostronnie otwarty nieograniczony

   - $(-\infty; a\rangle$ – przedział lewostronnie otwarty nieograniczony

   UWAGA: Symbol $+\infty$ (plus nieskończoność) nie oznacza żadnej liczby rzeczywistej. Wskazuje, że np. w przedziale $(a, +\infty)$ znajdują się tylko liczby rzeczywiste większe od a. Odpowiednio symbol $-\infty$ (minus nieskończoność) nie oznacza żadnej liczby rzeczywistej. Wskazuje, że np. w przedziale $(-\infty, a)$ znajdują się tylko liczby rzeczywiste mniejsze od a. Przedział nieograniczony $(-\infty, +\infty)$ będziemy rozumieli jako zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.

4. Wyrażenia, w których występują liczby i litery połączone znakami działań i nawiasami nazywamy ***wyrażeniami algebraicznymi***.
5. ***Jednomianami*** nazywamy liczby i litery połączone znakiem mnożenia.
6. Jednomianem podobnym nazywamy jednomiany, które różnią się jedynie współczynnikiem liczbowym.
7. ***Równaniem z niewiadomą x*** nazywamy formę zdaniową zmiennej x, w której występuje znak „=”.
8. ***Dziedziną równania z niewiadomą x*** nazywamy dziedzinę odpowiedniej formy zdaniowej zmiennej x.
9. ***Liczba spełnia równanie z niewiadomą x***, jeśli po podstawieniu tej liczby do równania w miejsce niewiadomej x otrzymamy zdanie prawdziwe.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

10. ***Rozwiązaniem równania z jedna niewiadomą x*** nazywamy każdą liczbę rzeczywistą, która spełnia to równanie.
11. ***Rozwiązać równanie z jedną niewiadomą*** to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające to równanie.
12. ***Równaniem sprzecznym*** nazywamy równanie, którego nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny równania.
13. ***Równaniem tożsamościowym*** nazywamy równanie, którego jest spełnione przez każdą liczbę należącą do dziedziny tego równania.
14. ***Nierównością z niewiadomą x*** nazywamy formę zdaniową zmiennej *x*, w której występuje jeden ze znaków: $<, >, \leq, \geq$.
15. ***Dziedziną nierówności z niewiadomą x*** nazywamy dziedzinę odpowiedniej formy zdaniowej zmiennej *x*.
16. ***Liczba spełnia nierówność z niewiadomą x***, jeśli po podstawieniu tej liczby do nierówności w miejsce *x* otrzymamy zdanie prawdziwe.
17. ***Rozwiązać nierówność z jedną niewiadomą x*** to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb spełniających daną nierówność lub wykazać, że nie istnieją liczny spełniające tę nierówność.
18. ***Układem dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y*** nazywamy koniunkcję takich równań i oznaczamy:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \text{ i } a_2^2 + b_2^2 > 0$$

19. ***Rozwiązaniem układu dwóch równań*** pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą parę liczb (x, y), która spełnia jednocześnie oba równania układu.
20. ***Rozwiązać układ równań pierwszego stopnia*** z dwiema niewiadomymi, to wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania, albo stwierdzić, że zbiór rozwiązań jest pusty.
21. ***Metody rozwiązywania układów równań***:
    a) *Metoda podstawiania*
    Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą i podstawimy otrzymane wyrażenie do drugiego równania zamiast tej niewiadomej, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego do drugiego równania jest równoważny danemu.

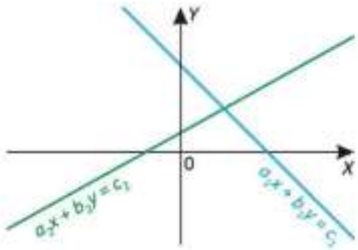
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

b) *Metoda przeciwnych współczynników*

Jeżeli obie strony jednego równania układu pomnożymy przez dowolną liczbę różną od zera, a następnie otrzymane równanie i drugie równanie układu dodamy stronami, i tak otrzymanym równaniem zastąpimy dowolne z równań układu, to otrzymamy układ równań równoważnych danemu.

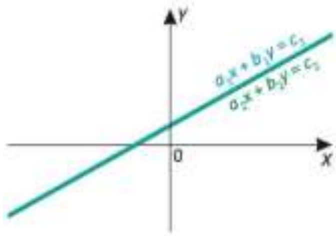
c) *Metoda graficzna*

Wiadomo, że wykresem równania I stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta. W zależności od położenia dwóch prostych w układzie współrzędnych równania opisujące te proste tworzą jeden z następujących układów równań:



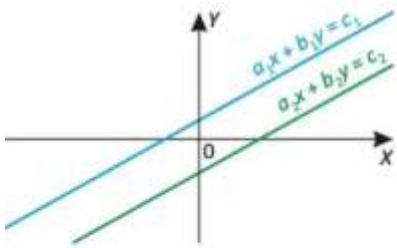
- *Układ oznaczony*- posiada jedno rozwiązanie

  Proste mają tylko jeden punkt wspólny. Współrzędne tego punktu tworzą parę liczb, która spełnia zarówno równanie $a_1x + b_1y = c_1$, jak i równanie $a_2x + b_2y = c_2$. Ta para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu.



- *Układ nieoznaczony*- nieskończenie wiele rozwiązań

  Proste się pokrywają. Dowolny punkt jednej prostej jest jednocześnie punktem należącym do drugiej prostej. Każda para liczb rzeczywistych, spełniająca jedno równanie, spełnia również drugie równanie; tych par jest nieskończenie wiele.



- *Układ sprzeczny*- brak rozwiązań

  Proste są równoległe i nie mają punków wspólnych. Nie istnieje para liczb, która spełniałaby jednocześnie oba równania.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

22. ***Równaniem kwadratowym (z niewiadomą x)*** nazywamy równanie, które można doprowadzić do postaci $ax^2 + bx + c = 0$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.
23. ***Równanie kwadratowe*** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$**,** gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac$:
    a) nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$
    b) ma jedno rozwiązanie, $x_0 = \frac{-b}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$
    c) ma dwa rozwiązania, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$
24. ***Nierównością kwadratową*** nazywamy każdą nierówność, którą można doprowadzić do postaci $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$, lub $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 2.1

Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$ jest liczba

A. 1

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{4}{7}$

D. 7

ROZWIĄZANIE: $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 15x - 5 = 14x + 2$ i $x \neq -\frac{1}{7} \Leftrightarrow x = 7$

Zadanie 2.2

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba

A. 9

B. 7

C. 4

D. 1

ROZWIĄZANIE: $(x-2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3,2); x \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 2.3

Równanie $\frac{x^2-4}{(x-4)(x+4)} = 0$ma

A. nie ma rozwiązań

B. dokładnie jedno rozwiązanie

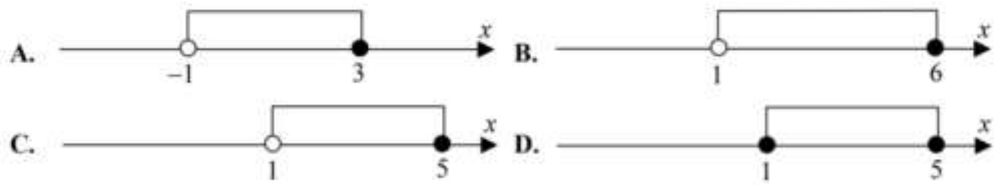
C. dokładnie dwa rozwiązania

D. dokładnie cztery rozwiązania

ROZWIĄZANIE: $\frac{x^2-4}{(x-4)(x+4)} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ i $D_f: x \neq \pm 4 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 2$

Zadanie 2.4

Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5) \leq 0$ i $x > 1$.



ROZWIĄZANIE: $3(x-1)(x-5) \leq 0$ i $x > 1 \Leftrightarrow x \in (1,5\rangle$ C.

Zadanie 2.5

Funkcja $\dot{f}(x) = 3x(x^2+5)(2-x)(x+1)$ ma dokładnie

A. dwa miejsca zerowe.

B. trzy miejsca zerowe.

C. cztery miejsca zerowe.

D. pięć miejsc zerowych.

ROZWIĄZANIE: $3x(x^2+5)(2-x)(x+1) \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 2$ lub $x = -1$

Zadanie 2.6

Liczba niewymiernych rozwiązań równania $x^2(x+5)(2x-3)(x^2-7) = 0$ jest równa

A. 0

B. 1

C. 5

D. 2

ROZWIĄZANIE: $x^2(x+5)(2x-3)(x^2-7) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = \frac{3}{2}, x_{4/5} = \pm\sqrt{7}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 2.7

Iloczyn liczb spełniających równanie $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$ jest równy

A. 6

B. -5

C. 5

D. -6

ROZWIĄZANIE: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3, x_2=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-2$

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-2) = -6$$

Zadnie 2.8

Do pewnej liczby a dodano 54. Otrzymaną sumę podzielono przez 2. W wyniku tego działania otrzymano liczbę dwa razy większą od liczby a. Zatem

A. $a=27$

B. $a=18$

C. $a=24$

D. $a=36$

ROZWIĄZANIE: $\frac{a+54}{2}=2a \Leftrightarrow 54=3a \Leftrightarrow a=18$

Zadanie 2.9

Wyrażenie $5a^2-10ab+15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1-10b+3)$

B. $5a(a-2b+3)$

C. $5a(a-10b+15)$

D. $5(a-2b+3)$

ROZWIĄZANIE: $5a^2-10ab+15=5a(a-2b+3)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 2.10

Dla każdych liczb rzeczywistych a, b wyrażenie $a - b + ab - 1$ jest równe

A. $(a + 1)(b - 1)$

B. $(1 - b)(1 + a)$

C. $(a - 1)(b + 1)$

D. $(a + b)(1 + a)$

ROZWIĄZANIE: $a - b + ab - 1 = a(1 + b) - (b + 1) = (a - 1)(b + 1)$

Zadanie 2.11

Wartość wyrażenia $(a + 5)^2$ jest większa od wartości wyrażenia $(a^2 + 10a)$ o

A. 50

B. 10

C. 5

D. 25

ROZWIĄZANIE: $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25;\ \ a^2 + 10a + 25 - (a^2 + 10a) = 25$

Zadanie 2.12

Dane są dwie sumy algebraiczne $3x^3 - 2x$ oraz $-3x^2 - 2$. Iloczyn tych sum jest równy

A. $-9x^5 + 4x$

B. $-9x^6 + 6x^3 - 6x^2 + 4x$

C. $-9x^5 + 6x^3 - 6x^2 + 4x$

D. $-9x^6 + 4x$

ROZWIĄZANIE: $(3x^3 - 2x)(-3x^2 - 2) = -9x^5 - 6x^3 + 6x^3 + 4x = -9x^5 + 4x$

Zadanie 2.13

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ jest

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Część 3 Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 2.14

Rozwiąż równanie $(x^3 - 8)(x^2 - 4x - 5) = 0$.

ROZWIAZANIE:

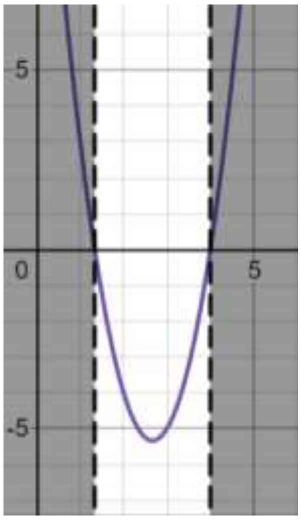
$(x^3 - 8) = 0$ lub $x^2 - 4x - 5 = 0$

$x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2;\ \Delta = 16 + 20 = 36\ ;\ \sqrt{\Delta} = 6 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4-6}{2} = -1\ i\ x_2 = \frac{4+6}{2} = 5$

Odp. $x \in \{2, -1{,}5\}$

Zadanie 2.15

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 16x + 16 > 0$.



ROZWIĄZANIE: $3x^2 - 16x + 16 > 0, \Delta = 16^2 - 12 \cdot 16 = 64$,

$$x_1 = \frac{16+8}{6} = 4,$$

$$x_2 = \frac{16-8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (4: \infty)$$

Zadanie 2.16

Dane są wielomiany $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1, Q(x) = 2x^2 - x - 1$ oraz $W(x) = ax + b$.

Wyznacz współczynniki a i b tak, aby wielomian $P(x)$ był równy iloczynowi $Q(x) \cdot W(x)$.

ROZWIĄZANIE:

$$-2x^3 + 3x^2 - 1 = (2x^2 - x - 1)(ax + b) = 2ax^3 + (2b - a)x^2 + (-b - a)x - b.$$

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ 2b - a = 3 \\ -b - a = 0 \\ -b = -1 \end{cases}$$

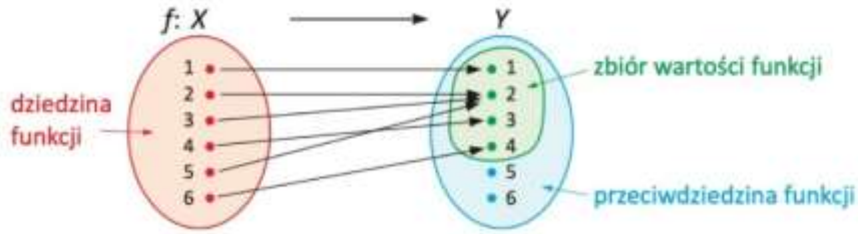
Odp. $a = -1$ i $b = 1$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

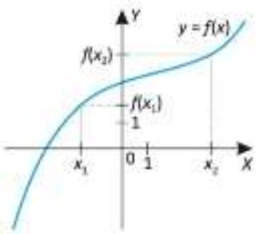
III. FUNKCJE

Część 1. Teoria

1. ***Funkcją f*** ze zbioru X w zbiór Y (zbiory X i Y są niepuste) nazywamy takie odwzorowanie, w którym każdemu elementowi ze zbioru X został przyporządkowany tylko jeden element ze zbioru Y. Funkcję tę oznaczamy $f: X \to Y$.
2. Zbiór X, nazywamy ***dziedziną funkcji f***. Dziedzinę funkcji f oznaczamy również symbolem $D_{f.}$. Elementy dziedziny funkcji f nazywamy argumentami funkcji f.
3. Zbiór Y nazywamy ***przeciwdziedziną funkcji f***.
4. Zbiór tych elementów ze zbioru Y, które zostały przypisane elementom ze zbioru X, nazywamy ***zbiorem wartości funkcji f.*** Zbiór wartości funkcji f oznaczamy symbolem ZW_f



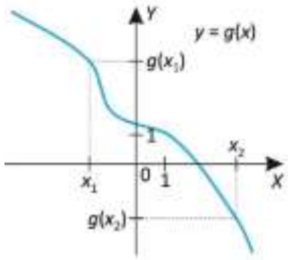
5. ***Miejscem zerowym funkcji*** liczbowej nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji wynosi zero.
   Z definicji miejsca zerowego wynika, że:
   - Miejsce zerowe funkcji liczbowej jest liczbą.
   - Miejsce zerowe funkcji należy do dziedziny funkcji.
   - Miejsce zerowe funkcji to taka liczba, dla której wartość funkcji wynosi zero.
6. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy ***funkcją rosnącą*** w zbiorze $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.



Na wykresie funkcji f wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_f z faktu, że $x_1 < x_2$, wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$.

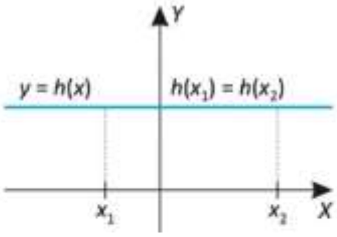
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

7. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy ***funkcją malejącą*** w zbiorze $A, A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.



Na wykresie funkcji g wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_g z faktu, że $x_1 < x_2$, wynika, że $g(x_1) > g(x_2)$.

8. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy ***funkcją stałą*** w zbiorze $A, A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.



Na wykresie funkcji h argumenty rosną, zaś wartości funkcji pozostają stałe; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_h mamy $h(x_1) = h(x_2)$.

- Funkcję, która jest rosnąca w całej dziedzinie, nazywamy funkcją rosnącą.
- Funkcję, która jest malejąca w całej dziedzinie, nazywamy funkcją malejącą.
- Funkcję, która jest stała w całej dziedzinie, nazywamy funkcją stałą.

9. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy ***funkcją niemalejącą*** w zbiorze $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
10. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy ***funkcją nierosnącą*** w zbiorze $A, A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
11. ***Funkcja stała*** jest jednocześnie nierosnąca i niemalejąca.
12. Każda funkcja nierosnąca i niemalejąca jest ***monotoniczna.***
13. ***Funkcją liniową*** nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi; a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b - wyrazem wolnym. Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

14. ***Wykresem funkcji liniowej jest prosta***. Przez dwa punkty płaszczyzny przechodzi tylko jedna prosta.
    Żeby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy więc wyznaczyć dwa punkty należące do jej wykresu, następnie poprowadzić przez nie prostą.
    Zauważ, że dla argumentu 0 wartość funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest równa b : $f(0) = a \cdot 0 + b = b$
    Zatem prosta będąca wykresem funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, b)$. Obliczmy również wartość funkcji f dla argumentu 1:$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$
    Otrzymaliśmy, że punkt $(1, a + b)$ też należy do wykresu funkcji f.
15. Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ i $(1, a + b)$.
16. Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:
    a) rosnąca wtedy, gdy $a > 0$
    b) malejąca wtedy, gdy $a < 0$
    c) stała wtedy, gdy $a = 0$.
17. Twierdzenie:
    - *Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe $-\frac{b}{a}$ wtedy, gdy $a \neq 0$.*
    - *Funkcja liniowa $y = ax + b$ nie ma miejsc zerowych wtedy, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.*
    - *Miejscem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$ jest każda liczba rzeczywista wtedy, gdy $a = b = 0$.*
18. Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax$ jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\mathbf{tg\alpha = a.}$
19. Jeśli dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ należą do wykresu funkcji liniowej

$$y = \boldsymbol{ax + b}, \textbf{\textit{to}}\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$$

20. ***Wykresy funkcji liniowych*** $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ ***są równoległe*** wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

21. ***Wykresy funkcji liniowych*** $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$ ***są prostopadłe*** wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a \cdot a_1 = -1$
22. ***Funkcją kwadratową*** nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Liczby rzeczywiste a, b oraz c nazywamy współczynnikami funkcji kwadratowej. Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.
    Wzór $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.
23. ***Wykresem funkcji kwadratowej*** $y = ax^2 (a \neq 0)$ jest parabola. Parabola jest figurą osiowosymetryczną. Osią symetrii jest w przypadku $y = ax^2$ jest prosta o równaniu $x = 0$. Oś symetrii paraboli przecina parabolę w punkcie, który nazywamy wierzchołkiem paraboli. ***Wierzchołek W*** paraboli będącej wykresem funkcji $y = ax^2 (a \neq 0)$ma współrzędne (0,0).
24. ***Wierzchołek*** dzieli parabolę na dwie części, które nazywamy ramionami paraboli. Jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są do góry; natomiast jeśli $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są do dołu.
25. *Pozostałe własności funkcji kwadratowej to:*

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ***R***.
- Funkcja ma jedno miejsce zerowe: 0.
- Funkcja nie jest różnowartościowa.
  Pozostałe własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$ zależą od znaku współczynnika a.
  - Jeśli $a > 0$, to:
    - zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 0; +\infty)$
    - funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów różnych od zera, tzn.: $y > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych
    - funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$
    - funkcja nie przyjmuje wartości największej; dla argumentu 0 przyjmuje wartość najmniejszą, równą 0.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

- Jeśli $a < 0$, to:
  - zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; 0)$
  - funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów różnych od zera, tzn.: $y < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich
  - funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; +\infty\ )$
  - funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej; dla argumentu 0 przyjmuje wartość największą, równą 0.

26. W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = a(x-p)^2 + q$
27. ***Wzór*** $\boldsymbol{y = a(x-p)^2 + q}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy wzorem funkcji kwadratowej w ***postaci kanonicznej.***

    W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 (a \neq 0)$ o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymamy wykres, który ma taki sam kształt, jak wykres przed przesunięciem. Zatem nowy wykres też jest parabolą. Ponadto, współrzędne wierzchołka tej paraboli możemy wyznaczyć, dodając odpowiednie współrzędne wektora do współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = ax^2$.

    $$x_w = 0 + p = p\ y_w = 0 + q = q$$

    Wniosek:

    - *Wykresem funkcji kwadratowej* $y = a(x-p)^2 + q (a \neq 0)$ *jest parabola.*
    - *Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt* $W(p, q)$. *Jeśli* $a < 0$, *to ramiona paraboli skierowane są do dołu, jeśli* $a > 0$, *to ramiona paraboli są skierowane do góry.*

28. ***Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej*** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$**,** gdzie $a \neq 0$, można przekształcić do postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$. Wówczas:

    $$p = \frac{-b}{2a}\ ;\ q = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

    Wniosek:

    - Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ można przedstawić w postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$, przy czym $\boldsymbol{p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a}}$**, gdzie** $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

- Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ można otrzymać w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{\boldsymbol{u}} = \left[\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, \frac{-\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{4a}}\right]$

29. Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$:

- *ma tylko jedno miejsce zerowe,* $x_0 = \frac{-b}{2a}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Delta = 0$
- *ma dwa miejsca zerowe,* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *oraz* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Delta > 0$
- *nie ma miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Delta < 0$.

