Fundusze Europejskie
Program Regionalny

SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Zajęcia dodatkowe dla uczniów **Szkoły Podstawowej nr 3 im. Adama Mickiewicza w Szamotułach**

Tytuł zajęć

„Matematyka da się lubić”-zajęcia wyrównawcze

Autor/Autorzy opracowania
Iwona Błoch
……………………………

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:
„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki*
w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych
Metropolii Poznań”

Poznań 2022

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Obliczanie wartości wyrażeń	2
2.	Równania w zadaniach	2
3.	Potęgi i pierwiastki	1
4.	Zdarzenia losowe	1
5.	Działania na liczbach rzeczywistych	2
6.	Potęgi i pierwiastki w zadaniach	3
7.	Równanie w zadaniach tekstowych	7
8.	Kąty w trójkątach. Własności	2
9.	Twierdzenie Pitagorasa	2
10.	Zastosowanie Twierdzenia Pitagorasa	2
11.	Trójkąty o kątach 30, 60	3
12.	Rozwiązywanie arkusza egzaminacyjnego	3
Łączna liczba godzin		30

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Obliczanie wartości wyrażeń.

Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym w miejsce liter wstawimy dane liczby i wykonamy wskazane działania, to otrzymamy wartość liczbową tego wyrażenia.

Zapamiętaj!

- Aby obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego, należy w miejsce zmiennych podstawić podane liczby i wykonać wskazane działania.
- Jeżeli wyrażenie algebraiczne zapisane jest w postaci ułamka, to nie można w miejsce zmiennych podstawić takich liczb, dla których mianownik tego wyrażenia byłby równy 0. Mówimy wtedy, że wyrażenie nie jest określone dla tych liczb.

Przykład 1.

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3x^2 - 2x + 1$ dla $x = 5$.

Rozwiązanie:

Do wyrażenia algebraicznego

$$3x^2 - 2x + 1$$

podstawiamy w miejsce x-a liczbę 5:

$$3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = 3 \cdot 25 - 10 + 1 = 66$$

Zatem dla $x = 5$ wyrażenie $3x^2 - 2x + 1$ przyjmuje wartość 66.

Przykład 2.

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $-x^3 - (x+1)^2$ dla $x = 4$.

Rozwiązanie:

Do wyrażenia algebraicznego

$$-x^3 - (x+1)^2$$

podstawiamy w miejsce x-a liczbę 4:

$$-4^3 - (4+1)^2 = -64 - 25 = -89$$

Zatem dla $x = 4$ wyrażenie $-x^3 - (x+1)^2$ przyjmuje wartość -89.

Zadania.1

Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażania.

a) $5x - 3(4 - 2x)$ dla $x = -2$

b) $2x(x-3) - (x-4)(x+2)$ dla $x = 5$

c) $(x-3)(x+2)(x-7)$ dla $x = -3$

d) $4x^2 - x(x+3) - 5x$ dla $x = \frac{1}{3}$

Zadanie 2

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażania.

a) $(2x+y)(3y-5x)-4x(x-y)$ dla $x=1,\ y=-2$
b) $a(a-3b)+2ab-b^2(2-b)$ dla $a=2,\ b=-3$
c) $\dfrac{(2p-3k)(k-4p)-2k^2}{3p(4-k)-5k(p+3)}$ dla $p=-2,\ k=-4$
d) $(a+1)(b+2)+(b+3)(c+4)+(a+5)(c+6)$ dla $a=1,\ b=2,\ c=3$

Zadanie 3

Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

1. $2x^2y$ dla $x=2,\ \mathrm{y}=-1$

2. -3 prg dla $p=-2, r=\frac{1}{4}, g=3$

3. $2a^2b^3c^3$ dla $a=-3, b=-1, c=\frac{1}{2}$

4. $-\frac{1}{3}tv^2pq^2$ dla $t=-9, v=-\frac{1}{2}, p=-3, q=-\frac{2}{3}$

Zadanie 4

Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

1. $\left(\frac{1}{a}+3a\right)\bullet\frac{2}{3}$ dla $a=-2$

2. $\left(-3x^2yz^3\right)^2$ dla $x=\frac{1}{3}y=-1, z=2$

3. $2b^2-3d+5e^3$ dla $b=-1, d=-\frac{2}{5}$, $e=-\frac{1}{2}$

4. $\left(v+\frac{2}{v}\right)\left(-v^2+1\right)$ dla $v=-\frac{1}{2}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Równania w zadaniach tekstowych