UWAGA: Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych.

30. Wzór $\boldsymbol{y = a(x - x_0)^2}$ (jeśli $\Delta = 0$) oraz wzór $\boldsymbol{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$ (jeśli $\Delta > 0$) nazywamy ***wzorem funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej***.

Wniosek: Jeśli funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma miejsca zerowe, to jej wzór można przedstawić w postaci iloczynowej:

- $y = a(x - x_0)^2$, jeśli funkcja ma tylko jedno miejsce zerowe
- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, jeśli funkcja ma dwa różne miejsca zerowe.
  Jeśli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to jej wzoru nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

31. Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, określona w zbiorze liczb rzeczywistych:

- przyjmuje największą wartość równą y_w, jeśli $a < 0$; wówczas nie ma wartości najmniejszej;
- przyjmuje najmniejszą wartość równą y_w, jeśli $a > 0$; wówczas nie ma wartości największej.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 3.1

Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych oś Oy w punkcie $(0,2)$. Wtedy

A. $m = -\frac{2}{3}$

B. $m = -\frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = \frac{5}{3}$

ROZWIĄZANIE: $3m + 3 = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$

Zadanie 3.2

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy

A. $-\frac{1}{3}$

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

Zadanie 3.3

Wskaż m, dla którego funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 6$ jest rosnąca

A. $m = -1$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = 2$

ROZWIĄZANIE: $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.4

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. $-2\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE: $-\sqrt{2}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Zadanie 3.5

Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2,1)$.

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x + 5$

D. $y = -x + 1$

ROZWIĄZANIE: $a_1 = a_2 = 2, y_2 = a_2x + b_2; 1 = (-2) \cdot (2) + b \Rightarrow b = 5$

$$y = 2x + 5$$

Zadanie 3.6

Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

A. jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0,3)$.

B. jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0,-3)$.

C. jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0,-3)$.

D. jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0,3)$.

ROZWIĄZANIE: $a = -\frac{1}{2}$. Funkcja malejąca. $f(0) = 3$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.7

Dane są punkty $A = (-2,2)$ i $B = (4,-2)$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

A. $a = -\frac{2}{3}$

B. $a = -\frac{3}{2}$

C. $a = \frac{3}{2}$

D. $a = \frac{2}{3}$

ROZWIĄZANIE: $a = \frac{-2-2}{4+2} = -\frac{2}{3}$

Zadanie 3.8

Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że

A. $m = -3$

B. $m = \frac{2}{3}$

C. $m = \frac{3}{2}$

D. $m = 3$

ROZWIĄZANIE: $\frac{2}{m} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow m = 3$

Zadanie 3.9

Punkt $C = (0,2)$ jest wierzchołkiem trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej o równaniu $y = 2x - 4$. Wskaż równanie prostej zawierającej podstawę CD.

A. $y = \frac{1}{2}x + 2$

B. $y = -2x + 2$

C. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

D. $y = 2x + 2$

ROZWIĄZANIE: Odcinek CD jest równoległy do AB więc $a_1 = a_2 \Leftrightarrow 2 = 0 \cdot 2 = b \Leftrightarrow$ $b = 2, a = 2.\ y = 2x + 2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.10

O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1) = 2$. Do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (-2,3)$. Wzór funkcji f to

A. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

C. $f(x) = -3x + 7$

D. $f(x) = -2x + 4$

ROZWIĄZANIE: $a = \frac{3-2}{-2-1} = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}(x+2) + 3 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

Zadanie 3.11

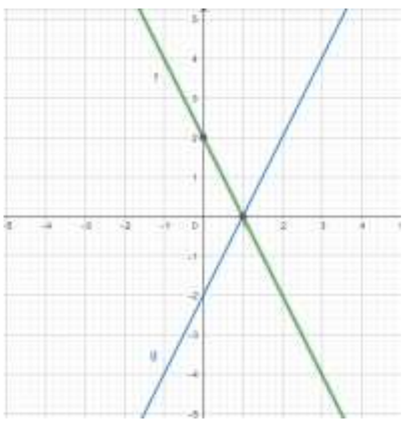
Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Stąd wynika, że

A. $a > 0$ i $b > 0$

B. $a < 0$ i $b < 0$

C. $a < 0$ i $b > 0$

D. $a > 0$ i $b < 0$



Zadanie 3.12

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji liniowej f. Funkcja liniowa g, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem poziomej osi układu współrzędnych, jest określona wzorem

A. $g(x) = -2x - 2$

B. $g(x) = 2x - 2$

C. $g(x) = -2x + 2$

D. $g(x) = 2x + 2$

Zadanie 3.13

Proste o równaniach $2x - 3y = 4$ i $5x - 6y = 7$ przecinają się w punkcie P. Stąd wynika, że

A. $P = (1,2)$

B. $P = (-1,2)$

C. $P = (-1,-2)$

D. $P = (1,-2)$

ROZWIĄZANIE: $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 4$; $5 \cdot (-1) - 6 \cdot (-2) = 7$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.14

Układ równań $\begin{cases} y = -ax + 2a \\ y = \frac{b}{3}x - 2 \end{cases}$ nie ma rozwiązań dla

A. $a = -1$i $b = -3$

B. $a = 1$ i $b = 3$

C. $a = 1$ i $b = -3$

D. $a = -1$i$b = 3$

ROZWIĄZANIE: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$

Zadanie 3.15

Rozważmy treść następującego zadania:

Obwód prostokąta o bokach długości a i b jest równy 60 . Jeden z boków tego prostokąta jest o 10 dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta.

Który układ równań opisuje zależności między długościami boków tego prostokąta?

A. $\begin{cases} 2(a + b) = 60 \\ a + 10 = b \end{cases}$

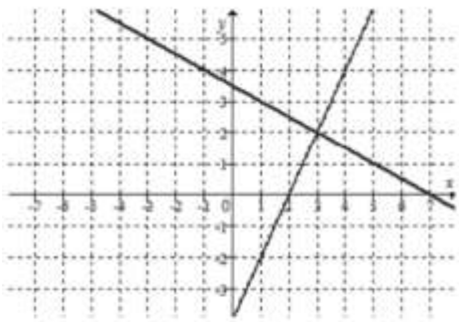
C. $\begin{cases} 2ab = 60 \\ a - b = 10 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2a + b = 60 \\ 10b = a \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2(a + b) = 60 \\ 10a = b \end{cases}$

Zadanie 3.16

Na rysunku jest przedstawiona graficzna ilustracja układu dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y.



Wskaż ten układ.

A. $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

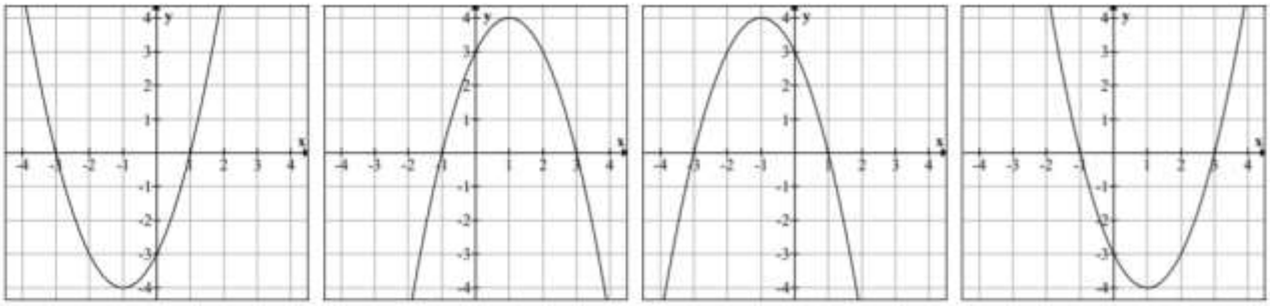
B. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.17

Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



A. B. C. D.

ROZWIĄZANIE: A. $p = \frac{-2}{2} = -1, a > 0$

Zadanie 3.18

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $f(x) = -3(x-2)^2 + 4$ jest punkt o współrzędnych

A. $(-2,-4)$

B. $(-2,4)$

C. $(2,-4)$

D. $(2,4)$

ROZWIĄZANIE: $f(x) = a(x-p)^2 - q$, więc $p = 2\ i\ q = 4\ \Leftrightarrow W = (2;4)$

Zadanie 3.19

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + 7x + c$ jest liczba $\frac{-7}{3}$. Wówczas c jest równe

A. 0

B. 1

C. -98

D. 98

ROZWIĄZANIE: $0 = 3 \cdot \frac{49}{9} + 7 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + c\ \Leftrightarrow c = -\frac{49}{3} + \frac{49}{3}\ \Leftrightarrow c = 0$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.20

Funkcja kwadratowa, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, -3\rangle$, może być określona wzorem

A. $y = (x+2)^2 - 3$

B. $y = -(x+3)^2$

C. $y = -(x-2)^2 - 3$

D. $y = -x^2 + 3$

ROZWIĄZANIE: Parabola jest skierowana ramionami w dół co oznacza, że $a < 0$ oraz, że $q = -3$, więc $f(x) = -a(x-p) - 3$

Zadanie 3.21

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$ ma współrzędne (2,2). Wówczas wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $g(x) = f(x+2)$ ma współrzędne

A. (4,2)

B. (0,2)

C. (2,0).

D. (2,4).

ROZWIĄZANIE: Następuje przesunięcie o 2 jednostki w prawo (wzdłuż osi OX), tak więc nowy punkt ma współrzędne (4;2).

Zadanie 3.22

Osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 - 8x + 6$ jest prosta o równaniu

A. $y = 2$

B. $y = -2$

C. $x = 2$

D. $x = -2$

ROZWIĄZANIE: $x = p = \frac{8}{-4} = -2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.23

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = (x-1)(x-9)$. Wynika stąd, że funkcja f jest rosnąca w przedziale

A. $\langle 5, +\infty)$

B. $(-\infty, 5\rangle$

C. $(-\infty, -5\rangle$

D. $\langle -5, +\infty)$

ROZWIĄZANIE: Parabola jest skierowana ramionami w górę, tak więc rośnie w przedziale $\langle p; +\infty)$, więc $p = \frac{(x_1+x_2)}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$

Zadanie 3.24

Jeśli funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + 2x + 3a$ nie ma ani jednego miejsca zerowego, to liczba a spełnia warunek

A. $a < -1$

B. $-1 \leq a < 0$

C. $0 \leq a < \frac{1}{3}$

D. $a > \frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE: Jeśli funkcja nie ma miejsca zerowego to oznacza, że wyróżnik trójmianu kwadratowego jest mniejszy od zera, tak więc $\Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta = 4 - 12a < 0 \Leftrightarrow 4 < 12a \Leftrightarrow a > \frac{1}{3}$

Część 3. Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 3.25

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (4,0)$. Oblicz wartości współczynników b i c.

ROZWIĄZANIE:

$f(x) = 2(x-4)^2 = 2x^2 - 16x + 32$

Odp. $b = -16, c = 32$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.26

Funkcja kwadratowa, f dla $x = -3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A = (-1,3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

ROZWIĄZANIE:

$f(x) = a(x+3)^2 + 4,\ 3 = f(-1) = a(-1+3)^2 + 4,\ a = -\frac{1}{4}$

Odp. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$

Zadanie 3.27

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0,12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9.
Oblicz współczynniki a, b, c, i funkcji f.

ROZWIĄZANIE:

$p = \frac{0+12}{2} = 6,\ q = 9 \ \Leftrightarrow\ f(x) = a(x-6)^2 + 9$

$0 = f(0) = a(0-6)^2 + 9 \quad a = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4},$

$f(x) = -\frac{1}{4}(x-6)^2 + 9 \ \ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$

Odp. $a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = 0$

Zadanie 3.28

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a.

ROZWIĄZANIE:

$p = \frac{-6+0}{2} = -3, q = 6$

$f(x) = a(x+3)^2 + 6$

$\frac{3}{2} = f(0) = a(0+3)^2 + 6,\quad 9a = \frac{3}{2} - 6 \quad 9\mathrm{a} = -\frac{9}{2}$

Odp.: $a = -\frac{1}{2}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 3.29

Liczby rzeczywiste xiz spełniają warunek $2x + z = 1$. Wyznacz takie wartości x i z, dla których wyrażenie $x^2 + z^2 + 7xz$ przyjmuje największą wartość. Podaj tę największą wartość.

ROZWIĄZANIE:

$z = 1 - 2x$

$f(x) = x^2 + (1 - 2x)^2 + 7x(1 - 2x) = x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + 7x - 14x^2$

$f(x) = -9x^2 + 3x + 1$

Funkcja przyjmuje wartość największą dla $x = \frac{-3}{-18} = \frac{1}{6}$. Wtedy $z = 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Wartość największa wynosi: $f\left(\frac{1}{6}\right) = -9 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

IV. CIĄGI

Część 1. Teoria

1. ***Ciągiem skończonym*** nazywamy funkcje, której dziedziną jest skończony podzbiór początkowych liczb naturalnych dodatnich.
2. ***Ciągiem nieskończonym*** nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.
3. Wartości zdefiniowanych powyżej funkcji nazywamy ***wyrazami ciągu***.
   Ciąg liczbowy to ciąg, którego wyrazy są liczbami rzeczywistymi.
4. Ciąg (a_n) nazywamy ***ciągiem rosnącym*** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.
   Mówimy, że ciąg (a_n) *jest rosnący wtedy, gdy każdy wyraz ciągu (* a_n *) (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego.*
5. Ciąg (a_n) nazywamy ***ciągiem malejącym*** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.
   Mówimy, że ciąg (a_n *) jest malejący wtedy, gdy każdy wyraz ciągu (a_n) (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego.*
6. Ciąg (a_n) nazywamy ***ciagiem stałym*** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n$.
7. Ciąg (a_n) nazywamy ***ciągiem niemalejącym*** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \geqslant a_n$.
8. Ciąg (a_n) nazywamy ***ciągiem nierosnącym*** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \leqslant a_n$.
9. Niech (a_n) będzie ciagiem co najmniej trójwyrazowym.
   Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg (a_n), w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby r. Liczbę tę nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.
   Możemy zapisać krócej:
   Ciąg (a_n) *jest ciągiem arytmetycznym o różnicy* $\boldsymbol{r} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_1 = a} \\ \boldsymbol{a_n = a_{n-1} + r, \text{\textit{jeśli}}\ n > 1} \end{cases}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

10. Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to
$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$$
dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.
11. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego (i ewentualnie ostatniego) jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$
12. Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ***suma n początkowych*** wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem
$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$
dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

13. Niech (a_n) będzie ciągiem co najmniej trójwyrazowym.
Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg (a_n), w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q.
Liczbę tę nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.
Możemy zapisać krócej:
Ciąg (a_n) jest ciagiem geometrycznym o ilorazie $\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_1 = a} \\ \boldsymbol{a_n = a_{n-1}\cdot q}, \textbf{ jeśli } \boldsymbol{n > 1} \end{cases}$
14. Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Jeśli:
    1) $a_1 > 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym;
    2) $a_1 > 0$ i $q \in (0; 1)$, to ciąg (a_n) jest ciaggiem malejącym;
    3) $a_1 < 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym;
    4) $a_1 < 0$ i $q \in (0; 1)$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym;
    5) $q = 1$ lub $q = 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem stałym; jeśli $q = 0 -$ od drugiego wyrazu;
    6) $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, to ciąg (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

15. Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q, q \neq 0$, to

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

16. Niech (a_n) oznacza ciąg o wyrazach różnych od zera.

Ciąg (a_n) jest ***ciągiem geometrycznym*** wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu ciągu (a_n), oprócz wyrazu pierwszego (i ewentualnie ostatniego), jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i następnego.

$$\boldsymbol{a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

17. Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to ***suma n początkowych wyrazów*** tego ciągu wyraża się wzorem:

a) $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, o ile $q \neq 1$, dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n;

b) $S_n = n \cdot a_1$, o ile $q = 1$, dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 4.1

W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_2 = 5$ i $a_4 = 11$. Oblicz a_5

A. 8

B. 14

C. 17

D. 6

ROZWIĄZANIE: $2r = a_4 - a_2 = 6, a_5 = a_4 + r = 11 + 3 = 14$

Zadanie 4.2

W malejącym ciągu geometrycznym (a_n) mamy: $a_1 = -2$ i $a_3 = -4$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. -2

B. 2

C. $-\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE: $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = 2, q = \sqrt{2}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4.3

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy
A. $a_4 + a_7 = a_{10}$
B. $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$
C. $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$
D. $a_5 + a_7 = 2a_8$

ROZWIĄZANIE: $a_9 - a_8 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_2 + a_9 = a_3 + a_8$

Zadanie 4.4

W ciągu geometrycznym (a_n) mamy $a_3 = 5$ i $a_4 = 15$. Wtedy wyraz a_5 jest równy

A. 10

B. 20

C. 75

D. 45

ROZWIĄZANIE: $q = \frac{a_4}{a_3} \Leftrightarrow q = \frac{15}{5} = 3$; $a_5 = a_4 \cdot q \Leftrightarrow a_5 = 15 \cdot 3 = 45$.

Zadanie 4.5

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

ROZWIĄZANIE: $x + 20° + x + 40° + x = 180° \Leftrightarrow 3x = 120° \Leftrightarrow x = 60°$

Zadanie 4.6

Ciag $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas.

A. $a = 8\sqrt{2}$

B. $a = 4\sqrt{2}$

C. $a = 8 - 2\sqrt{2}$

D. $a = 8 + 2\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE: $16 = a \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4.7

Wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne podzielne przez 7 tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Dwunastym wyrazem tego ciągu jest liczba

A. 77

B. 84

C. 91

D. 98

ROZWIĄZANIE: $a_1 = 14, r = 7, a_{12} = a_1 + 11r = 14 + 77 = 91$

Zadanie 4.8

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $2a_3 = a_2 + a_1 + 1$

Różnica r tego ciągu jest równa

A. 0

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

ROZWIĄZANIE: $2(a_1 + 2r) = a_1 + r + a_1 + 1, 3r = 1, r = \frac{1}{3}$

Zadanie 4.9

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-2n}{6}$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten jest

A. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{1}{3}$.

B. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -2$.

C. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = -\frac{1}{3}$

D. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = \frac{5}{6}$.

ROZWIĄZANIE:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5-2(n+1)}{6} - \frac{5-2n}{6} = \frac{5-2n-2-5+2n}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4.10

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 2\sqrt{2}, a_3 = 4\sqrt{2}$. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = (\sqrt{2})^n$

B. $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

C. $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

D. $a_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$

ROZWIĄZANIE: $q = 2, a_n = \sqrt{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

Cześć 3. Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 4.11

Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 26, a suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 70 . Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

ROZWIĄZANIE:

$$70 = S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5,$$

$$a_1 + a_5 = \frac{70 \cdot 2}{5} = 28$$

Odp. $a_1 = 28 - 26 = 2.$

Zadanie 4.12

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

ROZWIĄZANIE:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2y = 19 + x \end{cases} \begin{cases} x = 8 - y \\ 2y = 27 - y \end{cases} \begin{cases} x = 8 - y \\ y = 9 \end{cases}$$

Odp. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4.13

Liczby $2x+1, 6, 16x+2$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

ROZWIĄZANIE: $6=\frac{2x+1+16x+2}{2} \Leftrightarrow 12=18x+3 \Leftrightarrow 18x=9 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Zadanie 4.14

Ciąg $(9,x,19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x,42,y,z)$ jest geometryczny. Oblicz x,y oraz z.

ROZWIĄZANIE:

$$x=\frac{9+19}{2}=14,$$
$$q=\frac{42}{14}=3,$$
$$y=3\cdot 42=126,$$
$$z=3\cdot 126=378$$

Odp. $(x,y,z)=(14,126,378)$

Zadanie 4.15

Suma $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n=n^2-2n$ dla $n\geq 1$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

ROZWIĄZANIE: Dla $n\geq 2$ otrzymujemy:

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-[(n-1)^2-2(n-1)]=n^2-2n-n^2+4n-3.$

Zatem $a_n=2n-3$ dla $n\geq 2$.

Jednocześnie $a_1=S_1=-1=2\cdot 1-3$.

Odp. $a_n=2n-3$ dla $n\geq 1$.

Zadanie 4.16

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3 , czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15 . Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciaggu.

ROZWIĄZANIE:

$$3r=15-3=12,\ r=4$$

Odp. $S_6=\frac{2a_1+5r}{2}\cdot 6=(6+20)\cdot 3=78$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4.17

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_{k} ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg - trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

ROZWIĄZANIE:

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 187 \\ \dfrac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ 3a_1 + 10r = 36 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases}$$

$a_3 = a_1 + 2r = 8,\ a_k = a_1 + (k-1)r = 3k - 1,\ 8^2 = 2(3k-1),\ 6k = 66$

Odp. $k = 11$.

Zadanie 4.18

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n), dla $n \geq 1$ taki, ze $a_5 = 18$. Wyrazy a_1, a_3 oraz a_{13} tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

ROZWIĄZANIE:

$$a_1 = a_5 - 4r = 18 - 4r$$

$$a_3 = a_5 - 2r = 18 - 2r,$$

$$a_{13} = a_5 + 8r = 18 + 8r$$

$$(18 - 2r)^2 = (18 - 4r)(18 + 8r),$$

$$18^2 - 72r + 4r^2 = 18^2 + 72r - 32r^2$$

$$36r^2 - 144r = 0,\ r = 4 \text{ lub } r = 0$$

Ponieważ ciąg rosnący, więc $r = 4$. Zatem $a_1 = 18 - 16 = 2$.

Odp. $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

Zadanie 4.19

Deweloper oferuje możliwość kompletnego wyposażenia kuchni i salonu w ofercie „Malejące raty". Wysokość pierwszej raty ustalono na 775 zł. Każda następna rata jest o 10 zł mniejsza od poprzedniej. Całkowity koszt wyposażenia kuchni i salonu ustalono na 30240 zł. Oblicz wysokość ostatniej raty i liczbę wszystkich rat.

ROZWIĄZANE:

$$30240 = S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 775 + (n-1)(-10)}{2} \cdot n = (780 - 5n)n$$
$$5n^2 - 780n + 30240 = 0,\ n^2 - 156n + 6048 = 0$$
$$\Delta = 24336 - 24192 = 144,\ n = \frac{156 - 12}{2} = 72$$
$$a_{72} = 775 - 71 \cdot 10 = 65$$

Odp. Ostatnia rata jest równa 65 zł. Są 72 raty.

Zadanie 4.20

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, **w** którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n).

ROZWIĄZANIE:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_1 + 3r}{2} \cdot 4 = 2016 \\ \frac{a_1 + 4r + a_1 + 11r}{2} \cdot 8 = 2016 \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 3r = 1008 \\ 2a_1 + 15r = 504 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy:

$$12r = -504,\ r = -42,\ a_1 = \frac{1008 + 3 \cdot 42}{2} = 567$$
$$a_n = 567 + (n-1)(-42) = -42n + 609 > 0$$

Stąd $n < \frac{609}{42} = \frac{29}{2} = 14{,}5$. Zatem $a_{14} = -42 \cdot 14 + 609 = -588 + 609 = 21$

Odp. $a_1 = 567.\, r = -42$. Najmniejszy dodatni: $a_{14} = 21$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 4.21

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.

ROZWIĄZANIE:

$33 = S_3 = \frac{16 + 2r}{2} \cdot 3,\ 11 = 8 + r,\ r = 3$

Odp. $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$

Zadanie 4.22

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: $a_1, a_2, a_3,$ a_4, a_5, a_6 jest równa 16

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k, dla której $a_{\mathrm{k}} = -78$.

ROZWIĄZANIEA:

$S_6 = \frac{2a_1 + 5 \cdot (-4)}{2} \cdot 6 = 6a_1 - 60,$

$\frac{6a_1 - 60}{6} = a_1 - 10 = 16,$

$a_1 = 26.$

$a_k = 26 + (k-1) \cdot (-4) = -4k + 30 = -78{,}4k = 108, k = 27.$

Odp. $a_1 = 26, k = 27.$

Zadanie 4.23

W ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, \ldots, a_{39}, a_{40})$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400 . Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

ROZWIĄZANIE:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_{39}}{2} \cdot 20 = 1400 \\ \frac{a_2 + a_{40}}{2} \cdot 20 = 1340 \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 38r = 140 \\ 2a_1 + 40r = 134 \end{cases} \begin{cases} r = -3 \\ a_1 = 127 \end{cases}.$$

Odp. $a_{40} = 127 + 39 \cdot (-3) = 10.$

V. TRYGONOMETRIA

Część 1. Teoria

1. Niech w trójkącie prostokątnym dany będzie kąt ostry α

a) ***Tangensem kąta ostrego α*** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przyprostokątnej przyległej do kąta α :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

b) ***Cotangensem kąta ostrego α*** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przyprostokątnej przeciwległej kątowi α :

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

c) ***Sinusem kąta ostrego α*** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

d) ***Cosinusem kąta ostrego α*** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej:

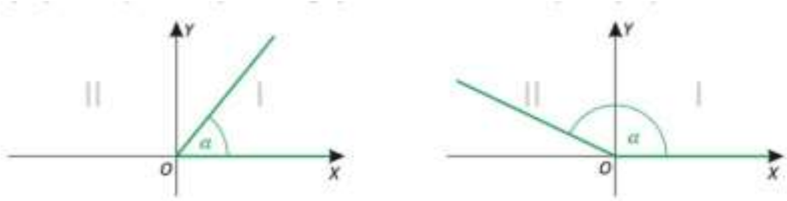
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

2. Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów $30°, 45°\ i\ 90°$.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

3. Sinus, cosinus, tangens i cotangens konta wypukłego



Niech dany będzie kąt wypukły α w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu kąta wybieramy punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0,0)$. Wówczas:

a) ***tangensem kąta α*** nazywamy liczbę będącą ilorazem rzędnej punktu *P* przez odciętą tego punktu; jeśli odcięta punktu *P* jest równa zeru, to tangens kąta α nie istnieje,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

b) ***cotangensem kąta α*** nazywamy liczbę będącą ilorazem odciętej punktu *P* przez rzędną tego punktu; jeśli rzędna punktu *P* jest równa zeru, to cotangens kąta α nie istnieje,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

c) ***sinusem kąta α*** nazywamy liczbę będącą ilorazem rzędnej punktu *P* przez odległość punktu *P* od początku układu współrzędnych,

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

d) ***cosinusem kąta α*** nazywamy liczbę będącą ilorazem odciętej punktu *P* przez odległość punktu *P* od początku układu współrzędnych,

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

4. ***Tożsamością trygonometryczną*** nazywamy równość, w której zmienne występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych i która jest prawdziwa dla wszystkich wartości tych zmiennych (dla których funkcje są określone).

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ,180^\circ\rangle$ tzw. ***jedynka trygonometryczna***

2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, jeśli $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)\cup(90^\circ,180^\circ)$

3) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ,90^\circ)\cup(90^\circ,180^\circ\rangle$

4) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(0^\circ,180^\circ)$

5. Wybrane wzory redukcyjne:

1) $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$ jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ,90^\circ)\cup(90^\circ,180\rangle$
2) $\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$ jeśli $\alpha\in(0^\circ,180^\circ)$
3) $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$ jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ,180^\circ\rangle$
4) $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,$ jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ,180^\circ\rangle$

Jeśli $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$, to:

1) $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$
2) $\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
3) $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$
4) $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$
5) $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$
6) $\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$
7) $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$
8) $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 5.1

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

ROZWIĄZANIE: Przekształcając wzór na jedynkę trygonometryczną uzyskujemy:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}$$

Zadanie 5.2

Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38°+\cos^2 38°-1}{\sin^2 52°+\cos^2 52°+1}$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

B. 0

D. 1

ROZWIĄZANIE: $\frac{\sin^2 38+\cos^2 38-1}{\sin^2 52+\cos^2 52+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$

Zadanie 5.3

W trójkącie prostokątnym dane są kąty ostre: $\alpha = 41°$ i $\beta = 49°$. Wtedy $\frac{\cos\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha}$ równa się

A. $1+\sin 49°$

B. $\sin 49°$

C. 1

D. 2

ROZWIĄZANIE: $\frac{\cos\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha} = 1+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = 1+\frac{\sin 49°}{\cos 41°} = 1+\frac{\cos 41°}{\cos 41°} = 2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 5.4

W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$ Wówczas sinus kąta ABC jest równy

A. $\frac{12}{13}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{13}{12}$

ROZWIĄZANIE: Z twierdzenie Pitagorasa wynika, że $|AC| = 5$, więc $\sin \sphericalangle ABC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{5}{13}$

Zadanie 5.5

Miara kąta α spełnia warunek: $0° < \alpha < 90°$. Wyrażenie $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ jest równe

A. 1

B. $2\cos^2\alpha$

C. 2

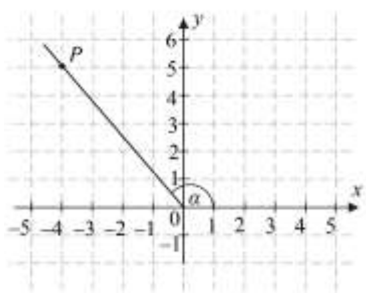
D. $2\sin^2\alpha$

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2$$

Zadanie 5.6

Tangens kąta α zaznaczonego na rysunku jest równy



$P = (-4, 5)$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. -1

D. $-\frac{5}{4}$

ROZWIĄZANIE: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 5.7

Wartość wyrażenia $(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ)^2 - \sin 60^\circ$ jest równa

A. $2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ROZWIĄZANIE:

$$(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ)^2 - \sin 60^\circ = (\sqrt{3} + 1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Zadanie 5.8

Jeśli $m = \sin 50^\circ$, to

A. $m = \sin 40^\circ$

B. $m = \cos 40^\circ$

C. $m = \cos 50^\circ$

D. $m = \operatorname{tg} 50^\circ$

ROZWIĄZANIE: $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$

Zadanie 5.9

Wartość wyrażenia $2\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \cos^2 18^\circ$ jest równa.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

ROZWIĄZANIE: $2\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \cos^2 18^\circ = 2\sin^2 18^\circ + 2\cos^2 18^\circ = 2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Cześć 3. Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 5.10

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

ROZWIĄZANIE:

$$2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$2\cdot sin\,\alpha\cdot\cos\alpha=1$$

Odp. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$

Zadanie 5.11

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Oblicz $3+2\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

ROZWIĄZANIE:

$$3+2\mathrm{tg}^2\,\alpha=3+2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$3+2\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=3+2\frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}}=3+\frac{2}{15}=\frac{47}{15}$$

Odp. $\frac{47}{15}=3\frac{2}{15}$

Zadanie 5.12

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $2+\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

ROZWIĄZANIE:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{7}{16}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

$$2+\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=2+\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2+\sin\alpha=\frac{11}{4}$$

Odp.: $2+\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{11}{4}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 5.13

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

Odp.: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \sqrt{3}$

Zadanie 5.14

Kąt α jest ostry i $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{3}{2} = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

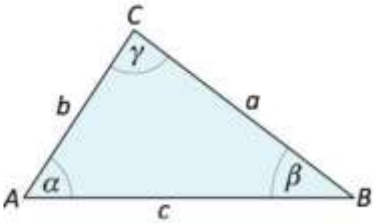
Odp. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

VI. PLANIMETRIA

Część 1. Teoria

1. Trójkąt to wielokąt mający trzy boki



2. Suma kątów w dowolnym trójkącie jest równa 180°.
3. Trójkąty możemy podzielić ze względu na rodzaje kątów i długości boków. Przypomnijmy te podziały.

   Ze względu na rodzaje kątów trójkąty dzielimy na:

   - ***ostrokątne*** (wszystkie kąty są ostre)
   - ***prostokątne*** (jeden kąt jest prosty, dwa ostre)
   - r***ozwartokątne*** (jeden kąt jest rozwarty, dwa ostre).

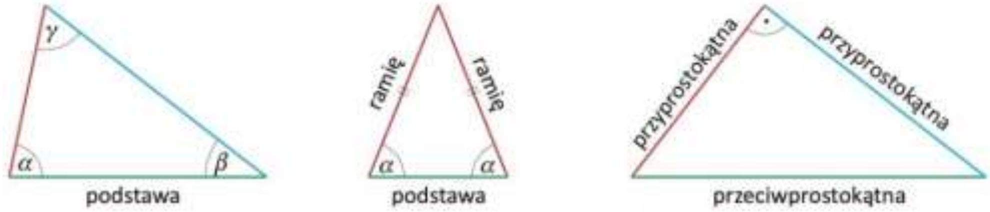
   Ze względu na długości boków trójkąty dzielimy na:

   - ***różnoboczne*** (wszystkie boki mają różną długość)
   - ***równoramienne*** (co najmniej dwa boki mają tę samą długość), wśród których wyróżniamy trójkąty ***równoboczne*** (trzy boki mają tę samą długość).

	ostrokątne	prostokątne	rozwartokątne
różnoboczne	$a<b<c$ $\alpha,\beta,\gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$	$a<b<c$ $\gamma=90^\circ$	$a<b<c$ $\gamma>90^\circ$
równoramienne	$a=b$ $\alpha,\beta,\gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$	$a=b$ $\gamma=90^\circ$	$a=b$ $\gamma>90^\circ$
równoboczne	$a=b=c$ $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$	nie istnieje	nie istnieje

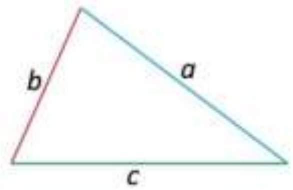
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

4. W trójkącie jeden bok (dowolny) nazywa się ***podstawą,*** a pozostałe dwa - ***ramionami.*** W przypadku trójkąta równoramiennego ramionami nazywa się boki mające tę samą długość.



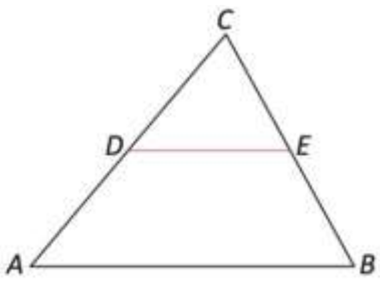
W trójkącie prostokątnym boki zawarte w ramionach kąta prostego to przyprostokątne, bok przeciwległy do kąta prostego to przeciwprostokątna.
W trójkącie różnobocznym dowolne dwa kąty są różne. Naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok. Dwa kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Natomiast w trójkącie równobocznym każdy kąt ma 60°.

5. ***Nierówność trójkąta:***
W dowolnym trójkącie suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.



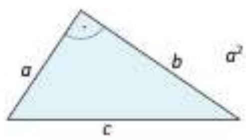
$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

6. Jeśli w trójkącie połączymy środki dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.



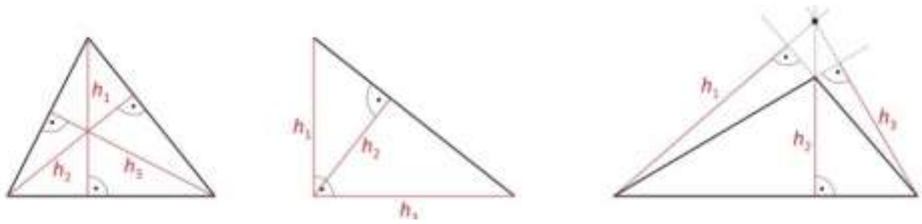
$$DE \parallel AB$$
$$|DE| = \frac{1}{2}|AB|$$

7. ***Twierdzenie Pitagorasa:***
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.



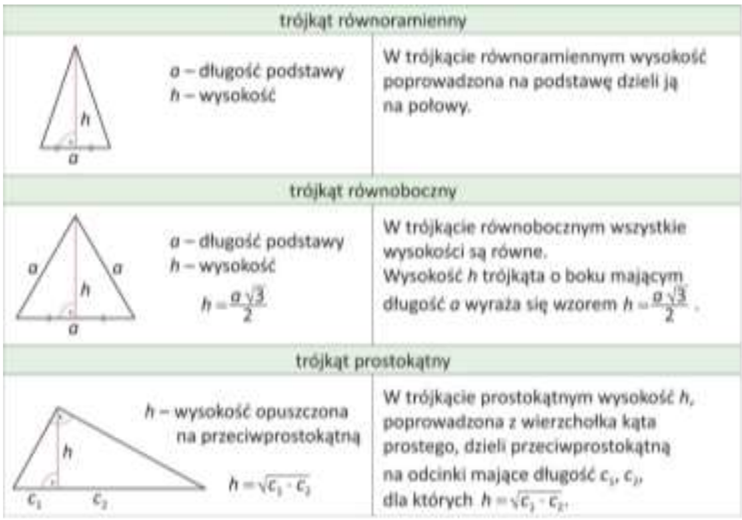
$$a^2 + b^2 = c^2$$

8. ***Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa:***
   Jeśli długości boków a, b, c trójkąta spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny, przy czym boki długości a i b są przyprostokątnymi tego trójkąta, a bok długości c - przeciwprostokątną tego trójkąta.
9. Jeśli długości boków trójkąta oznaczymy literami a, b, c w taki sposób, że $a \leqslant b \leqslant c$ oraz:
   - $\boldsymbol{a^2 + b^2 < c^2}$***, to trójkąt jest rozwartokątny***;
   - jeśli $\boldsymbol{a^2 + b^2 > c^2}$***, to trójkąt jest ostrokątny.***
10. ***Wysokością trójkąta*** nazywamy odcinek (a także jego długość) łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem), prostopadły do tego boku (lub jego przedłużenia).



UWAGA! Każdy trójkąt ma trzy wysokości!!!

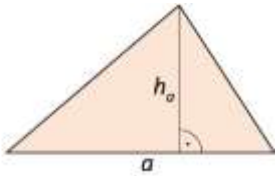
11. ***W dowolnym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie***.
    1) *W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta.*
    2) *W przypadku trójkąta prostokątnego punktem przecięcia się wysokości jest wierzchołek kąta prostego.*
    3) *W trójkącie rozwartokątnym przedłużenia wysokości przecinają się w punkcie leżącym poza trójkątem.*



trójkąt równoramienny	
a – długość podstawy h – wysokość	W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona na podstawę dzieli ją na połowy.
trójkąt równoboczny	
a – długość podstawy h – wysokość $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	W trójkącie równobocznym wszystkie wysokości są równe. Wysokość h trójkąta o boku mającym długość a wyraża się wzorem $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
trójkąt prostokątny	
h – wysokość opuszczona na przeciwprostokątną $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$	W trójkącie prostokątnym wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki mające długość c_1, c_2, dla których $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

12. ***Pole trójkąta*** jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

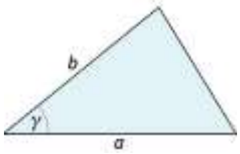


$$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a}$$

13. ***Pole P trójkąta równobocznego*** o boku mającym długość a wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

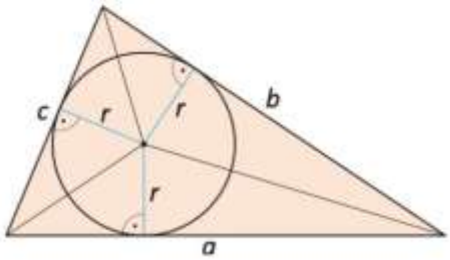
14. Jeśli mamy dane długości a, b dwóch boków trójkąta i kąt $\gamma, \gamma \in (0°, 180°)$, zawarty między tymi bokami, to pole P tego trójkąta wyraża się wzorem:



$$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma}$$

15. ***Pole trójkąta równa się iloczynowi promienia koła wpisanego w ten trójkąt i połowy obwodu tego trójkąta***.

Rozważmy trójkąt o bokach mających długość a, b, c, w który wpisano koło o promieniu r. Wyznaczymy pole P tego trójkąta w zależności od a, b, c oraz r.



Ze środka koła wpisanego w trójkąt prowadzimy odcinki do wierzchołków trójkąta. Odcinki te dzielą trójkąt na trzy trójkąty, których podstawami są odcinki mające długość a, b, c, natomiast wysokości poprowadzone na te podstawy są równe r. Możemy więc zapisać:

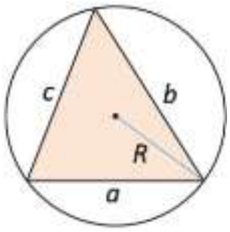
$$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r}$$

$$\boldsymbol{P_\Delta = p \cdot r,}$$

$$\textbf{gdzie } \boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

16. ***Pole P trójkąta o bokach mających długość*** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ wyraża się wzorem:

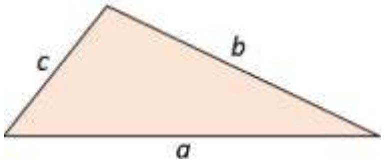


$$\boldsymbol{P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}}$$

gdzie R jest promieniem koła opisanego na tym trójkącie.