Etapy rozwiązywania zadań tekstowych

Niektóre zadania tekstowe można rozwiązać zarówno arytmetycznie, wykonując różne działania, jak i za pomocą równań. Są także takie zadania, które najprościej rozwiązuje się układając i rozwiązując odpowiednie równanie. Po przeczytaniu zadania nie zawsze od razu wiemy, jak je rozwiązać, dlatego ważny jest zapis danych i kolejnych etapów rozwiązania.
Jeżeli zadanie tekstowe rozwiązujemy za pomocą równania, to trzeba zwrócić szczególną uwagę na poprawny zapis rozwiązania. Najlepiej jest wtedy stosować się do pewnego schematu i po uważnym przeczytaniu treści pokonywać kolejne **etapy rozwiązywania zadania**:

1. Ustal niewiadomą w zadaniu, oznacz ją dowolną literą, np. x
2. Wykorzystaj dane z zadania i niewiadomą, zapisuj i opisuj różne wyrażenia algebraiczne aż pojawią się dwa oznaczające to samo.
3. Ułóż równanie opisujące sytuację z zadania.
4. Rozwiąż równanie.
5. Sprawdź z warunkami zadania, czy rozwiązanie jest poprawne.
6. Sformułuj odpowiedź do zadania.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2. Rozwiąż równanie.

a) $x + 7 = 13$
b) $6 + x = -2$
c) $x - 4 = 17$
d) $-3 + x = -8$
e) $4x = 36$
f) $-3x = 24$
g) $x : 5 = 7$
h) $\frac{x}{-9} = -2$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x + 1{,}3 = 2{,}7$
b) $\frac{5}{6} + x = \frac{1}{3}$
c) $x - 2{,}7 = -1{,}4$
d) $-\frac{3}{5} + x = -2\frac{2}{5}$
e) $-1{,}2x = -24$
f) $\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{8}$
g) $x : 0{,}5 = -4{,}6$
h) $\frac{x}{\frac{5}{3}} = -2\frac{1}{4}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $2x + 3 = 15$
b) $5x + 13 = 23$
c) $3x - 11 = 25$
d) $4x - 7 = 33$
e) $-x + 2 = 8$
f) $-x + 5 = -2$
g) $-x - 8 = -3$
h) $-x - 2 = -11$
i) $-5x + 3 = -12$
j) $-3x + 5 = 17$
k) $-2x - 7 = 11$
l) $-6x - 3 = -15$

5. Rozwiąż równanie.

a) $2(x + 3) = 10$
b) $3(x - 1) + 2 = 8$
c) $2(13 - x) - 9 = 1$
d) $3(1 - x) + 2 = -7$
e) $5 - 2(x + 2) = 9$
f) $-2 - (4 - 3x) = -7$
g) $9 = 5 - 4(2x - 5)$
h) $0 = 6 - 3(5 + 2x)$
i) $-1 = -4 + 2(1 - 5x)$

6. Rozwiąż równanie.

a) $2(3x - 4) = 10x$
b) $-4x = 3(6 - 2x)$
c) $4 - 3x = 5(2 - x)$
d) $-3x + 6 = 3(2 - x)$
e) $6(x + 4) = 5x + 1 + x$
f) $-2(5x + 2) = 3 - 9x$
g) $5 - (3 - 4x) = 5(1 - x)$
h) $-2(4 - 5x) = 3(4x + 3)$
i) $3 - 3(x + 1) = -(4x + 1)$

7. Rozwiąż równanie.

a) $3(x + 3) = 2(x + 4) + x + 1$
b) $2x - 4 - 3(2 - x) = 5(2x - 1)$
c) $5(x + 4) - (2x - 3) = 2(1 - 2x)$
d) $4(x - 2) - 2(x - 4) = 5(x + 1) - 3x$
e) $6x - (4x + 5) = 2(x - 2) - 1$
f) $4(3x + 2) + 5(2x + 3) = -(2x + 13)$

Zadania tekstowe

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadania tekstowe

1. Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 147. Znajdź te liczby.

2. Suma czterech liczb wynosi 88. Druga liczba jest o 40% większa od pierwszej, ale trzy razy mniejsza od trzeciej. Czwarta liczba jest średnią arytmetyczną pierwszych trzech liczb. Co to za liczby?