17. ***Wzór Herona***

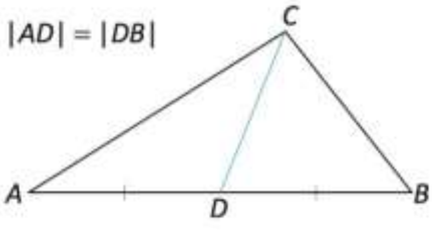
Pole P trójkąta o bokach mających długość a, b, c wyraża się wzorem:



$$\boldsymbol{P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

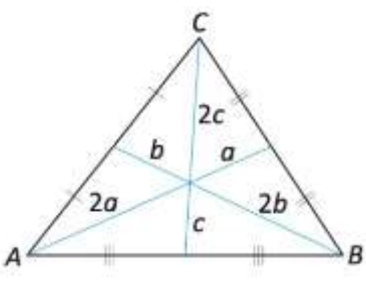
gdzie $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ jest połowa obwodu

18. Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



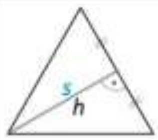
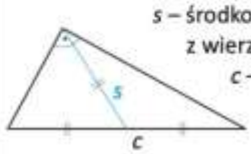
Każdy trójkąt ma trzy środkowe

19. W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku $1:2$.



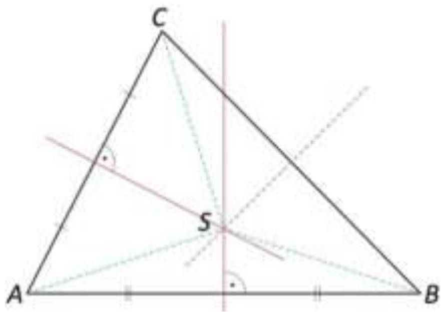
Punkt przecięcia się środkowych nazywamy ***środkiem ciężkości trójkąta***.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

środkowe w wybranych trójkątach		
trójkąt równoramienny		
	s_1 – środkowa poprowadzona do podstawy h_1 – wysokość poprowadzona do podstawy $h_1 = s_1$	W trójkącie równoramiennym środkowa poprowadzona do podstawy jest jednocześnie wysokością.
trójkąt równoboczny		
	s – środkowa h – wysokość $h = s$	W trójkącie równobocznym środkowe i wysokości się pokrywają. Dlatego wysokości w trójkącie równobocznym przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.
trójkąt prostokątny		
	s – środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego c – przeciwprostokątna $s = \frac{1}{2}c$	W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość połowy przeciwprostokątnej.

20. ***Symetralna trójkąta*** dzieli bok trójkąta w połowie i pod kątem prostym.
21. ***Symetralne trzech boków dowolnego trójkąta*** przecinają się w jednym punkcie.

Niech symetralne przetną się w punkcie, który oznaczymy S.



Wiemy, że symetralną tworzy zbiór punktów równo odległych od końców odpowiedniego odcinka, zatem:

$|SA| = |SB| -$ ponieważ S należy do symetralnej odcinka AB

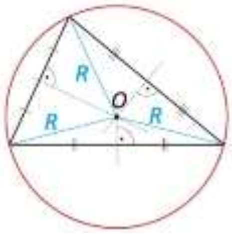
$|SA| = |SC|$ - ponieważ S należy do symetralnej odcinka AC.

Lewe strony powyższych równości są równe, więc prawe strony też są równe, czyli:

$|SB| = |SC|$, a to znaczy, że punkt S należy również do symetralnej odcinka BC.

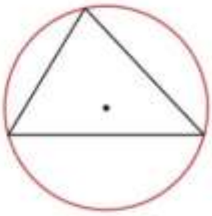
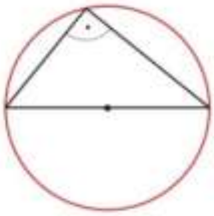
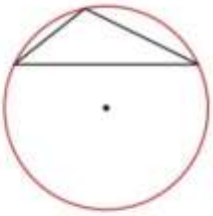
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

22. Punkt S przecięcia symetralnych boków trójkąta ABC leży w równej odległości od wierzchołków trójkąta ABC. Przez wierzchołki A, B, C można więc poprowadzić okrąg o środku w punkcie S i promieniu $|SA|$. Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki trójkąta, nazywamy okręgiem opisanym na trójkącie. Wówczas o trójkącie mówimy, że jest to trójkąt wpisany w okrąg.

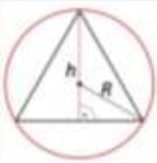
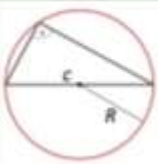


Z powyższego więc wynika, że na każdym trójkącie można opisać okrąg.

23. Położenie środka okręgu w zależności od rodzaju trójkąta ze względu na kąty:

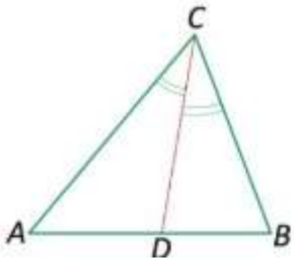
		
Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.	Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na boku trójkąta.	Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

24. Okręgi opisane na niektórych trójkątach:

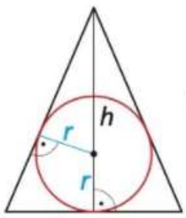
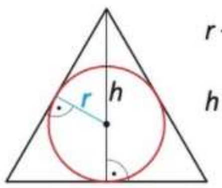
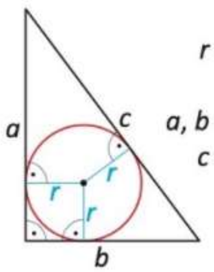
trójkąt równoramienny		
	R – promień okręgu opisanego na trójkącie h – wysokość opuszczona na podstawę	W trójkącie równoramiennym symetralna podstawy zawiera wysokość poprowadzoną na podstawę. Zatem środek okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym leży na prostej zawierającej wysokość poprowadzoną na podstawę.
trójkąt równoboczny		
	R – promień okręgu opisanego na trójkącie h – wysokość $R=\frac{2}{3}h$	W trójkącie równobocznym symetralne boków zawierają wysokości. Tak więc środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia wysokości w tym trójkącie.
trójkąt prostokątny		
	R – promień okręgu opisanego na trójkącie c – przeciwprostokątna $R=\frac{1}{2}c$	Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

25. ***Dwusieczną kąta*** jest to półprosta dzielącą kąt na dwa kąty równe.
Przez dwusieczną kąta w trójkącie będziemy rozumieć odcinek będący częścią wspólną trójkąta i dwusiecznej odpowiedniego kąta (na rysunku poniżej jest to odcinek CD).



26. W dowolnym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie.
27. ***W każdy trójkąt można wpisać okrąg***. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży zawsze we wnętrzu trójkąta i jest on punktem przecięcia się dwusiecznych.
28. Okręgi wpisane w wybrane trójkąty:

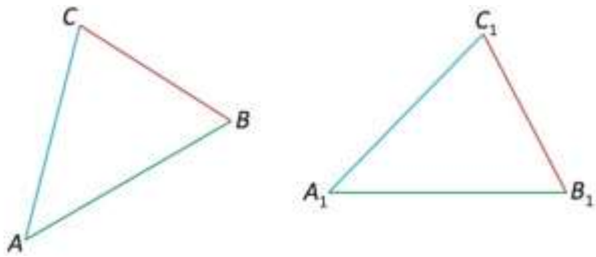
trójkąt równoramienny	
 r – promień okręgu wpisanego w trójkąt h – wysokość opuszczona na podstawę	W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta między ramionami zawiera wysokość opuszczoną na podstawę. Zatem środek okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny leży na wysokości poprowadzonej na podstawę (w przypadku trójkąta nierównobocznego – w innym miejscu niż środek okręgu opisanego na tym trójkącie).
trójkąt równoboczny	
 r – promień okręgu wpisanego w trójkąt h – wysokość $r=\frac{1}{3}h$	W trójkącie równobocznym dwusieczne kątów zawierają wysokości. Tak więc środek okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest punktem przecięcia wysokości w tym trójkącie (i jest też środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie).
trójkąt prostokątny	
 r – promień okręgu wpisanego w trójkąt a, b – przyprostokątne c – przeciwprostokątna $r=\frac{a+b-c}{2}$	Jeśli w trójkącie prostokątnym poprowadzimy promienie ze środka okręgu wpisanego w ten trójkąt do punktów styczności i zastosujemy metodę z ostatniego przykładu, to zauważymy, że punkty styczności podzieliły przyprostokątne a, b na odcinki mające długość $(a-r)$ i r oraz $(b-r)$ i r, natomiast przeciwprostokątną c na odcinki $(a-r)$ i $(b-r)$, co prowadzi do zależności $c=(a-r)+(b-r)$, z której łatwo wyliczyć r.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

29. Mówiąc, że dwie ***figury są przystające***, intuicyjnie rozumiemy, że te figury są takie same, czyli mają taki sam kształt i taką samą wielkość. Można je nałożyć na siebie w taki sposób, że będą się pokrywały
30. Dwa trójkąty nazwiemy ***trójkątami przystającymi*** wtedy, gdy boki i kąty jednego z nich są równe odpowiednim bokom i kątom drugiego.
31. ***Cechy przystawania trójkątów***:

    1) Bok-bok-bok (bbb)

    Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

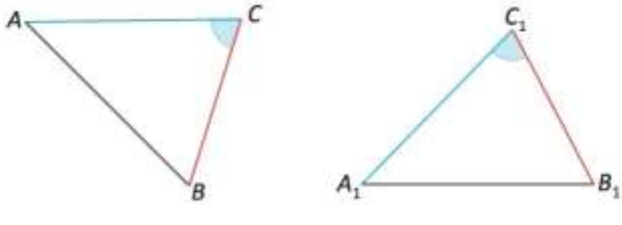


Jeśli $|AB| = |A_1B_1|, |BC| = |B_1C_1|, |AC| = |A_1C_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, więc

$$|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|, |\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|, |\sphericalangle C| =| \sphericalangle C_1|$$

    2) ***Bok-kąt-bok (bkb)***

    Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są równe odpowiednio dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.



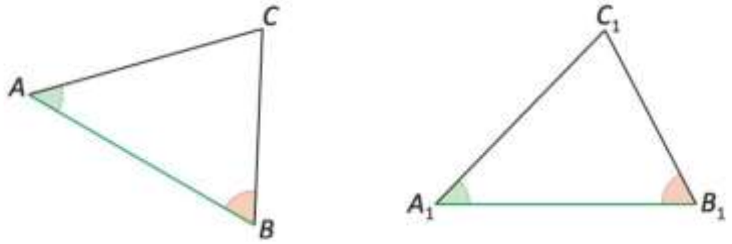
Jeśli $|AC| = |A_1C_1|, |BC| = |B_1C_1|, | \langle C| = |\langle C_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, więc

$$|AB| = |A_1B_1|,\ |\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|,\ |\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

3) ***Kąt-bok-kąt (kbk)***

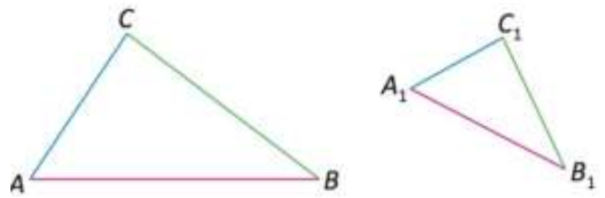
Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.



Jeśli $|AB| = |A_1B_1|, |\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|, |\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$,
więc $|AC| = |A_1C_1|,\ |BC| = |B_1C_1|,\ |\sphericalangle C| = |\sphericalangle C_1|$

32. ***Figury podobne*** mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością. Omówimy teraz podobieństwo trójkątów.
33. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC wtedy, gdy $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$ oraz $|\sphericalangle A_1| =| \sphericalangle \mathrm{A}| , |\sphericalangle \mathrm{B}_1| = |\sphericalangle \mathrm{B}|, |\sphericalangle \mathrm{C}_1| = |\sphericalangle \mathrm{C}|$
34. Jeśli trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC, to skalą podobieństwa nazywamy liczbę $k, k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$. Ta liczba jest zawsze dodatnia.
35. *Podobieństwo trójkątów $A_1B_1C_1$ i ABC zapisujemy symbolicznie:* $\boldsymbol{\Delta A_1B_1C_1} \sim \boldsymbol{\Delta ABC}$.
36. ***Cechy podobieństwa trójkątów:***
    1) ***Bok-bok-bok (bbb)***

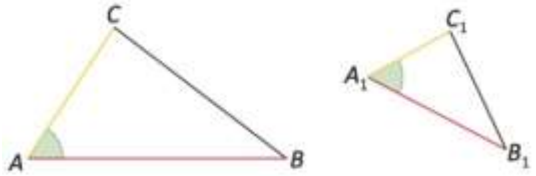
    Jeżeli długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$ są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta ABC, czyli $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, to te trójkąty są podobne.



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

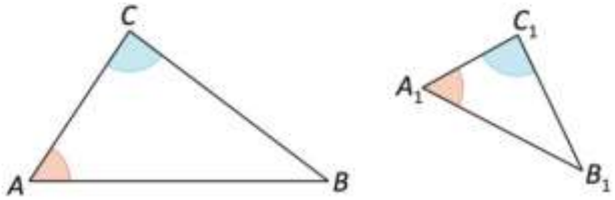
2) ***Bok-kąt-bok (bkb)***

Jeżeli długości dwóch boków trójkąta $A_1B_1C_1$ są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta ABC, czyli $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.



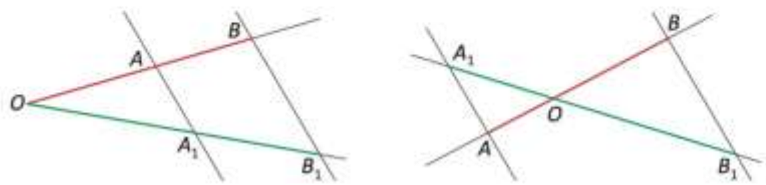
3) Kąt-kąt-kąt (kkk)

Jeżeli dwa kąty trójkąta $A_1B_1C_1$ są odpowiednio równe dwóm kątom trójkąta ABC, czyli $|\sphericalangle A_1| = |\sphericalangle A|$ oraz $|\sphericalangle C_1| = |\sphericalangle C|$, to trójkąty te są podobne.



37. ***Twierdzenie Talesa:***

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na jednym ramieniu kąta (lub na jego przedłużeniu) jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na drugim ramieniu kąta (lub na jego przedłużeniu).



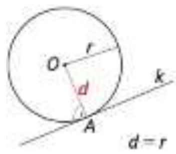
$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} \quad \text{i} \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$$

38. ***Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa:***

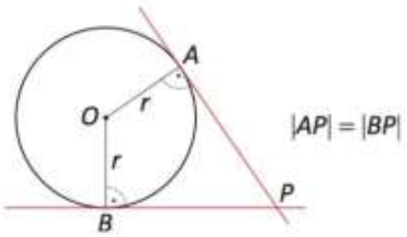
Jeśli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przetniemy dwiema prostymi i stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na jednym ramieniu (lub na jego przedłużeniu) będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na drugim ramieniu kąta (lub na jego przedłużeniu), to te proste są równoległe.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

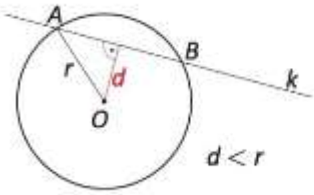
39. Prostą, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy styczną do okręgu w tym punkcie (zwanym punktem styczności prostej i okręgu).
40. ***Prosta jest styczną*** do okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy promień poprowadzony do punktu wspólnego prostej i okręgu jest prostopadły do prostej.



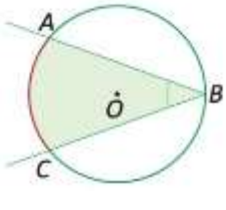
41. ***Prosta jest styczną do okręgu*** wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi.
42. Odcinki dwóch stycznych, poprowadzonych do okręgu z punktu, którego odległość od środka okręgu jest większa niż promień - wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności - mają tę samą długość.



43. ***Sieczną*** okręgu nazywamy prostą, która ma dwa punkty wspólne z danym okręgiem.
44. Prosta jest sieczną okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest mniejsza od promienia okręgu.

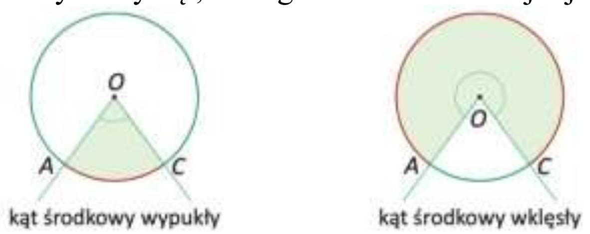


45. ***Kołem*** o środku w punkcie O i promieniu $r, r > 0$, nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza od r lub równa r. Takie koło oznaczamy symbolem $k(O, r)$.
46. ***Kątem wpisanym*** w koło nazywamy kąt wypukły, wyznaczony przez dwie półproste zawierające cięciwy o wspólnym końcu, będącym wierzchołkiem kąta.



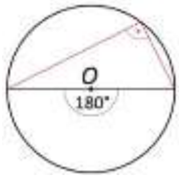
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

47. ***Kątem środkowym*** koła nazywamy kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku koła.

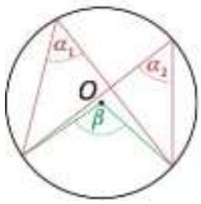


48. Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy są oparte na tym samym łuku, to kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.

49. ***Kąt wpisany, oparty na półokręgu, jest kątem prostym.***



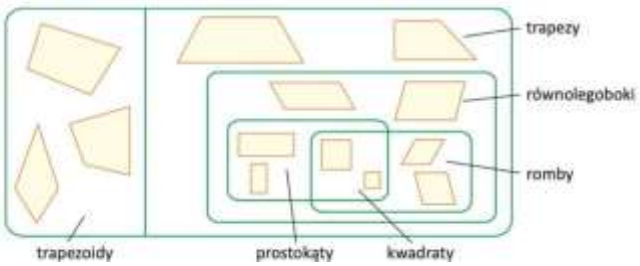
50. ***Kąty wpisane, oparte na tym samym, łuku są równe.***



$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\beta = 2\alpha_1 = 2\alpha_2$$

51. Suma kątów dowolnego czworokąta wynosi 360°.

52. Podział czworokątów wypukłych

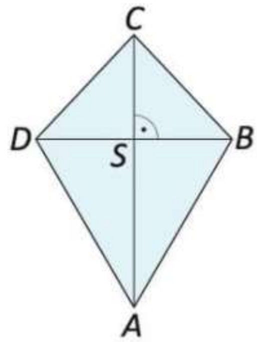


Zasadniczy podział czworokątów wypukłych wyznaczony jest przez liczbę par boków równoległych. I tak mamy:

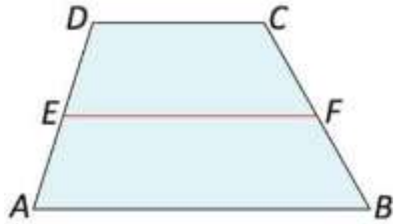
- ***trapezoidy***, czyli czworokąty niemające ani jednej pary boków równoległych;
- ***trapezy***, czyli czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych. Wśród trapezów ważną grupę stanowią:
- ***równoległoboki***, czyli czworokąty mające dwie pary boków równoległych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

53. Przykładem trapezoidu jest deltoid. ***Deltoidem*** nazywamy czworokąt wypukły, który ma tylko jedną oś symetrii zawierającą przekątną tego czworokąta.



54. ***Własności deltoidu***:
    1) Przekątne deltoidu są prostopadłe.
    2) Miary kątów deltoidu między bokami mającymi różną długość są równe.
    3) Przekątna deltoidu łącząca wierzchołki kątów o różnych miarach zawiera się w ich dwusiecznych.
    4) Punkt przecięcia przekątnych deltoidu dzieli przekątną - łączącą wierzchołki katów o równych miarach - na połowy
55. ***Trapezy*** to czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych. Boki równoległe nazywamy podstawami, pozostałe - ramionami. W ramach tego tematu omówimy własności trapezów, które mają tylko jedną parę boków równoległych.
56. ***Wysokością trapezu*** nazywamy odcinek (a także jego długość) prostopadły do podstaw, którego końce należą do podstaw lub ich przedłużeń.
57. W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym ramieniu jest równa 180°.
58. W dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest połową sumy długości podstaw.