3. Kasia marynuje ogórki. Ile musi wziąć litrów octu 10%, aby po dodaniu wody otrzymać 4 l zalewy 2%?

4. Basen o objętości 495 m^3 napełniają trzy krany. Przez pierwszy kran wpływa 400 l wody w ciągu 2 minut, przez drugi 660 l wody w 3 minuty, a przez trzeci 960 l w ciągu 4 minut. Po ilu godzinach basen zostanie całkowicie wypełniony wodą?

5. Różnica dwóch liczb wynosi 5. Znajdź te liczby, jeżeli różnica kwadratów pierwszej liczby zmniejszonej o 2 i drugiej liczby wynosi 21.

6. Ojciec podzielił ziemię dla trzech synów. Pierwszemu dał $\frac{1}{3}$ majątku i 1 ha, drugiemu $\frac{3}{7}$ reszty i 1 ha, a trzeciemu $\frac{2}{3}$ tego co zostało i dodał ostatni hektar. Ile hektarów ziemi otrzymał każdy z synów i jak duży był majątek?

7. Cenę materiału podwyższono o 30%. Po miesiącu nową cenę obniżono o 30%. O ile procent cena końcowa jest mniejsza od ceny początkowej?

8. Karol wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Po pierwszym półroczu dopisano mu 20% odsetek, a po drugim kolejne 20%. Czy korzystniej zrobiłby wpłacając tę kwotę na jeden rok na 21%?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

9. Cyfra dziesiątek liczby dwucyfrowej jest o 5 większa od cyfry jedności. Jeżeli przestawimy te cyfry i wstawimy między nie „0", to otrzymamy liczbę trzycyfrową o 135 większą od dwucyfrowej. Jaka liczba dwucyfrowa spełnia te warunki?

* **10.** Dwaj robotnicy wykonywali wspólnie pewną pracę. Pierwszy z nich, pracując samodzielnie, wykonałby tę pracę w czasie 4 razy dłuższym, a drugi o 5 dni dłuższym. Ile dni pracowali razem?

* **11.** Ojciec i jego dwóch synów mają razem 64 lata. Przed 4 laty starszy syn był trzy razy młodszy od ojca, a trzy razy starszy od młodszego brata. Ile lat ma każdy z nich obecnie?

12. Matka i córka mają obecnie razem 48 lat. 4 lata temu matka była 3 razy starsza od córki. Ile lat ma obecnie matka, a ile córka?

13. Zosia jest dwa razy młodsza od Marysi. Za 5 lat Zosia będzie miała tyle lat, ile Marysia ma teraz. Ile lat ma każda z dziewcząt?

* **14.** Ewelina ma 36 lat. Ma ona dwa razy więcej lat, niż Basia miała wtedy, gdy Ewelina miała tyle lat, ile Basia ma teraz. Ile lat ma Basia?

15. Kinga jest o 5 lat młodsza od Agnieszki. Ile lat ma obecnie każda z dziewcząt, jeżeli 5 lat temu Agnieszka była dwa razy starsza od Kingi? Za ile lat będą miały razem 43 lata?

16. Zakupiono 10 kg czereśni dwóch gatunków: tańszych po 6 zł i droższych po 9 zł za 1 kg, przy czym każdego gatunku kupiono za taką samą kwotę. Ile kupiono kilogramów czereśni tańszych, a ile droższych?

17. Na jaki procent klient wpłacił do banku kwotę 21 500 zł, jeśli po 3 miesiącach mógł wypłacić 22 145 zł?

18. Na jaki okres klient wpłacił do banku kwotę 1500 zł, jeśli oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 16%, a kwota, którą wypłacił wynosi 1680 zł?

19. Ile pieniędzy wpłacił klient do banku, jeśli po 6 miesiącach wypłacono mu odsetki w kwocie 1500 zł? Kapitalizacja odsetek następuje po 6 miesiącach i oprocentowanie roczne wynosi 7,5%.

20. Cenę pewnego samochodu w promocyjnej sprzedaży obniżono o 10%. Po miesiącu cena samochodu wzrosła o 15%. Po obu zmianach samochód kosztował 26 289 zł. Ile kosztował samochód przed promocją? O ile procent podwyższono w efekcie cenę początkową?

21. W ciągu roku cenę pewnego telewizora obniżono trzykrotnie po 10%. Jaka była początkowa cena, jeśli obecna wynosi 729 zł?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

22. Do uzyskania szkła potrzeba potasu, piasku i kredy odpowiednio w stosunku 2,5 : 7,75 : 0,5. Ile kilogramów każdego ze składników należy wziąć, aby wyprodukować 430 kg szkła?

23. Węgiel, wodór i tlen w tłuszczu pozostają w stosunku 19 : 3 : 3. Ile węgla, wodoru i tlenu znajduje się w $37\frac{1}{2}$ kg tłuszczu?

24. Garnek wykonany jest ze stopu miedzi i cyny pozostających w stosunku 5 : 7. Wzięta do wyrobu cyna waży o 0,4 kg więcej niż miedź. Ile kilogramów każdego z metali zużyto na wykonanie garnka? Ile waży garnek?

25. Tata i mama zarabiają razem 4800 zł. Kwota ta jest ich miesięcznym budżetem rodzinnym. Córka Kasia zwiększając budżet domowy pożyczyła rodzicom $33\frac{1}{3}\%$ swoich oszczędności, czyli 200 zł. Ile zaoszczędzonych pieniędzy miała Kasia? O ile procent został przekroczony miesięczny budżet rodzinny dzięki pożyczce Kasi?

26. Za trzy albumy zapłacono 150 zł. Wartość drugiego albumu stanowi 40% wartości pierwszego, zaś za trzeci album zapłacono 160% wartości pierwszego. Ile kosztował każdy z tych albumów?

27. Ile litrów mleka chudego o 2% zawartości tłuszczu i ile litrów mleka tłustego o 3,5% zawartości tłuszczu należy zmieszać, aby otrzymać 2l mleka o 3% zawartości tłuszczu?

28. Ile litrów octu o stężeniu 10% i ile litrów wody należy zmieszać, aby otrzymać 2l octu o stężeniu 6%?

***29.** Basen napełniany jest w ciągu 5 godzin, a opróżniany w ciągu 4 godzin. Po jakim czasie pełny basen zostanie opróżniony przy obu przepływach otwartych?

***30.** Jeden kran napełni basen w ciągu 3 godzin, drugi kran w ciągu 4 godzin. Po jakim czasie basen zostanie napełniony, jeśli odkręcimy dwa krany jednocześnie?

***31.** Jednego dnia kolarz przejechał pewną drogę w ciągu 50 minut. Następnego dnia zwiększył prędkość o 1 km/h i w ciągu 1 godziny i 10 minut przejechał o 5 km więcej. Z jaką prędkością jechał kolarz drugiego dnia?

***32.** Pan Grzegorz codziennie dojeżdża do pracy samochodem z prędkością 50 km/h. Pewnego dnia zaspał i wyjechał później niż zwykle. W połowie drogi zorientował się, że nie zdąży na czas i zwiększył prędkość o 10 km/h, dzięki czemu nie spóźnił się do pracy. Z jaką średnią prędkością tego dnia jechał pan Grzegorz?

33. W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 1 większa od cyfry jedności. Jeśli w tej liczbie przestawimy cyfry, to otrzymana liczba będzie o 9 mniejsza od danej. Znajdź tę liczbę.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Działania na liczbach rzeczywistych.

Cyfry i liczby

Liczby to np. 34, 3170, $34{,}7$, $2\frac{1}{3}$, -10. Cyfr jest tylko 10.

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

Liczby składają się z cyfr.

$$3790$$

cyfra: tysięcy setek dziesiątek jedności

Zbiory liczbowe

Liczby naturalne: $\mathbf{N}$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Liczby całkowite: $\mathbf{Z}$
$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$

Liczby wymierne: $\mathbf{Q}$
Przykłady: $0, 5, -4, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 4\frac{1}{5}$

Liczby niewymierne: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$
Przykłady: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, 1-\sqrt{7}$

Liczby rzeczywiste: $\mathbf{R}$
Liczby rzeczywiste to liczby wymierne i niewymierne.

W starej podstawie programowej stosowano też oznaczenia: $\mathbf{C}$ – liczby całkowite, $\mathbf{W}$ – liczby wymierne, $\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}$ lub $\mathbf{NW}$ – liczby niewymierne.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Dzielniki liczb naturalnych

Liczba 3 jest dzielnikiem 12, ponieważ 12 podzielone przez 3 daje w wyniku liczbę naturalną 4.

$$12 : 3 = 4 \qquad \text{bo} \quad 4 \cdot 3 = 12$$

Liczba	Jej dzielniki
1	1
4	1, 2, 4
5	1, 5
8	1, 2, 4, 8
16	1, 2, 4, 8, 16
17	1, 17
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
100	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Zero ma nieskończenie wiele dzielników naturalnych $1, 2, 3, \ldots$

Zero nie jest dzielnikiem żadnej liczby naturalnej. Nie wolno dzielić przez zero.