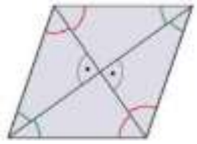
$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$

59. ***Równoległobokiem*** nazywamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
60. **Własności równoległoboku**
    1) Długości dowolnych dwóch przeciwległych boków równoległoboku są równe.
    2) Dowolne dwa przeciwległe kąty równoległoboku są równe.
    3) Punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli te przekątne na połowy.
    4) Suma kątów leżących prz y każdym boku równoległoboku jest równa 180°.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

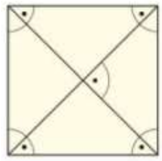
61. ***Prostokątem*** nazywamy równoległobok, który ma wszystkie kąty proste. Prostokąt ma wszystkie własności równoległoboku, a ponadto jego przekątne mają równe długości.

62. ***Rombem*** nazywamy równoległobok, którego wszystkie boki mają równą długość. Romb ma wszystkie własności równoległoboku, a ponadto

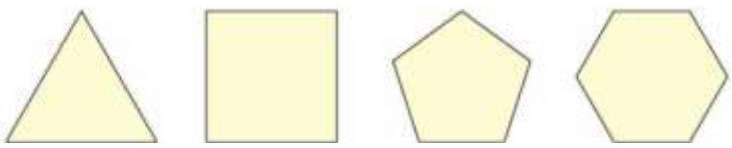


a) przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych kątów;

b) przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.



63. ***Kwadratem*** nazywamy romb, który ma wszystkie kąty proste (lub równoważnie: prostokąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość). Kwadrat ma zatem wszystkie własności rombu i prostokąta.
64. ***Liczba przekątnych w wielokącie*** mającym n boków ($n \in \boldsymbol{N}\ i\ n \geqslant 3$) jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.
65. ***Suma kątów wielokąta*** jest równa $180° \cdot (n-2)$, gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta ($n \in \boldsymbol{N}, n \geqslant 3$).
66. ***Kątem zewnętrznym wielokąta*** (wypukłego) nazywamy kąt przyległy do kąta (wewnętrznego) wielokąta.
67. W dowolnym wielokącie wypukłym suma wszystkich kątów zewnętrznych jest stała i wynosi $720°$.
68. ***Wielokątem foremnym*** nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki mają równą długość i wszystkie kąty są równe.
Wielokątem foremnym jest np. trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny:



69. Dla dowolnego wielokąta foremnego istnieją dwa okręgi: jeden styczny do każdego boku tego wielokąta, drugi - do którego należą wszystkie wierzchołki tego wielokąta. Środki tych okręgów się pokrywają.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

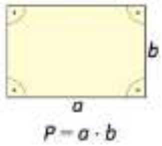
70. ***Podobieństwem*** nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które dowolnym dwóm punktom A, B płaszczyzny przyporządkowuje takie punkty A_1, B_1, dla których

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = k,$$

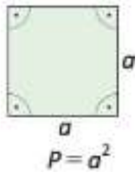
gdzie k jest ustaloną (dla danego podobieństwa) liczbą dodatnią.

Liczbę k nazywamy skalą podobieństwa.

71. ***Figurami podobnymi*** nazywamy takie dwie figury geometryczne F i F_1, dla których istnieje podobieństwo przekształcające figurę F na figurę F_1. Podobieństwo figur FiF_1 oznaczamy symbolicznie: $F \sim F_1$.



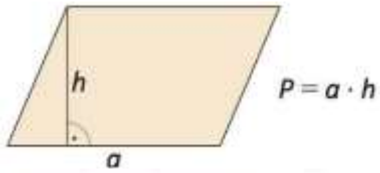
72. Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch jego boków mających wspólny wierzchołek.



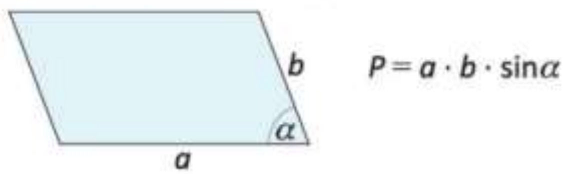
73. Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.

74. Pole równoległoboku wyraża się wzorem:

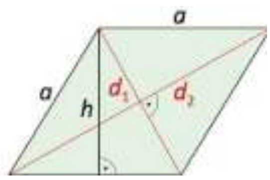
1)



2)



75. ***Pole P rombu*** wyraża się wzorem:

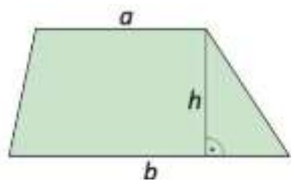


1) $\boldsymbol{P = a \cdot h}$, gdzie a jest długością boku, h - wysokością rombu

2) $\boldsymbol{P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$, gdzie d_1, d_2 są długościami przekątnych rombu.

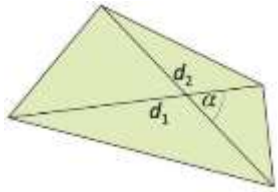
3) $\boldsymbol{P = a^2 \cdot \sin\alpha}$, gdzie α jest kątem między dwoma sąsiednimi bokami rombu.

76. ***Pole P trapezu*** o podstawach mających długość a, b i wysokości h wyraża się wzorem:



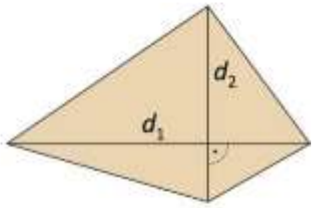
$$\boldsymbol{P = \frac{(a+b)}{2} \cdot h}$$

77. Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długość d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem α, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem:



$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha}$$

78. Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długość d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem prostym, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem:



$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2}$$

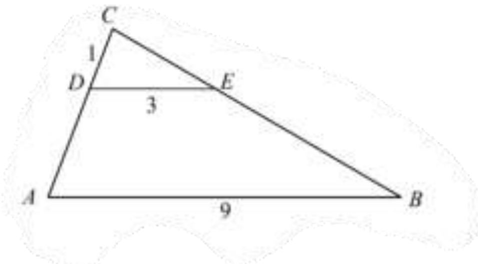
79. ***Stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa***.

$$\boldsymbol{k = \frac{P'}{P}}$$

gdzie P' jest polem figury podobnej do pola P.

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 6.1

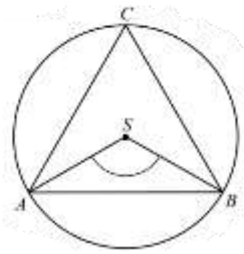


Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiednio równe 1,3 i 9. Długość odcinka AD jest równa

A. 2 C. 5
B. 3 D. 6

ROZWIĄZANIE: Niech $|AD| = x$, wówczas: $\frac{x+1}{9} = \frac{1}{3}, x + 1 = 3, x = 2$

Zadanie 6.2



Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa

A. $120°$ C. $60°$
B. $90°$ D. $30°$

ROZWIĄZANIE: $\alpha = 2 \cdot 60° = 120°$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie Program Regionalny | Samorząd Województwa Wielkopolskiego | Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 6.3

Okrąg opisany na trójkącie równobocznym ma promień 12. Wysokość tego trójkąta jest równa

A. 18

B. 20

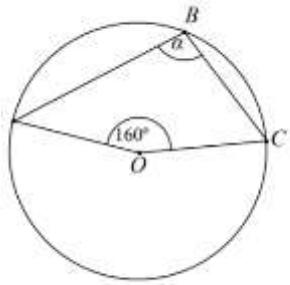
C. 22

D. 24

ROZWIĄZANIE: $12 = r = \frac{2}{3}h, h = 18$

Zadanie 6.4

Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



A. 80°

B. 100°

C. 110°

D. 120°

ROZWIĄZANIE: $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (360° - 160°) = 100°$

Zadanie 6.5

Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa

A. $3\sqrt{3}$

B. 3

C. $6\sqrt{3}$

D. 6

ROZWIĄZANIE: $a^2 \sin 60° = ah,\ h = a\sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.6

Obwód prostokąta jest równy 28 . Stosunek długości jego boków jest równy $3:4$. Dłuższy bok tego prostokąta jest równy

A. 14

B. 8

C. 7

D. 6

ROZWIĄZANIE: $28 = 2(3a + 4a),\ a = 2, 4a = 8$

Zadanie 6.7

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

A. 14

B. 8

C. 6

D. 5

ROZWIĄZANIE: $r = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5$, gdzie *c*- przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego.

Zadanie 6.8

W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość

A. 6

B. $2\sqrt{21}$

C. $2\sqrt{29}$

D. 14

ROZWIAZANIE: $|AB| = 2\sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.9

W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7 . Obwód tego trójkąta jest równy

A. $16\sqrt{6}$

B. $14\sqrt{6}$

C. $12 + 4\sqrt{6}$

D. $12 + 2\sqrt{6}$

ROZWIĄZANIE: $5 + 7 + \sqrt{49 - 25} = 12 + 2\sqrt{6}$

Zadanie 6.10

Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta i dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość

A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{3}$

D. 12

ROZWIĄZANIE: $\frac{b}{6} = \operatorname{tg} 60°, b = 6\sqrt{3}$

Zadanie 6.11

Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość

A. 3 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

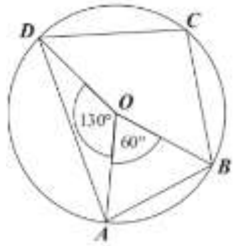
D. 8 cm

ROZWIĄZANIE: $r = \sqrt{16 + 9} = 5$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.12

Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany BAD ma miarę



A. $150°$

B. $120°$

C. $115°$

D. $85°$

ROZWIĄZANIE: $\alpha = \frac{1}{2}(360° - 60° - 130°) = 85°$

Zadanie 6.13

Najdłuższa przekątna sześciokąta foremnego ma długość 8 . Wówczas pole koła opisanego na tym sześciokącie jest równe

A. 4π

B. 8π

C. 16π

D. 64π

ROZWIĄZANIE: Najdłuższa przekątną sześciokąta jest średnicą okręgu opisanego na tej figurze, więc *r=4*:

$$P = \pi 4^2 = 16\pi$$

Zadanie 6.14

Pole równoległoboku o bokach długości 4 i 12 oraz kącie ostrym 30° jest równe

A. 24

B. $12\sqrt{3}$

C. 12

D. $6\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIA: $P = 4 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 24$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.15

Kąt środkowy oparty na łuku, którego długość jest równa $\frac{4}{9}$ długości okręgu, ma miarę

A. $160°$

B. $80°$

C. $40°$

D. $20°$

ROZWIAZANIE: $\alpha = \frac{4}{9} \cdot 360° = 160°$

Zadanie 6.16

Na planie miasta, narysowanym w skali 1: 20000, park jest prostokątem o bokach 2 cm i 5 cm. Stąd wynika, że ten park ma powierzchnię

A. $20000\ \mathrm{m}^2$

B. $40000\ \mathrm{m}^2$

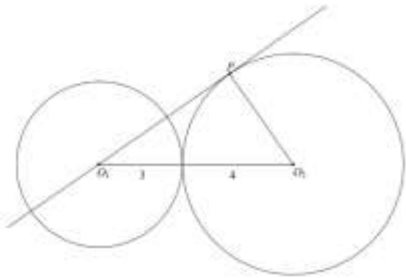
C. $200000\ \mathrm{m}^2$

D. $400000\ \mathrm{m}^2$

ROZWIĄZANIE: $P = (2 \cdot 10^4)^2 \cdot (2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}) = 4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^5 = 400\,000$

Zadanie 6.17

Okręgi o promieniach 3 i 4 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 4 w punkcie P przechodzi przez środek okręgu o promieniu 3 (zobacz rysunek).



Pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności P, jest równe

A. 14

B. $2\sqrt{33}$

C. $4\sqrt{33}$

D. 12

ROZWIĄZANIE: $|Q_1P| = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}, \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{33} = 2\sqrt{33}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.18

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $\frac{5}{2}$, przy czym $|AB| = \frac{5}{2}|A'B'|$. Stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta $A'B'C'$ jest równy

A. $\frac{4}{25}$

B. $\frac{2}{5}$

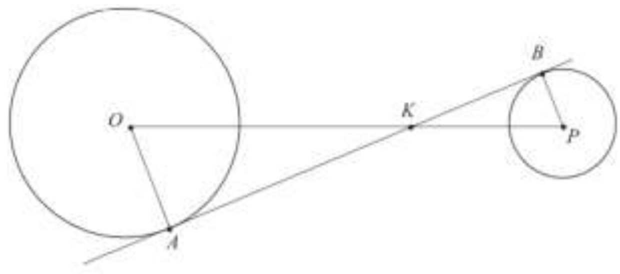
C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{25}{4}$

ROZWIĄZANIE: $P_{ABC} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 P_{A'B'C'}$, tak więc $k^2 = \frac{25}{4}$.

Zadanie 6.19

Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie P i promieniu 3. Odcinek OP ma długość 16 . Prosta AB jest styczna do tych okręgów w punktach A i B. Ponadto prosta AB przecina odcinek OP w punkcie K (zobacz rysunek).



Wtedy

A. $|OK| = 6$

B. $|OK| = 8$

C. $|OK| = 10$

D. $|OK| = 12$

ROZWIĄZANIE: Niech $|OK| = x$, $\frac{x}{5} = \frac{16-x}{3}$,

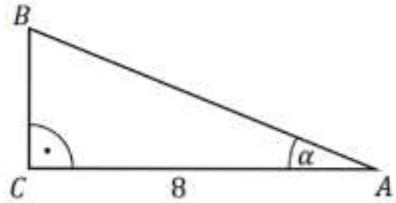
$3x = 80 - 5x, 8x = 80, x = 10$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.20

Przyprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 8 oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$ (zobacz rysunek).

Pole tego trójkąta jest równe



A. 12

B. $\frac{37}{3}$

C. $\frac{62}{5}$

D. $\frac{64}{5}$

ROZWIĄZANIE: $tg\ \alpha = \frac{|BC|}{|CA|} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{|BC|}{8} \Rightarrow |BC| = \frac{16}{5}$, więc $P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{16}{5} = \frac{64}{5}$

Cześć 3. Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 6.21

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię $240\ \mathrm{m}^2$. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię $350\ \mathrm{m}^2$ oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

ROZWIĄZANIE: Wymiary pierwszego basenu: x, y. Wymiary drugiego basenu: $x + 5, y + 3$

$$\begin{cases} xy = 240 \\ (x+5)(y+2) = 350 \end{cases} \begin{cases} xy = 240 \\ xy + 2x + 5y = 340 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy: $2x + 5y = 100, y = 20 - \frac{2}{5}x$

Wtedy: $x\left(20 - \frac{2}{5}x\right) = 240,\ -\frac{2}{5}x^2 + 20x - 240 = 0,\ x^2 - 50x + 600 = 0$

$\Delta = 2500 - 2400 = 100,\ x_1 = \dfrac{50 - 10}{2} = 20,\ x_2 = \dfrac{50 + 10}{2} = 30$

Odp. Pierwszy basen ma wymiary: $20\ \mathrm{m} \times 12\ \mathrm{m}$ lub $30\ \mathrm{m} \times 8\ \mathrm{m}$.

Drugi basen odpowiednio: $25\ \mathrm{m} \times 14\ \mathrm{m}, 35\ \mathrm{m} \times 10\ \mathrm{m}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.22

Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

ROZWIĄZANIE:

Wymiary pierwszego boiska: x, y. Wymiary drugiego boiska: $x+4, y-9$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=65^2 \\ (x+4)^2+(y-8)^2=65^2 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=65^2 \\ x^2+8x+16+y^2-16y+64=65^2 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy: $8x-16y+80=0$.

Stąd $x=2y-10$.

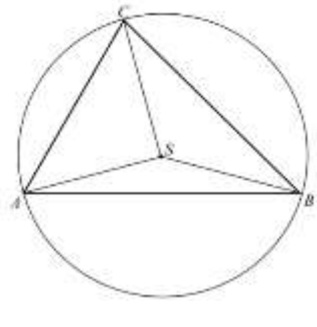
Wtedy $65^2=y^2+4y^2-40y+100$

$$5y^2-40y-4125=0,\ y^2-8y-825=0$$
$$\Delta=64+3300=3364,\ y_1=\frac{8+58}{2}=33,\ y_2=\frac{8-58}{2}<0$$

Odp.: Pierwszy boisko ma wymiary 56 m × 33 m, drugie 60 m × 25 m.

Zadanie 6.23

Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS.Oblicz kąty trójkąta ABC.



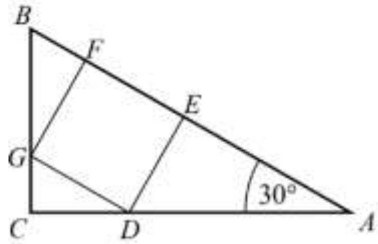
ROZWIĄZANIE: Przyjmijmy, że ∢ACS = ∢CAS = β,
∢SCB = ∢SBC = γ oraz ∢SAB = ∢SBA = α, wówczas:

$$\beta=3\alpha, \gamma=2\alpha, 180^\circ=2\alpha+2\gamma+2\beta, 90^\circ=\alpha+\gamma+\beta=6\alpha,\ \alpha=15^\circ$$

ODP: $\sphericalangle ABC=\alpha+\gamma=3\cdot 15^\circ=45^\circ$
$\sphericalangle BCA=\gamma+\beta=5\cdot 15^\circ=75^\circ$
$\sphericalangle BAC=\alpha+\beta=4\cdot 15^\circ=60^\circ$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.24



Kąt CAB trójkąta prostokątnego ACB ma miarę 30°. Pole kwadratu $DEFG$, wpisanego w ten trójkąt (zobacz rysunek), jest równe 4 . Oblicz pole trójkąta ACB.

ROZWIĄZAINE: Niech a oznacza długość boku kwadratu $DEFG$. Zatem $a = 2$.

Trójkąt ADE to „połowa trójkąta równobocznego" o boku AD i wysokości AE, więc

$$|AD| = 2a = 4 \text{ oraz } |AE| = \frac{|AD|\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Trójkąt GBF to „połowa trójkąta równobocznego" o boku BG i wysokości FG, więc

$$|BG| = 2|BF| \text{ oraz } |FG| = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$$

Zatem $2 = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$, więc $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ oraz $|BF| = \frac{1}{2}|BG| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Trójkąt ACB jest „połową trójkąta równobocznego" o boku AB. Obliczamy

$$|AB| = |AE| + |EF| + |BF| = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2$$

Pole trójkąta ACB jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{8}{3}\sqrt{3} + 2\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{64}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{3} + 4\right) = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$$

Uwaga

Podany sposób rozwiązania polega na rozwiązaniu trójkątów prostokątnych ADE i BGF. Tak samo możemy postąpić rozwiązując inną parę trójkątów prostokątnych: ADE i DCG lub DCG i BGF.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.25

Dany jest romb o boku długości 35. Długości przekątnych tego rombu różnią się o 14. Oblicz pole tego rombu.

ROZWIAZANIE: Niech x oznacza długość połowy krótszej przekątnej rombu.
Wtedy

$$35^2 = x^2 + (x+7)^2 = 2x^2 + 14x + 49$$
$$2x^2 + 14x - 1176 = 0,\ x^2 + 7x - 588 = 0$$
$$\Delta = 49 + 2352 = 2401,\ x_1 \doteq \frac{-7+49}{2} = 21,\ x_2 = \frac{-7-49}{2} < 0$$

Odp. $P = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 56 = 1176$

Zadanie 6.26

Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o $50°$. Oblicz kąty tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE: Niech α oznacza najmniejszy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha + 50°$ oraz 3α. Suma kątów trójkąta jest równa $180°$, więc

$$\alpha + 3\alpha + \alpha + 50° = 180°$$
$$5\alpha = 130°$$
$$\alpha = 26°$$

Stąd $\alpha + 50° = 76°$ oraz $3\alpha = 78°$.

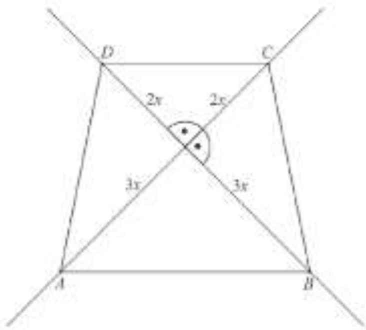
Odp.: Miary kątów w tym trójkącie wynoszą odpowiednio $26°, 76°\ i\ 78°$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 6.27

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz pole tego trapezu.

ROZWIĄZANIE: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku $2:3$, zatem pole trapezu to suma dwóch trójkątów: o wysokości $2x$ i podstawie $5x$ oraz o wysokości $3x$ i podstawie $5x$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$$
$$4x^2 + 9x^2 = 26$$
$$13x^2 = 26$$

Stąd $x^2 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$

Przekątne maja długość $5\sqrt{2}$.