Liczby naturalne podzielne na 2 to liczby parzyste

$$0, \ 2, \ 4, \ 6, \ 8, \ 10, \ \ldots$$

a pozostałe to liczby nieparzyste

$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9, \ 11, \ \ldots$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Każda liczba naturalna większa od 1 jest liczbą pierwszą albo liczbą złożoną.

2	– liczba pierwsza	$6 = 2 \cdot 3$	– liczba złożona
3	– liczba pierwsza	7	– liczba pierwsza
$4 = 2 \cdot 2$	– liczba złożona	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	– liczba złożona
5	– liczba pierwsza	$9 = 3 \cdot 3$	– liczba złożona

Rozkład liczby złożonej na czynniki pierwsze oznacza zapisanie jej jako iloczynu liczb pierwszych.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1365 & 3 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ lub $12 = 2^2 \cdot 3$

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ lub $40 = 2^3 \cdot 5$

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ lub $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

Liczby rozkładamy na czynniki pierwsze przy znajdywaniu NWD i NWW.

Największy wspólny dzielnik

Największy wspólny dzielnik liczb a i b, w skrócie NWD, to największa liczba naturalna, która dzieli a i b.

Przykłady:

$\mathrm{NWD}(20, 30) = 10$ – liczba 10 jest największą liczbą, która dzieli jednocześnie 20 i 30.

$\mathrm{NWD}(45, 60) = 15$ – liczba 15 jest największą liczbą, która dzieli jednocześnie 45 i 60.

W powyższych przykładach łatwo było podać największy wspólny dzielnik. W trudniejszych przypadkach znajdujemy go tak:

1. rozkładamy liczby na czynniki pierwsze,
2. zakreślamy wspólne dzielniki,
3. mnożymy zakreślone dzielniki.

Przykłady:

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2310 & 2 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$\mathrm{NWD}(280, 150) = 2 \cdot 5 = 10$

$\mathrm{NWD}(525, 2310) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Najmniejsza wspólna wielokrotność

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b, w skrócie NWW, to najmniejsza liczba naturalna dodatnia, która jest podzielna przez a i b.

Przykłady:

$\mathrm{NWW}(20, 30) = 60$ – liczba 60 jest najmniejszą liczbą podzielną przez 20 i 30.

$\mathrm{NWW}(45, 60) = 180$ – liczba 180 jest najmniejszą liczbą podzielną przez 45 i 60.

W powyższych przykładach łatwo było podać największy wspólny dzielnik. W trudniejszych przypadkach znajdujemy go tak:

1. rozkładamy liczby na czynniki pierwsze,
2. zakreślamy wspólne dzielniki,
3. mnożymy pierwszą liczbę przez niezakreślone dzielniki drugiej liczby.

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2310 & 2 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$\mathrm{NWW}(280, 150) = 280 \cdot 3 \cdot 5 = 4200$ $\qquad$ $\mathrm{NWW}(525, 2310) = 525 \cdot 2 \cdot 11 = 11550$

Liczba odwrotna i przeciwna

Liczbą odwrotną do a jest $\frac{1}{a}$.

Przykłady:

$$2 \text{ i } \frac{1}{2} \qquad 3 \text{ i } \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{5} \text{ i } 5 \qquad \frac{3}{4} \text{ i } \frac{4}{3} \qquad 1\frac{2}{5} \text{ i } \frac{5}{7} \qquad -3\frac{2}{7} \text{ i } -\frac{7}{23}$$

Liczbą przeciwną do a jest $-a$.

Przykłady:

$$2 \text{ i } -2 \qquad 3 \text{ i } -3 \qquad -4 \text{ i } 4 \qquad -1\frac{1}{2} \text{ i } 1\frac{1}{2}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Kolejność wykonywania działań

1. Działania w nawiasach.
2. Potęgowanie i pierwiastkowanie.
3. Mnożenie i dzielenie.
3a. Jak mamy ciąg mnożeń i dzieleń, to wykonujemy je po kolei od lewa do prawa.
4. Dodawanie i odejmowanie.
4a. Jak mamy ciąg dodawań i odejmowań, to wykonujemy je po kolei od lewa do prawa.

Przykłady:

Po kolei:

$18 - 4 + 12 - 5 - 7 + 1 = 14 + 12 - 5 - 7 + 1 = 26 - 5 - 7 + 1 = 21 - 7 + 1 = 14 + 1 = 15$

$12 \cdot 2 : 3 \cdot 5 : 10 : 4 = 24 : 3 \cdot 5 : 10 : 4 = 8 \cdot 5 : 10 : 4 = 40 : 10 : 4 = 4 : 4 = 1$

Najpierw mnożenie lub dzielenie:

$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$

$9 + 6 : 2 = 9 + 3 = 12$

$17 - 3 \cdot 2 + 8 = 17 - 6 + 8 = 11 + 8 = 19$

$20 : 4 + 12 : 6 - 6 \cdot 2 + 40 : 10 = 5 + 2 - 12 + 4 = 7 - 12 + 4 = -5 + 4 = -1$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Usuwanie niewymierności z mianownika

Niewymierność w mianowniku to liczba niewymierna. Najczęściej jest to pierwiastek, np.:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \frac{5}{7\sqrt{7}} \qquad \frac{3}{4+\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Niewymierność z mianownika usuwamy na dwa sposoby:

1. Mnożymy przez pierwiastek w mianowniku, np.:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{5}{7\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{7\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

2. Jeżeli w mianowniku jest suma lub różnica, to powyższy sposób nie sprawdzi się. W przypadku ta mianowników korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{lub} \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{3}{4+\sqrt{2}} \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{3(4-\sqrt{2})}{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{12-3\sqrt{2}}{16-2} = \frac{12-3\sqrt{2}}{14}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{21}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{21}}{5-3} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{21}}{2}$$

Zauważ, że mnożymy tylko przez 1. Pamiętaj, aby w liczniku i mianowniku było to samo.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \qquad \frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = 1 \qquad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 1$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Wzory na potęgi

Wzory:	Przykłady:		
$a^0 = 1$	$2^0 = 1$	$5^0 = 1$	$(-3)^0 = 1$
$a^1 = a$	$2^1 = 2$	$5^1 = 5$	$(-3)^1 = -3$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-4} = \frac{1}{5^4}$	$(-3)^{-8} = \frac{1}{(-3)^8}$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3$	$\left(-\frac{10}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{10}\right)^2$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$	$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$	
$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$	$4^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$	
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$	$3^4 \cdot 3^{-3} = 3^{4+(-3)} = 3^1 = 3$	
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$	$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	
$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$	$\left(3^{2\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{2\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^5 = 243$	
$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$		

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Wzory na pierwiastki

Wzory:	Przykłady:		
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$	
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = 4^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[5]{7^4} = 7^{\frac{4}{5}}$	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{12}$	$\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{7}} = \sqrt[6]{\frac{3}{7}}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[5]{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{10}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$	

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1. Oblicz

e) $[-(-0{,}8)] + (-0{,}4) - \left(-\frac{2}{5}\right) - 9{,}2 + \frac{4}{5}$

f) $(-2{,}5) - \left(-\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{12} - \left(-\frac{3}{4}\right) - (-2{,}25)$

g) $\left(-\frac{1}{4}\right) - \left[-\left(-\frac{3}{4}\right)\right] + \frac{7}{8} - (-5{,}4)$

h) $[-(-4{,}05)] - [-(-6{,}45)] + \left(-\frac{4}{5}\right) + [-(-3{,}2)]$

2. Oblicz:

a) $1\frac{4}{5} : (-0{,}2) \cdot 0{,}3$

b) $5{,}2 - \frac{1}{5} \cdot (-0{,}5)$

c) $-3{,}6 : \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 5$

d) $-0{,}6 \cdot 3\frac{1}{2} + 4{,}2 \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right)$

e) $\left(\frac{1}{3} - 0{,}5\right) : (-0{,}75)$

f) $(-1{,}2) : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} \cdot 0{,}3$

g) $-6 + 6 \cdot \left(1{,}5 - 2\frac{1}{2}\right)$

h) $-2{,}4 \cdot \frac{3}{7} - 4{,}6 \cdot \frac{3}{7}$

3. Oblicz najprostszym sposobem:

a) $-\frac{1}{2} \cdot 0{,}9 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}6$

b) $\frac{1}{8} \cdot 3{,}75 + 2{,}65 \cdot 0{,}125 + 1\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8}$

c) $0{,}18 : \frac{6}{8} + 0{,}12 : 0{,}75 + 2{,}5 : 0{,}75 - 0{,}75 + \frac{1}{2} : \frac{9}{12}$