Obliczamy pole trapezu

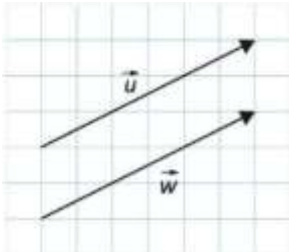
$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 25$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

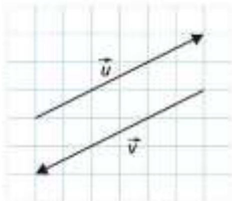
VII. GEOMETRIA ANALITYCZNA

Część 1. Teoria

1. Jeśli w układzie współrzędnych są dane punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, to ***wektorem*** nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$ i oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.
2. Dwa wektory nazywamy ***wektorami równymi*** wtedy, gdy ich odpowiednie współrzędne są równe.
3. ***Wektorem zerowym*** nazywamy wektor, którego obie współrzędne są równe zeru; oznaczamy go symbolem $\vec{0}$. Wektor ten nie ma określonego zwrotu.
4. Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$i$\vec{w}$ są równe, to wektory $\vec{u}$i$\vec{w}$:



   1) są równoległe
   2) mają te same zwroty
   3) mają taką samą długość.
5. Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe, mają te same zwroty i taką samą długość, to wektory $\vec{u}$ i $\overrightarrow{w}$ są równe.
6. Jeśli istnieje liczba $a, a \neq 0$, dla której
$$\vec{u} = a \cdot \vec{w}$$
i wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są niezerowe, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ nazywamy ***wektorami równoległymi***. Dodatkowo przyjmujemy, że *wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora* (w tym również do wektora zerowego).
7. Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne, to wektory $\overrightarrow{u}$ i $\vec{v}$:



   1) są równoległe
   2) mają przeciwne zwroty
   3) mają taką samą długość.

   Wektor przeciwny do $\vec{u}$ oznaczamy jako $-\vec{u}$.
8. Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe, mają przeciwne zwroty i taką samą długość, to wektory $\vec{u}$i$\vec{w}$ są przeciwne.
9. ***Środkiem odcinka AB***, gdzie $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, jest punkt $\boldsymbol{S}\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

10. ***Równaniem kierunkowym*** prostej nazywamy równanie mające postać $\boldsymbol{y = ax + b}$.
11. Równanie prostej, której współczynnik kierunkowy jest równy m i do której należy punkt o współrzędnych (x_1, y_1), można zapisać w postaci
$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$
12. ***Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty*** o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$, można zapisać w postaci
$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$
13. ***Równaniem ogólnym prostej*** nazywamy równanie mające postać $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$
14. Proste opisane równaniami $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy, gdy $a = a_1$.
15. ***Proste*** opisane równaniami $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$ ***są równoległe*** wtedy, gdy $\boldsymbol{a = a_1}$.
16. Proste opisane równaniami $Ax + By + C = 0$ (gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$) i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (gdzie $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$) są równoległe wtedy, gdy $AB_1 - A_1B = 0$.
17. ***Proste*** opisane równaniami $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$ ***są prostopadłe*** wtedy, gdy $\boldsymbol{a \cdot a_1 = -1}$
18. Proste opisane równaniami $Ax + By + C = 0$ (gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$) i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (gdzie $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$) są prostopadłe wtedy, gdy $AA_1 + BB_1 = 0$.
19. ***Długość odcinka*** $\boldsymbol{|AB|}$ o końcach w punktach $A = (x_A, y_a)\ i\ B = (x_B, y_B)$, wyraża się wzorem:
$$\boldsymbol{|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$
20. ***Odległość punktu*** $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$ ***od prostej*** $k: Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, wyraża się wzorem:
$$\boldsymbol{d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 7.1

Punkty $A = (-1,3)$ i $C = (-5,5)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe

A. 10

B. 25

C. 50

D. 100

ROZWIĄZANIE: $|AC| = \sqrt{(-5+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, Pole $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10$

Zadanie 7.2

Punkt A ma współrzędne $(5,2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, a punkt C jest symetryczny do.punktu B względem osi Oy. Punkt C ma współzzędne

A. $(-5;-2012)$

B. $(-2012;-5)$

C. $(-5;\ 2012)$

D. $(-2012;5)$

ROZWIĄZANIE: $B = (5;-2012), C = (-5;-2012)$

Zadanie 7.3

Punkt $S = (2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

A. $B = (5,11)$

B. $B = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

C. $B = \left(-\frac{3}{2}, -5\right)$

D. $B = (3,11)$

ROZWIĄZANIE: $2 = \frac{x-1}{2}, 7 = \frac{y+3}{2}, B = (5,11)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 7.4

Dane są punkty $M = (-2,1)$ i $N = (-1,3)$. Punkt K jest środkiem odcinka MN. Obrazem punktu K w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt

A. $K' = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

B. $K' = \left(2, \frac{3}{2}\right)$

C. $K' = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

D. $K' = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$.

ROZWIĄZANIE: $K = \left(\frac{-2-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right), K' = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$

Zadanie 7.5

Dane są punkty: $P = (-2, -2)$ i $Q = (3,3)$. Odległość punktu P od punktu Q jest równa

A. 1

B. 5

C. $5\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{5}$.

ROZWIĄZANIE: $|PQ| = \sqrt{(3+2)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Zadanie 7.6

Suma odległości punktu $A = (-2,4)$ od prostych o równaniach $x = 3$ i $y = -1$ jest równa

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7

ROZWIĄZANIE: Odległość punktu A od prostej *x* wynosi 5 oraz od osi *y* – również 5, więc $5 + 5 = 10$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Cześć 3. Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 7.7

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A=(3,8), B=(1,2)$ i $C=(6,7)$ jest prostokątny.

ROZWIĄZANIE:

$$a_{AB}=\frac{2-8}{1-3}=3, a_{AC}=\frac{7-8}{6-3}=-\frac{1}{3}, a_{AB}\cdot a_{AC}=-1$$

Proste AB i AC są prostopadłe. Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

Zadanie 7.8

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A=(-2,2)$ i $B=(2,10)$

ROZWIĄZANIE: $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+6}$, $a_{AB}=2,\ S_{AB}=(0,6)$

Zadanie 7.9

Punkty $A=(2,11), B=(8,23), C=(6,14)$ są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz współrzędne punktu D.

ROZWIĄZANIE: Prosta AB: $a_{AB}=\frac{23-11}{8-2}=2,\ y-11=2(x-2),\ y=2x+7$

Prosta prostopadła do AB przechodząca przez C: $y=-\frac{1}{2}(x-6)+14=-\frac{1}{2}x+17$

Punkt przecięcia prostych:

$$\begin{cases} y=2x+7 \\ y=-\frac{1}{2}x+17 \end{cases} \begin{cases} y=2x+7 \\ 4x+14=-x+34 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=15 \end{cases}$$

Odp. $D=(4,15)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 7.10

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $A = (2,1)$ i $C = (1,9)$. Podstawa AB tego trójkąta jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.

ROZWIĄZANIE:

$$B = (2y, y)$$
$$|AC| = \sqrt{(1-2)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{65},\ |BC| = \sqrt{(1-2y)^2 + (9-y)^2},$$
$$(1-2y)^2 + (9-y)^2 = 65,\ 5y^2 - 22y + 17 = 0.$$
$$\Delta = 144,\ y_1 = \frac{22-12}{10} = 1,\ y_2 = \frac{22+12}{10} = \frac{17}{5}.$$

Odp. $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$

Zadanie 7.11

Punkty $A = (-1,-5), B = (3,-1), C = (2,4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

ROZWIĄZANIE:

$$a_{AB} = \frac{-1+5}{3+1} = 1. \text{ Prosta } AB: y = x - 4 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$$

Wysokość równoległoboku jest równa odległości punktu C od prostej AB.

$$h = \frac{|2-4-4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2},\ |AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{2}$$

Odp. $P_{ABCD} = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$

Zadanie 7.12

W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-43,-12)$ i $B = (50,19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

ROZWIĄZANIE: $a_{AB} = \frac{19+12}{50+43} = \frac{1}{3}$. Równanie prostej AB: $y = \frac{1}{3}(x-50) + 19 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

Odp. $x = -7$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 7.13

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox.

ROZWIĄZANIE: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -3x + b \end{cases}$, $C = (0,2)$, $b = 2$, $A = (-2,0)$, $B = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

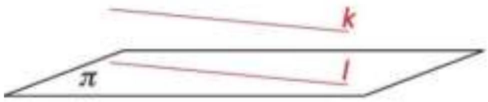
Odp. $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + 2\right) \cdot 2 = \frac{8}{3}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

VIII. STEREOMETRIA

Część 1. Teoria

1. Dwie płaszczyzny, których częścią wspólną jest prosta, nazywamy ***płaszczyznami przecinającymi*** się, a wspólną prostą - ***krawędzią przecięcia***.
2. ***Płaszczyznami równoległymi*** nazywamy dwie płaszczyzny, których częścią wspólną jest zbiór pusty lub cała płaszczyzna.
3. ***Prosta jest równoległa do płaszczyzny*** $\boldsymbol{\pi}$, jeśli nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π lub leży na płaszczyźnie π.



4. Jeśli proste k i *l są* do siebie równoległe, to prosta k jest równoległa do każdej płaszczyzny zawierającej I.
5. Dwie przecinające się proste wyznaczają tylko jedną płaszczyznę.
6. Prosta i punkt nieleżący na tej prostej wyznaczają tylko jedną płaszczyznę.
7. Przez dowolny punkt przestrzeni można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.
8. Jeśli w przestrzeni dane są trzy proste i dwie z tych prostych są równoległe do trzeciej prostej, to są również do siebie równoległe.
9. Otóż jeśli proste k, l, m są położone w przestrzeni i proste k, I są prostopadłe do prostej m, to proste k, I mogą:

   a) przecinać się (pod dowolnym kątem)

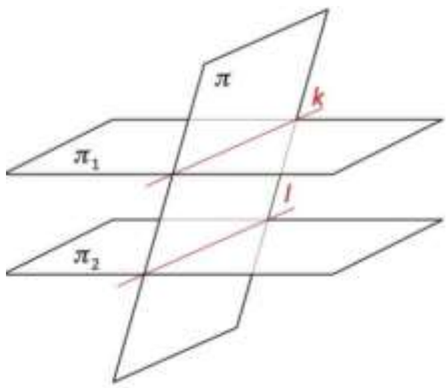
   b) być równoległe

   c) być skośne.
10. Jeśli dwie równoległe płaszczyzny przecina trzecia płaszczyzna, to otrzymane krawędzie przecięcia są do siebie równoległe. (patrz rysunek obok)

    $\pi_1 \parallel \pi_2$

    $\pi_1 \cap \pi = k$

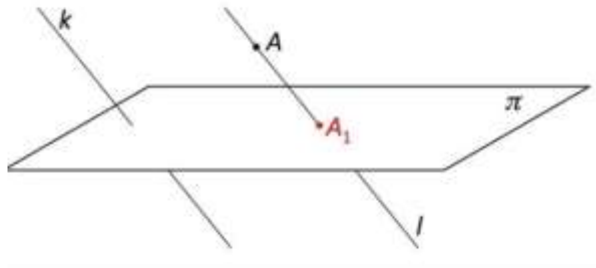
    $\pi_2 \cap \pi = I$



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

11. Niech dana będzie w przestrzeni płaszczyzna π, zwana rzutnią, i prosta k, która przebija rzutnię. Kierunek prostej k nazywamy ***kierunkiem rzutu***. Jeśli przez dowolny punkt A przestrzeni poprowadzimy prostą l równoległą do prostej k, to przebija ona rzutnię w punkcie A_1.

    Punkt A_1 nazywamy ***rzutem równoległym*** punktu A na płaszczyznę π w kierunku prostej k.



12. Rzut równoległy na płaszczyznę nie zachowuje odległości punktów (inaczej mówiąc: rzut równoległy na płaszczyznę nie jest izometrią).
13. Rzut równoległy na płaszczyznę odcinka równoległego do rzutni jest odcinkiem równoległym do danego i mający taką samą długość jak odcinek dany.
14. Rzut równoległy na płaszczyznę zachowuje uporządkowanie punktów leżących na prostej nierównoległej do kierunku rzutu.
15. W rzucie równoległym na płaszczyznę stosunek długości odcinków leżących na prostej nierównoległej do kierunku rzutu jest równy stosunkowi długości ich rzutów.

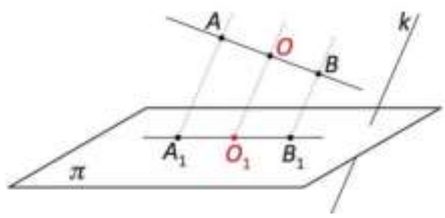
    Z powyższego wynika, że:

    $\frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|A_1O_1|}{|O_1B_1|}$,

    ale $|AO| = |OB|$,

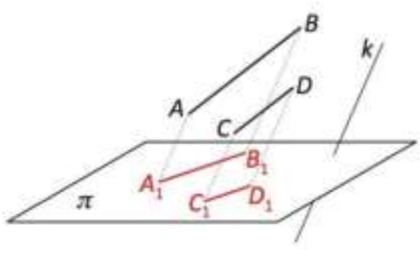
    więc $1 = \frac{|A_1O_1|}{|O_1B_1|}$,

    skąd $|O_1B_1| = |A_1O_1|$.



16. Rzuty równoległe na płaszczyznę odcinków równoległych (ale nierównoległych do kierunku rzutowania) są odcinkami równoległymi i stosunek długości tych odcinków jest równy stosunkowi długości ich rzutów.

    Punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są odpowiednio rzutami równoległymi punktów A, B, C, D na płaszczyznę π w



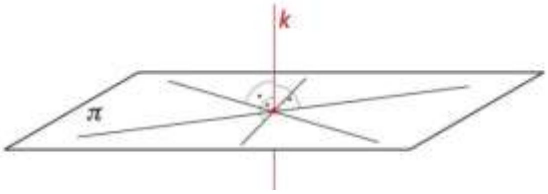
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

kierunku prostej k, $AB \parallel CD, AB \parallel k$, więc

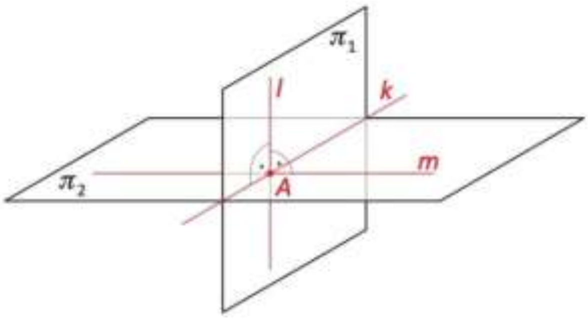
$A_1B_1 \parallel C_1D_1$,

$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$

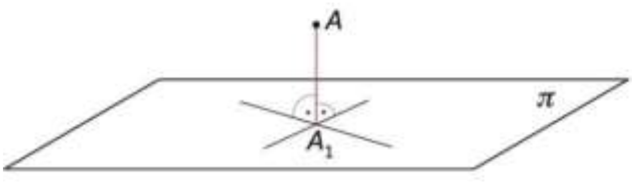
17. ***Prosta i płaszczyzna są do siebie prostopadłe*** wtedy, gdy prosta jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie i przecinającej daną prostą.



18. Jeśli prosta jest prostopadła do dwóch prostych leżących na płaszczyźnie i przebija płaszczyznę w punkcie ich przecięcia, to jest prostopadła do tej płaszczyzny.
19. ***Płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2*** wtedy, gdy w płaszczyźnie π_1 jest zawarta prosta prostopadła do płaszczyzny π_2.

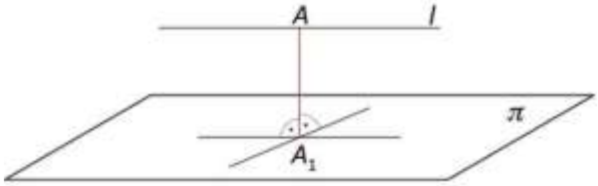


20. Rzutem prostokątnym na płaszczyznę nazywamy rzut równoległy (na płaszczyznę), którego kierunek jest wyznaczony przez prostą prostopadłą do rzutni.
21. Odległością punktu A od płaszczyzny π nazywamy długość odcinka AA_1, gdzie A_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π. Odległość tę oznaczamy $d(A, \pi)$

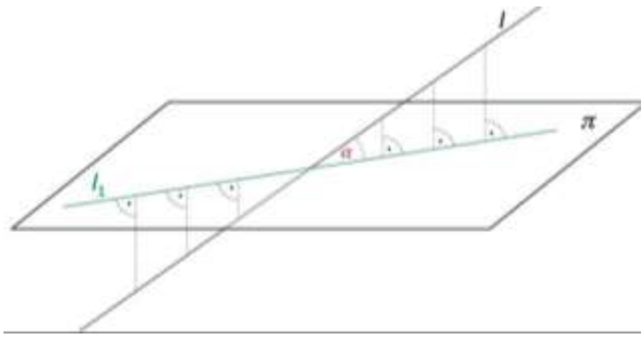


Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

22. ***Odległością prostej / (równoległej do płaszczyzny π) od płaszczyzny π*** nazywamy długość odcinka AA_1, przy czym A jest dowolnym punktem prostej $l, A_1 -$ rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π.

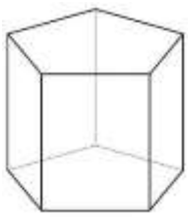


23. Kątem między prostą I (przebijającą płaszczyznę π i nieprostopadłą do niej) a płaszczyzną π nazywamy kąt ostry α między prostą / a jej rzutem prostokątnym l_1 na płaszczyznę π.

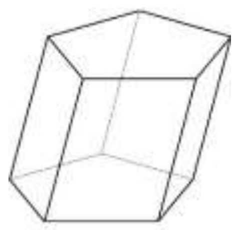


24. ***Graniastosłupem*** nazywamy wielościan, który ma dwie przystające ściany położone w płaszczyznach równoległych (podstawy graniastosłupa), a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami.
25. Graniastosłupy, których ściany boczne są prostokątami, nazywamy graniastosłupami prostymi (rys. a), pozostałe - graniastosłupami pochyłymi (rys. b).

a)



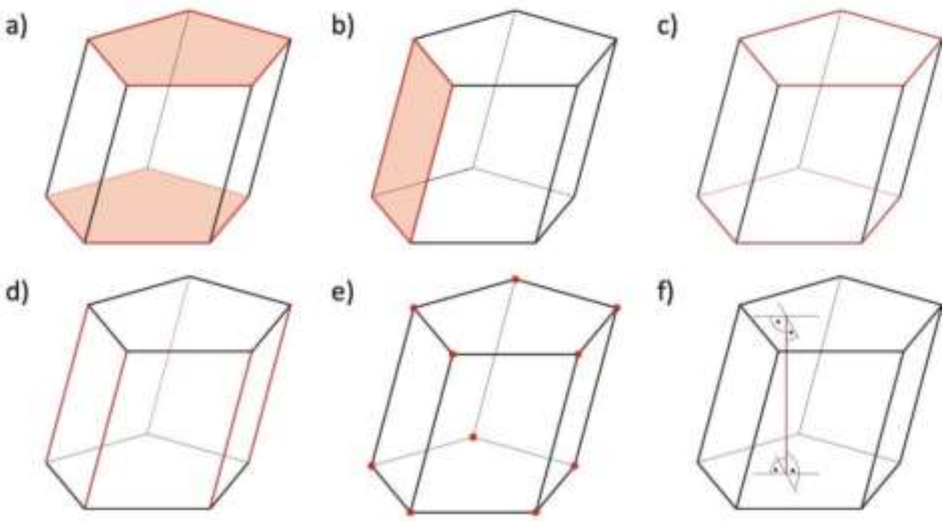
b)



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

26. Na rysunku poniżej zaznaczono kolorem czerwonym:

a) podstawy graniastosłupa
b) ścianę boczną
c) krawędzie podstaw
d) krawędzie boczne
e) wierzchołki graniastosłupa
f) wysokość graniastosłupa.



27. ***Wysokością graniastosłupa*** nazywamy odcinek (a także jego długość), który jest prostopadły do płaszczyzn zawierających podstawy i który charakteryzuje się tym, że jeden jego koniec należy do jednej płaszczyzny, a drugi koniec do drugiej płaszczyzny. Zauważ, że w graniastosłupie prostym każda krawędź boczna jest wysokością.
28. ***Graniastosłup prawidłowy*** jest to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny (czyli wielokąt, którego wszystkie boki mają równą długość i wszystkie kąty równą miarę).
29. Opisując graniastosłupy, posługujemy się określeniami: trójkątny, czworokątny, pięciokątny itd., w zależności od tego, jaki wielokąt jest w podstawie graniastosłupa. Tak więc np. graniastosłup prawidłowy trójkątny to graniastosłup, którego podstawami są trójkąty równoboczne, a ścianami bocznymi - prostokąty.
30. ***Prostopadłościan*** jest to graniastosłup prosty, którego podstawami są prostokąty.
31. ***Sześcian*** jest to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

UWAGA!

Aby narysować graniastosłup, wykorzystujemy własności rzutu równoległego na płaszczyznę. Najczęściej rysunek wykonujemy tak, że jedna ze ścian bocznych jest równoległa do rzutni. Krawędzie boczne są odcinkami równoległymi o równych

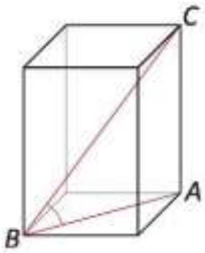
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

długościach, więc na rysunku też są równoległe i mają równą długość, podobnie jak i odpowiednie pary krawędzi podstaw.

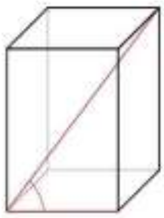
32. ***Przekątną wielościanu*** nazywamy odcinek, którego końcami są wierzchołki wielościanu i który nie zawiera się w ścianie wielościanu.
33. ***Liczba przekątnych graniastosłupa***, którego podstawą jest n-kąt, $n \in \boldsymbol{N}, n > 2$, wynosi:

$$\boldsymbol{n(n-3)}.$$

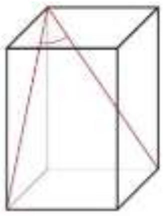
34. Pewne kąty w graniastosłupach prostych:



1)Kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy. (Zauważ, że odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka BC na płaszczyznę podstawy).



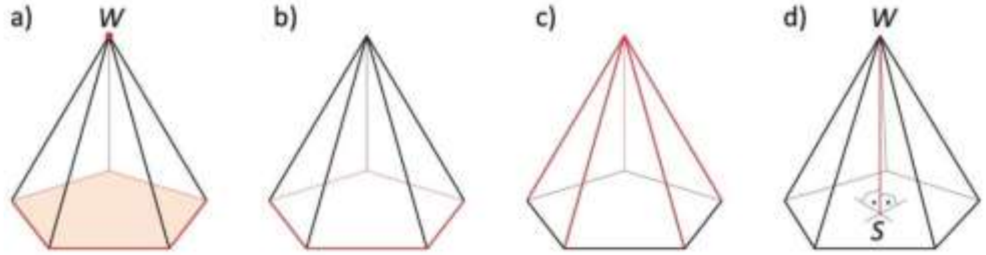
2) Kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy.



3) Kąt między przekątnymi ścian bocznych (wychodzącymi z tego samego wierzchołka).

35. ***Ostrosłupem*** nazywamy wielościan, którego jedna ze ścian, zwana podstawą, jest wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku (nieleżącym w płaszczyźnie podstawy), zwanym wierzchołkiem ostrosłupa,

36. Na rysunku poniżej kolorem czerwonym zaznaczono:
    a) podstawę ostrosłupa oraz wierzchołek ostrosłupa (punkt W)
    b) krawędzie podstawy ostrosłupa
    c) krawędzie boczne ostrosłupa
    d) wysokość ostrosłupa.



37. ***Wysokością ostrosłupa*** nazywamy odcinek (a także jego długość), którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim końcem - jego rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy.
    Na rysunku d) jest to odcinek WS. Punkt S nazywamy ***spodkiem wysokości*** ostrosłupa.
38. ***Ostrosłupem prawidłowym*** nazywamy ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.
39. ***Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego*** są przystającymi trójkątami równoramiennymi.
40. ***W podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg*** i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem tego okręgu wtedy, gdy wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.
41. ***Siatka wielościanu*** to figura płaska, którą otrzymuje się przez „rozcięcie" powierzchni wielościanu wzdłuż niektórych krawędzi tak, aby ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie i były połączone ze sobą niektórymi bokami. Wielościan może mieć wiele różnych siatek.
42. ***Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa $\boldsymbol{P_c}$*** jest równe sumie podwojonego pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b graniastosłupa.

$$\boldsymbol{P_c = 2P_p + P_b}$$

43. ***Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $\boldsymbol{P_c}$*** jest równe sumie pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b ostrosłupa.

$$\boldsymbol{P_c = P_p + P_b}$$

Własności objętości:

1) Objętość bryły jest liczbą nieujemną.
2) Objętości brył przystających, wyznaczone przy tej samej jednostce, są równe.
3) Jeśli bryła F składa się z dwóch brył F_1 i F_2, mających objętości i wnętrzami rozłącznych, to objętość bryły F jest równa sumie objętości brył F_1 i F_2 (przy tej samej jednostce).
4) Sześcian o krawędzi jednostkowej ma objętość równą 1.

44. ***Objętość V graniastosłupa*** jest równa iloczynowi pola podstawy P_p i wysokości h graniastosłupa:

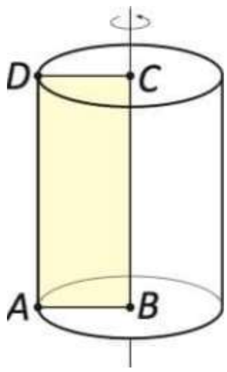
$$\boldsymbol{V = P_p \cdot h}$$

45. ***Objętość V ostrosłupa*** jest równa jednej trzeciej iloczynu pola podstawy P_p i wysokości h ostrosłupa:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h}$$

46. ***Przekrojem wielościanu płaszczyzną π*** nazywamy figurę, która jest częścią wspólną płaszczyzny π i tego wielościanu.
Przekrojem wielościanu może być punkt, odcinek lub wielokąt.

47. ***Walcem*** nazywamy figurę geometryczną otrzymaną przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.



Prostą, wokół której obracamy prostokąt, nazywamy ***osią obrotu walca***.
Boki prostokąta prostopadłe do osi obrotu zakreślają dwa koła, które nazywamy ***podstawami walca***.
Bok prostokąta równoległy do osi obrotu i do niej nienależący zakreśla ***powierzchnię***

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

boczną walca.

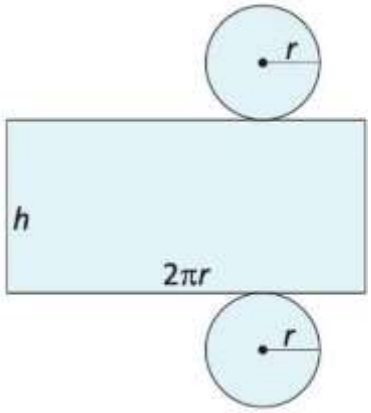
Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca, którego końce należą do podstaw, nazywamy ***tworzącą walca***.

Powierzchnia boczna walca wraz z dwiema podstawami tworzy powierzchnię całkowitą walca.

Wysokością walca nazywamy każdy odcinek (a także jego długość), którego końce leżą w płaszczyznach zawierających podstawy i który jest prostopadły do tych płaszczyzn.

W szczególności ***każda tworząca walca jest jego wysokością***.

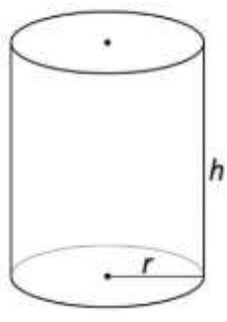
48. ***Przekrój walca*** to część wspólna tego walca i dowolnej płaszczyzny.
49. ***Przekrój osiowy walca*** to przekrój płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca.
50. ***Przekrój osiowy walca jest prostokątem***, którego jednym bokiem jest średnica podstawy, a drugim wysokość walca.
51. Oto rozwinięcie powierzchni walca o promieniu podstawy r i wysokości h na płaszczyźnie.



Powierzchnia boczna po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem, którego jeden bok ma długość równą obwodowi podstawy ($2\pi r$), a drugi - ma taką samą długość jak wysokość walca (h).

53. Pole powierzchni bocznej P_b walca określa wzór

$$\boldsymbol{P_b = 2\pi r \cdot h}$$



pole podstawy P_p

$$\boldsymbol{P_p = \pi r^2}$$

pole powierzchni całkowitej P_c

$$\boldsymbol{P_c = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2}$$
$$\boldsymbol{P_c = 2\pi r(h + r)}$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h - wysokością walca.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

54. Stożkiem nazywamy figurę geometryczną, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta.

Prostą, wokół której obracamy trójkąt, nazywamy ***osią obrotu stożka***.

Przyprostokątna prostopadła do osi obrotu zakreśla koło, które nazywamy ***podstawą stożka***.

Przeciwprostokątna zakreśla powierzchnię ***boczną stożka***.

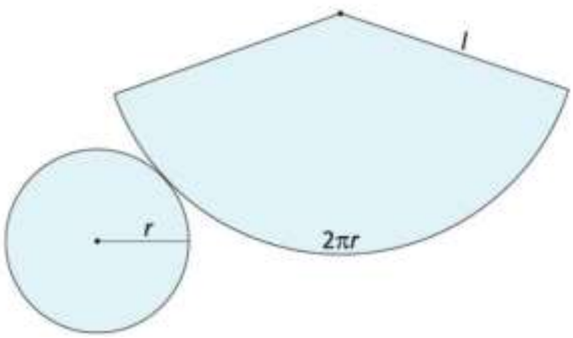
Podstawa stożka i powierzchnia boczna stożka tworzą ***powierzchnię całkowitą stożka***.

Wspólny koniec przeciwprostokątnej i przyprostokątnej zawartej w osi obrotu nazywamy ***wierzchołkiem stożka***.

Każdy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim - dowolny punkt okręgu podstawy, nazywamy ***tworzącą stożka***.

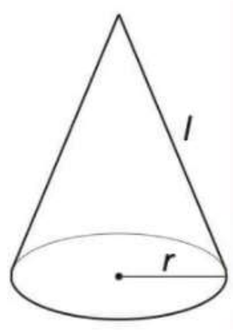
Wysokością stożka nazywamy odcinek (a także jego długość), którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim - rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

55. Rozwinięcie powierzchni stożka na płaszczyźnie



Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest wycinkiem koła.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020



56. Pole powierzchni bocznej P_b stożka wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{P_b = \pi \cdot r \cdot l}$$

pole podstawy P_p

$$\boldsymbol{P_p = \pi \cdot r^2}$$

pole powierzchni całkowitej P_c

$$\boldsymbol{P_c = \pi r l + \pi r^2}$$
$$\boldsymbol{P_c = \pi r(l + r)}$$

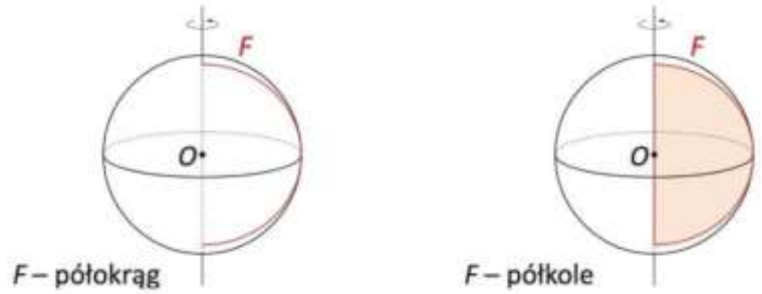
gdzie r jest promieniem podstawy stożka, I - długością tworzącej.

57. Sferą o środku w punkcie O i promieniu $r, r > 0$, nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r. Taką sferę oznaczamy $s(O, r)$.

58. Kulą o środku w punkcie O i promieniu $r, r > 0$, nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest nie większa niż r. Taką kulę oznaczamy k(O, r).

UWAGA!

Sferę i kulę można też otrzymać w wyniku obrotu pewnej figury F wokół pewnej prostej I.



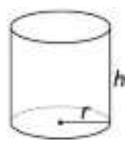
Każdy niepusty przekrój kuli (sfery) jest kołem lub punktem (okręgiem lub punktem). Jeśli płaszczyzna przekroju przechodzi przez środek kuli (sfery), to otrzymany przekrój nazywamy kołem wielkim kuli (okręgiem wielkim sfery).

59. Pole powierzchni P kuli o promieniu r wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{P = 4\pi r^2}$$

UWAGA!

Powierzchni kuli nie można rozciąć na takie części, które można by było rozłożyć na płaszczyźnie.

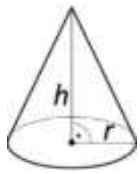


Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

***60.* Objętość *V* walca** o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem

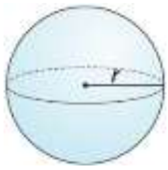
$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot h}$$

61. Objętość V stożka o wysokości h i promieniu podstawy r wyraża się wzorem



$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}$$

62. Objętość V kuli o promieniu r wyraża się wzorem



$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 8.1

Objętość sześcianu jest równa 27 cm^3.

Jaka jest suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu?

A. 18 cm

B. 36 cm

C. 24 cm

D. 12 cm

ROZWIĄZANIE: $a^3 = 27, a = 3{,}12 \cdot 3 = 36$

Zadanie 8.2

Graniastosłup ma 15 krawędzi. Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?

A. 10

B. 5

C. 15

D. 30

ROZWIĄZANIE: $3n = 15 \ \Rightarrow n = 5; 2n = 10$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.3

Stożek powstał w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 i 13 wokół krótszej przyprostokątnej. Promień podstawy tego stożka jest równy

A. 6

B. 13

C. 6,6

D. 3

Zadanie 8.4

Krawędź sześcianu ma długość 9. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

A. $\sqrt[3]{9}$

B. $9\sqrt{2}$

C. $9\sqrt{3}$

D. $9 + 9\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE: $a = 9$; $D = a\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$;

Zadanie 8.5

Kula ma objętość $V = 288\pi$. Promień r tej kuli jest równy

A. 6

B. 8

C. 9

D. 12

ROZWIĄZANIE: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi \Leftrightarrow \pi r^3 = 216\pi \Rightarrow r = 6$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.6

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to

A. $r + h = a$

B. $h - r = \frac{a}{2}$

C. $r - h = \frac{a}{2}$

D. $r^2 + h^2 = a^2$

ROZWIĄZANIE: $h = a$ i $2r = a \Rightarrow h = 2r \Rightarrow h - r = r \Rightarrow h - r = \frac{a}{2}$

Zadanie 8.7

Jeżeli ostrosłup ma 10 krawędzi, to liczba ścian bocznych jest równa

A. 5

B. 7

C. 8

D. 10

ROZWIĄZANIE: $2n = 10 \Rightarrow n = 5$

Zadanie 8.8

Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4, jest równe

A. 256π

B. 128π

C. 48π

D. 24π

ROZWIĄZANIE: $P = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 24\pi$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.9

Ostrosłup i graniastosłup mają równe pola podstaw i równe wysokości. Objętość ostrosłupa jest równa $81\sqrt{3}$. Objętość graniastosłupa jest równa

A. 27

B. $27\sqrt{3}$

C. 243

D. $243\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE: $\frac{1}{3}P_p \cdot H = 81\sqrt{3} \Rightarrow P_p \cdot H = 243\sqrt{3}$

Zadanie 8.10

Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą 8. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

A. $\frac{8^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)$

B. $8^2 \cdot \sqrt{3}$

C. $\frac{8^2\sqrt{6}}{3}$

D. $8^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)$

ROZWIĄZANIE: $P = 2 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 8^2 = 8^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)$

Zadanie 8.11

Pole podstawy graniastostupa prawidłowego czworokątnego jest równe 36 , a miara kąta nachylenia przekątnej graniastostupa do płaszczyzny jego podstawy jest równa $30°$. Wysokość tego graniastostupa jest równa

A. $3\sqrt{2}$

B. $6\sqrt{2}$

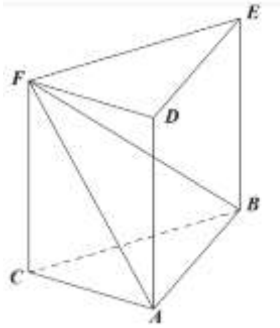
C. $2\sqrt{6}$

D. $3\sqrt{6}$

ROZWIĄZANIE: $a = 6, h = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 30° = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.12



Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 8 , a pole trójkąta ABF jest równe 52. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE:

Niech G będzie środkiem krawędzi AB. Rysujemy wysokość FG trójkąta ABF.

Pole trójkąta ABF jest równe: $P_{ABF} = \frac{|AB|\cdot|FG|}{2} = \frac{8\cdot|FG|}{2} = 4 \cdot |FG| = 52$.

Stąd $|FG| = 13$.

W trójkącie równobocznym ABC mamy $|CG| = 4\sqrt{3}$.

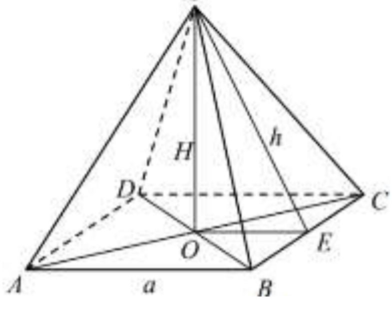
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCG do obliczenia $|CF|$: $|CF|^2 + |CG|^2 = |FG|^2$, stąd $|CF| = 11$.

Obliczamy objętość graniastosłupa: $V = \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} \cdot |CF| = \frac{64\cdot\sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$.

Zadanie 8.13

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętosc tego ostroshupa.

ROZWIĄZANIE:



Pole podstawy ostrosłupa jest równe 100 , więc $a^2 = 100$. Stąd $a = 10$.

Pole powierzchni bocznej jest równe 260, więc $4 \cdot \frac{1}{2}ah = 260$. Stąd i z poprzedniego wyniku $2 \cdot 10h = 260$, więc $h = 13$.

Ponieważ trójkąt EOS jest prostokątny, więc

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 &= h^2 \\ 5^2 + H^2 &= 13^2 \\ H^2 &= 144 \\ H &= 12 \end{aligned}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

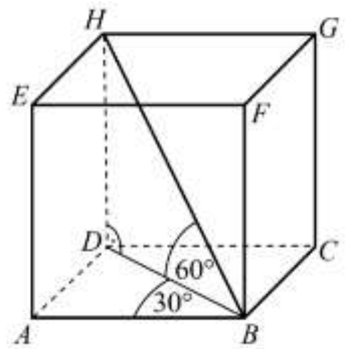
Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} P_p H = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa 400 cm^3.

Zadanie 8.14

Podstawą graniastosłupa $ABCDEFGH$ jest prostokąt $ABCD$ (zobacz rysunek), którego krótszy bok ma dlugośc 3 . Przekątna prostokąta $ABCD$ tworzy z jego dhuższym bokiem kąt $30°$. Przekątna HB graniastostupa tworzy z plaszczyzną jego podstawy kąt $60°$. Oblicz objętośc tego graniastoshupa.



ROZWIĄZANIE: Niech $|AD| = 3.$ Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym ABD wynika, że

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \operatorname{tg} 30°, \text{ stąd } |AB| = 3\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABD otrzymujemy

$$|BD| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

Pole P podstawy graniastosłupa (pole prostokąta $ABCD$) jest równe: $P = 9\sqrt{3}$.
A teraz z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym BDH otrzymujemy, że

$$\frac{|DH|}{|BD|} = \operatorname{tg} 60°, \text{ stą } |DH| = 6\sqrt{3}$$

Obliczamy zatem objętość graniastosłupa $ABCDEFGH$: $V = 9\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 162.$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.15

Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

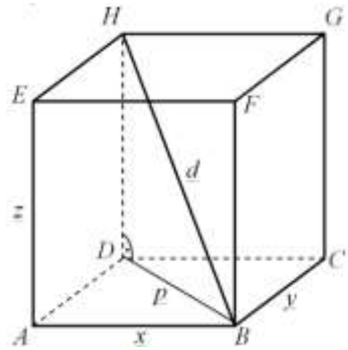
ROZWIĄZANIE:

$a\sqrt{3} = a + 2$

Odp. $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$

Zadanie 8.16

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198 . Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to $1: 2: 3$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.



ROZWIĄZANIE: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku

Pole P_c powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe $P_c = 2xy + 2xz + 2yz$. Możemy przyjąć, że $x: y: z = 1: 2: 3$. Wtedy $y = 2x$ oraz $z = 3x$. Zatem

$$P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 4x^2 + 6x^2 + 12x^2 = 22x^2$$

Ponieważ $P_c = 198$, więc otrzymujemy równanie

$22x^2 = 198$ Stąd $x^2 = 9$, więc $x = 3$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów ABD i BDH otrzymujemy

$$p^2 = x^2 + y^2 \text{ oraz } d^2 = p^2 + z^2$$

Stąd

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

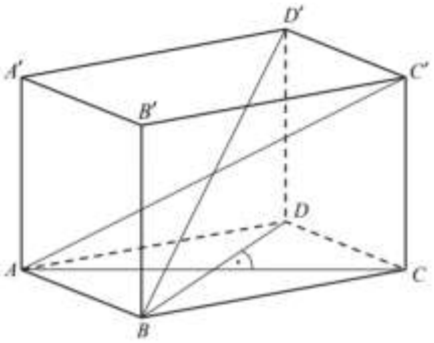
Zatem

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{14x^2} = x\sqrt{14} = 3\sqrt{14}.$$

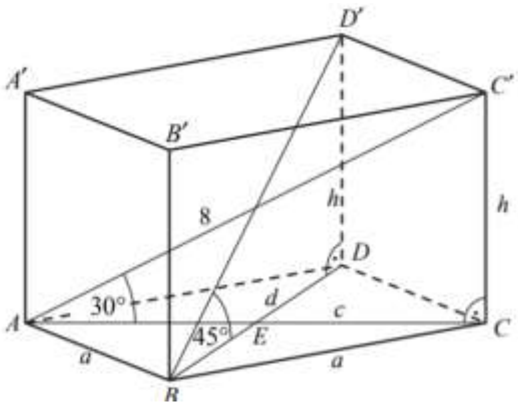
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 8.17

Podstawa graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastosłupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a przekątna BD' jest nachylona do tej plaszczyzny pod kątem $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



ROZWIĄZANIE: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej



Trójkąt prostokątny ACC' to połowa trójkąta równobocznego, więc

$|AC| = \frac{|AC'|\sqrt{3}}{2}$ oraz $|CC'| = \frac{|AC'|}{2}$ Czyli

$$c = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ oraz } h = \frac{8}{2} = 4$$

Trójkąt prostokątny BDD' to połowa kwadratu, więc $|BD| = |DD'|$, czyli

$$d = h = 4.$$

Przekątne rombu są prostopadłe i punkt ich przecięcia dzieli każdą z nich na połowy. Zatem trójkąt ABE jest prostokątny, a jego przyprostokątne mają długości

$$|AE| = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, |BE| = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2$$
$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16$$

Stąd $a = 4$.

Pole podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$$

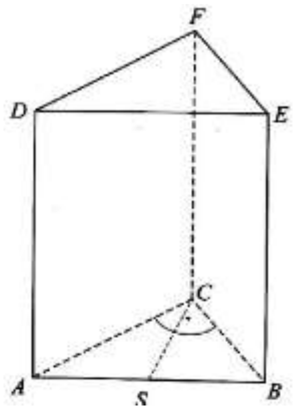
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ponieważ $a = h = 4$, więc ściana boczna jest kwadratem o polu 16 .

Zatem pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

$$P_c = 2P_{ABCD} + P_b = 2 \cdot 8\sqrt{3} + 4 \cdot 16 = 16\sqrt{3} + 64 = 16(\sqrt{3} + 4).$$

Zadanie 8.18



Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4: 3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $D\ ABC$, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastostupa jest równe 48 . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE:

$|AC| = 4x$, $|CB| = 3x$, $|AS| = |SB| = 5$

$100 = 16x^2 + 9x^2 = 25x^2,\ x = 2$

$48 = 6h,\ h = 8$

Odp. $V = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right) \cdot 8 = 192$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

IX. STATYSTYKA. KOMBINATORYKA. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Część 1. Teoria

1. Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej.
   Średnią arytmetyczną z próby liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę
   $$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \text{ którą oznaczamy } \bar{x}.$$
2. Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej, a liczby dodatnie $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wagami odpowiadającymi tym wartościom cechy.
   Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n z$ wagami odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_n$ nazywamy liczbę
   $$\frac{x_1 \cdot w_1+x_2 \cdot w_2+\dots+x_n \cdot w_n}{w_1+w_2+\dots+w_n}, \text{ którą oznaczamy } \bar{x}_w$$
3. ***Modą (lub dominantą)*** zbioru danych statystycznych nazywamy tę wartość cechy statystycznej, która w zbiorze tym występuje najczęściej. Modę oznaczamy symbolem $\boldsymbol{M_o}$ lub $\boldsymbol{D}$.
4. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będzie niemalejącym ciągiem wartości badanej cechy mierzalnej.
   Medianą nazywamy liczbę:
   $x_{\frac{n+1}{2}}$ jeśli n jest liczbą nieparzystą lub
   $\dfrac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$**,** jeśli n jest liczbą parzystą.
   Medianę oznaczamy symbolem $\boldsymbol{M_e}$.
   - Mediana M_e jest taką liczbą, dla której co najmniej połowa danych ma wartość nie większą niż M_e i co najmniej połowa danych ma wartość nie mniejszą niż M_e.
   - Mediana M_e może należeć do zbioru danych, ale także może do tego zbioru nie należeć.
5. ***Wariancją z próby*** nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów różnic pomiędzy wynikami badanej cechy a ich średnią z próby. Wariancję oznaczamy symbolem σ^2.
   $$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

6. ***Odchyleniem standardowym*** z próby nazywamy liczbę równą pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji (z próby). Odchylenie standardowe oznaczamy symbolem σ.

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} \quad lub\ \sigma = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2}}$$

7. ***Kombinatoryka***, mówiąc bardzo ogólnie, zajmuje się ustalaniem liczebności zbiorów skończonych. Mając zadanie dotyczące liczebności, tworzymy odpowiedni model matematyczny, który sprowadza rozpatrywane zadanie do wyznaczenia liczby elementów pewnego zbioru skończonego.
8. ***Reguła mnożenia***

   Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwsza decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą - na k_2 sposobów, ..., n-tą - na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ sposobów.
9. Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $\boldsymbol{n}$! ***(czyt. n silnia***) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n :

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

   Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.
10. ***Reguła dodawania*** mówi nam więc, że jeżeli mamy np. dwa interesujące nas zbiory - jeden składający się z x elementów, a drugi składający się z y elementów (i żaden element nie jest wspólny dla tych dwóch zbiorów), to chcąc wybrać pewien element z tych zbiorów możemy to zrobić na $x + y$ sposobów.
11. ***Doświadczeniem losowym*** nazywamy taki powtarzalny eksperyment, w którym konkretnego wyniku nie jesteśmy w stanie przewidzieć, znamy natomiast pełną listę możliwych wyników. Dodatkowo zakładamy, że każdy z tych wyników jest rozłączny z pozostałymi wynikami na liście. Wyniki te będziemy nazywać ***zdarzeniami elementarnymi***, a zbiór wszystkich tych zdarzeń - ***przestrzenią zdarzeń elementarnych***.

    Przestrzeń zdarzeń elementarnych oznacza się dużą grecką literą omega $(\boldsymbol{\Omega})$ $-$ $\boldsymbol{omega.}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

12. Załóżmy, że rozpatrujemy doświadczenie losowe, dla którego określiliśmy przestrzeń ***zdarzeń elementarnych Ω.***

$$\boldsymbol{\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}}$$

Wówczas dowolny podzbiór przestrzeni Ω nazywamy ***zdarzeniem (zdarzeniem losowym***). Dwa zdarzenia otrzymały specjalne określenia:

- ∅ (zbiór pusty) nazywamy zdarzeniem niemożliwy
- Ω nazywamy zdarzeniem pewnym.

13. Niech $A, B \subset \Omega$. Będziemy używać następujących określeń:

- jeśli $A = B$, to zdarzenia A i B nazywamy ***zdarzeniami identycznymi***;
- jeśli $A \subset B$, to powiemy, że ***zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B***;
- zbiór $A \cup B$ nazywamy ***sumą zdarzeń A i B***,
  zbiór $A \cap B$ nazywamy ***iloczynem zdarzeń A i B***,
  zbiór $A - B$ nazywamy ***różnicą zdarzeń A i B***;
- jeśli zbiory A i B są rozłączne (tzn. $A \cap B = \emptyset$), to zdarzenia A i B nazywamy ***zdarzeniami wykluczającymi*** się;
- jeśli dowolne dwa zdarzenia spośród zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ wykluczają się, to powiemy, że ***zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ wykluczają się parami***;
- zbiór ***$\Omega - A$ (czyli dopełnienie zbioru A do przestrzeni Ω***) nazywamy ***zdarzeniem przeciwnym*** do zdarzenia A i oznaczamy A';
- jeśli $a_1 \in A$, to powiemy, że ***zdarzenie elementarne a_1 sprzyja zdarzeniu A.***

14. Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, natomiast A jest dowolnym zdarzeniem w tej przestrzeni, to

$$(*)\ \boldsymbol{P(A) = \frac{k}{n}}$$

gdzie $P(A)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia A, n jest liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni Ω, k jest liczbą zdarzeń elementarnych tej przestrzeni sprzyjających zdarzeniu A.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Wzór (*) można też zapisać tak:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} \left(\textbf{lub } \boldsymbol{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}} \right)$$

gdzie symbol $\overline{\overline{\Omega}}$ (odpowiednio $|\Omega|$) oznacza ***liczbę elementów zbioru Ω,*** natomiast $\overline{\overline{A}}$ (odpowiednio $|A|$)oznacza ***liczbę elementów zbioru A.***

15. ***Własności prawdopodobieństwa***:

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz $A, B \subset \Omega$, to:

1) $P(\emptyset) = 0$
2) jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$
3) $P(A) \leqslant 1$
4) $P(A') = 1 - P(A)$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ wykluczają się parami, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Część 2. Przykłady zadań maturalnych (zadania zamknięte)

Zadanie 9.1

Średnia arytmetyczna sześciu liczb: $3,1,1,0,x,2$ jest równa 2. Wtedy liczba x jest równa

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

ROZWIĄZANIE: $7+x=12 \Rightarrow x=5$

Zadanie 9.2

Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych na egzaminie przez studentów I grupy, liczącej 40 studentów, jest równa 30 . Dwudziestu studentów tworzących II grupę otrzymało w sumie 1800 punktów. Zatem średni wynik z tego egzaminu, liczony łącznie dla wszystkich studentów z obu grup, jest równy

A. 20pkt

B. 30pkt

C. 50pkt

D. 60pkt

ROZWIĄZANIE: $\frac{40\cdot 30+1800}{40+20}=\frac{1200+1800}{60}=\frac{3000}{60}=50$

Zadanie 9.3

Średnia arytmetyczna liczb: $x,13,7,5,5,3,2,11$ jest równa 7 . Mediana tego zestawu liczb jest równa

A. 6

B. 7

C. 10

D. 5

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{x+46}{8}=7; x=10; 2,3,5,5,7,10,11,13;\ M_e=\frac{5+7}{2}=6$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.4

Jeżeli do zestawu czterech danych: $4,7,8,x$ dołączymy liczbę 2, to średnia arytmetyczna wzrośnie o 2. Zatem

A. $x=-51$

B. $x=-6$

C. $x=10$

D. $x=29$

ROZWIĄZANIE: $\frac{19+x}{4}+2=\frac{21+x}{5}, \frac{27+x}{4}=\frac{21+x}{5}, 135+5x=84+4x, x=-51$

Zadanie 9.5

W zestawie $\underbrace{2,2,2,\dots,2}_{m \text{ liczb}}, \underbrace{4,4,4,\dots,4}_{m \text{ liczb}}$ jest $2m$ liczb $(m \geq 1)$, w tym m liczb 2 i m liczb 4 .

Odchylenie standardowe tego zestawu liczb jest równe

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE:

$$\bar{x}\frac{m\cdot 2+m\cdot 4}{2m}=3, \quad \sigma=\frac{(2-3)^2\cdot m+(4-3)^2\cdot m}{2m}=1$$

Zadanie 9.6

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5?

A. 90

B. 100

C. 180

D. 200

ROZWIĄZANIE: $900:5=180$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.7

Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru.

Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa

A. 100

B. 99

C. 90

D. 19

ROZWIĄZANIE: $10 \cdot 9 = 90$

Zadanie 9.8

Na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród 10 zawodników?

A. 100

B. 90

C. 45

D. 20

ROZWIĄZANIE: $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$

Zadanie 9.9

Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6 i niepodzielnych przez 9?

A. 6

B. 10

C. 12

D. 15

ROZWIĄZANIE: Podzielne przez 6 $\rightarrow 90:6 = 15$,

Podzielne przez 6 i 9 $\rightarrow 90:18 = 5$, więc $15 - 5 = 10$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.10

Liczba wszystkich dodatnich liczb czterocyfrowych parzystych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 2, jest równa

A. $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3$

B. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3$

C. $8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4$

D. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$

ROZWIĄZANIE: Pierwsza cyfra - 8 możliwości. Ostatnia cyfra - 3 możliwości.

Zadanie 9.11

Jeżeli A jest zdarzeniem losowym takim, że $P(A) = 6 \cdot P(A')$, oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{7}$

D. $\frac{6}{7}$

ROZWIĄZANIE: $P(A) = 6 \cdot (1 - P(A)), P(A) = \frac{6}{7}$

Zadanie 9.12

Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że w trzecim rzucie wypadnie orzeł jest równe

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

ROZWIĄZANIE: $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.13

W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga - niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone. Wtedy

A. $p = \frac{1}{4}$

B. $p = \frac{3}{8}$

C. $p = \frac{1}{2}$

D. $p = \frac{2}{3}$

ROZWIĄZANIE: $p = \frac{2}{3}$

Cześć 3. Przykłady zadań maturalnych (zadania otwarte)

Zadanie 9.14

Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów klasy III.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	4	2

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

ROZWIĄZANIE:

Średnia arytmetyczna:

$$\frac{1\cdot 6 + 2\cdot 5 + 6\cdot 4 + 5\cdot 3 + 4\cdot 2 + 2\cdot 1}{1+2+6+5+4+2} = \frac{6+10+24+15+8+2}{20} = \frac{65}{20} = 3{,}25$$

Mediana: 3

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.15

Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{n \cdot 23 + 39}{n+1} = 24,\ 23n + 39 = 24n + 24,\ n = 15$$

Odp. Było 15 studentów.

Zadanie 9.16

Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jes dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

ROZWIĄZANIE: Liczby są postaci: edcba.

Cyfrę 7 możemy postawić na $\binom{5}{1} = 5$ sposobów.

Cyfrę parzystą można postawić na $\binom{4}{1} = 4$ sposoby.

Ponieważ są cztery cyfry parzyste {2,4,6,8}, więc mamy 16 możliwości dla tych cyfr.

Na pozostałych pozycjach stawiamy cyfry nieparzyste {1,3,5,9}. Możemy to zrobić na $4^3 = 64$ sposobów.

Odp. $5 \cdot 16 \cdot 64 = 5120$.

Zadanie 9.17

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a,b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a,b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

ROZWIĄZANIE: Wszystkich par jest $15 \cdot 14 = 210$

Par, w których iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą jest: $8 \cdot 7 = 56$. Odp. $210 - 56 = 154$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.18

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

ROZWIĄZNIE: $|\Omega| = 36, A = \{2 \cdot 6,4 \cdot 3,4 \cdot 6,6 \cdot 2,6 \cdot 4,6 \cdot 6\}$ Odp. $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Zadanie 9.19

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 1 mniejsza od liczby oczek w drugim rzucie.

ROZWIĄZANIE:

$|\Omega| = 36, A = \{1 < 2,2 < 3,3 < 4,4 < 5,5 < 6\}$.

Odp. $P(A) = \frac{5}{36}$

Zadani 9.20

Dane są dwa pudełka: czerwone i niebieskie. W każdym z tych pudełek znajduje się 10kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy od numeru kuli wylosowanej z niebieskiego pudełka.

ROZWIĄZANIE:

A - numery wylosowanych kul są takie same.
B - numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy od numeru drugiej kuli.
C - numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest większy od numeru drugiej kuli.
$P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, $P(B) = P(C)$ $1 = \frac{1}{10} + P(B) + P(C)$, $\frac{9}{10} = 2P(B)$

Odp. $P(B) = \frac{9}{20}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.21

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych: $K = \{-4, -1,1,5,6\}$ i $L = \{-3, -2,2,3,4\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

ROZWIĄZANIE: $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$

Niech a oznacza liczbę wylosowanę z K, b liczbę wylosowaną z L.

$$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}. \text{ Zatem } |A| = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$$

Odp. $P(A) = \frac{13}{25}$

Zadanie 9.22

Zbiór M tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe w zapisie, których występują dwie różne cyfry spośród: 1,2,3,4,5. Ze zbioru M losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

ROZWIĄZANIE:

$$M = \begin{Bmatrix} 12,13,14,15 \\ 21, \mathbf{23}, \mathbf{24}, \mathbf{25} \\ 31,32, \mathbf{34}, \mathbf{35} \\ 41,42,43, \mathbf{45} \\ 51,52,53,54 \end{Bmatrix}$$

Odp. $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

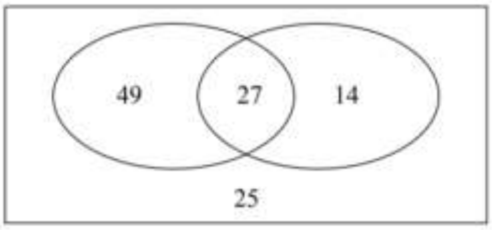
Zadanie 9.23

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

ROZWIĄZANIE:



Oznaczmy:
C - zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego biletu.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 115$.
Liczba wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet jest równa $49 + 27 + 14 = 90$
Zatem $|C| = 115 - 90 = 25$
Stąd $P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$.
Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe $\frac{5}{23}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.24

Dane są dwa zbiory:

$$A = \{100,200,300,400,500,600,700\} \text{ i } B = \{10,11,12,13,14,15,16\}$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Obliczone prawdopodobieństwo zapisz w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

ROZWIAZANIE:

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x, y), gdzie $x \in A$ i $y \in B$. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \quad & (100,10),(100,11),(100,12),(100,13),(100,14),(100,15),(100,16)\\ & (200,10),(200,11),(200,12),(200,13),(200,14),(200,15),(200,16)\\ & (300,10),(300,11),(300,12),(300,13),(300,14),(300,15),(300,16)\\ & (400,10),(400,11),(400,12),(400,13),(400,14),(400,15),(400,16)\\ & (500,10),(500,11),(500,12),(500,13),(500,14),(500,15),(500,16)\\ & (600,10),(600,11),(600,12),(600,13),(600,14),(600,15),(600,16)\\ & (700,10),(700,11),(700,12),(700,13),(700,14),(700,15),(700,16)\}\end{aligned}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Z cechy podzielności liczby całkowitej przez 3 wynika, że suma cyfr otrzymanej liczby $x + y$ musi być podzielna przez 3 . Zbiór A ma postać:

$$\begin{aligned}A = \{ \quad & (100,11),(100,14),(200,10),(200,13),(200,16)\\ & (300,12),(300,15),(400,11),(400,14),(500,10)\\ & (500,13),(500,16),(600,12),(600,15),(700,11),(700,14)\}\end{aligned}$$

Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 16$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$$

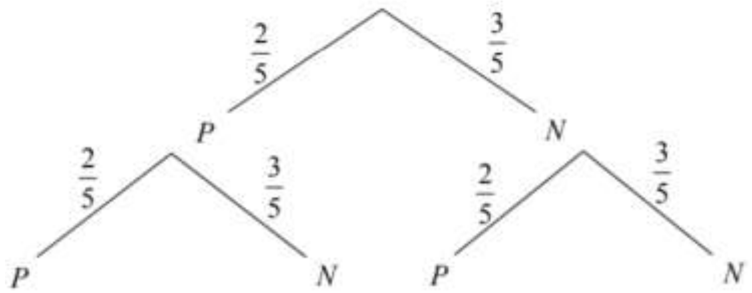
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3 , jest równe $\frac{16}{49}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadanie 9.25

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1,3,5,7,9\}$, i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0,2,4,6,8\}$.

ROZWIĄZANIE: P - oznacza liczbę parzystą, N - nieparzystą.



Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest nieparzysty, jeśli obie liczby są nieparzyste. W rozważanym doświadczeniu, by zaszło interesujące nas zdarzenie, musimy wylosować dwie liczby nieparzyste. Do wyznaczenia poszukiwanego prawdopodobieństwa wystarczy zatem wymnożyć liczby z gałęzi narysowanego drzewa, odpowiadające sytuacji: $N - N$.

Czyli $P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

ŹRÓDŁO:

1. *https://cke.gov.pl/egzamin-maturalny/egzamin-w-starej-formule/arkusze/*
2. *https://arkusze.pl/matematyka-matura-poziom-podstawowy/*
3. Podręcznik do liceum i technikum klasa 1 (zakres podstawowy)
   - wydawnictwo *Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro;*
4. Podręcznik do liceum i technikum klasa 2 (zakres podstawowy)
   - wydawnictwo *Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro;*
5. Podręcznik do liceum i technikum klasa 3 (zakres podstawowy)
   - wydawnictwo *Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro;*
6. Wiedza własna.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020