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot 4{,}4 - \frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{4} - \frac{1}{3} \cdot 0{,}7$

4. Wykonaj następujące obliczenia:

a) $[(-2) \cdot (-3) + (-5)] \cdot (-32) + (-4) \cdot \left[1 - \left(-\frac{10}{2}\right) \cdot (-2)\right]$

b) $(-2{,}4) \cdot \left[(-0{,}75) \cdot \frac{8}{9} - \frac{1}{6} \cdot (-1{,}5)\right] - (-4{,}8) : (-1{,}6)$

c) $\dfrac{8 - [(-5) \cdot (-3) - 12] \cdot [2 + (-6) \cdot 3]}{(-12) : [-5 - (-2)] \cdot (-1)}$

d) $\dfrac{(-2) : (-5) - \left(-\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{3}{25}\right)}{\left[0{,}75 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + (-0{,}12) \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{7}{9}}$

e) $10\frac{2}{5} - \left\{4\frac{3}{4} - (-0{,}625) \cdot \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-0{,}16) - 0{,}84\right]\right\}$

f) $\dfrac{12 : (-2) \cdot [3 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-5)] - \sqrt{625}}{(-4) \cdot \sqrt{25} - (-3)\sqrt{49}} + (-15) : \sqrt[3]{27}$

g) $\left\{\dfrac{(-4{,}5) \cdot \sqrt{\frac{25}{81}} + \left(-6\frac{2}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{64}}}{\left[\left(-\sqrt{\frac{16}{25}}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) - 3{,}3\right] : \sqrt{0{,}09}} + \sqrt{6{,}25}\right\} : \left(-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

5. Wykonaj opisane działania i podaj ich wynik:

a) sumę liczb $164\frac{4}{5}$ i 78,2 podziel przez 1,62;

b) sumę liczb 24,96 i $25\frac{3}{5}$ podziel przez różnicę tych liczb;

c) oblicz iloczyn różnicy liczb 12,1 i $4\frac{3}{10}$ i ilorazu liczb 19 i $4\frac{3}{4}$;

d) iloraz z dzielenia liczby 23 przez 1,15 zwiększ 7,8 raza;

e) liczbę 1,85 zmniejsz o iloraz z dzielenia liczb 1,7 i $6\frac{4}{5}$.

6. Rozwiąż równanie w możliwie najprostszy sposób:

a) $\frac{5}{7} : \left(x - 0{,}125 \cdot 3\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{7}$

b) $\left(2\frac{1}{2} : 0{,}5 \cdot 3{,}8 - a\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}6 + 0{,}9 : \frac{3}{4}\right) = 0$

c) $\left(8\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot 0{,}75 + 0{,}25\right) \cdot z = 0$

d) $\left(y + 1\frac{4}{5}\right) : \left(6\frac{1}{4} - 2{,}1 : 8\frac{2}{5}\right) = 1$

7. Znajdź liczbę, której 75% jest równe wartości wyrażenia:

$$\left[\frac{1}{2^3} + (0{,}5)^2 : \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt{16}}\right] \cdot \left[\sqrt{1\frac{24}{15}} - (-1{,}6)\right].$$

8. Oblicz 54% liczby:

$$\left|\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - 3\frac{2}{3} \cdot 1{,}5\right) : \sqrt{\frac{4}{25}}\right|.$$

9. Znajdź liczbę, której 30% wynosi:

$$\frac{\left(3\frac{3}{5}\right) + 1{,}8 \cdot 3\frac{1}{3}}{\sqrt{6{,}25} - 2{,}1 : 8\frac{2}{5}}.$$

10. Oblicz, jakim procentem liczby 120 jest wartość wyrażenia:

$$5\frac{1}{4} : 0{,}05 - \left(\sqrt{6{,}25} + 3\frac{2}{3}\right) \cdot 7\frac{1}{2} + 1{,}25.$$

11. Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b, jeżeli:

$$a = \left|\frac{1}{\sqrt{64}} - \sqrt[3]{27} \cdot 1{,}5^3\right|,$$

$$b = \left|-2 + \sqrt[3]{64}\right|.$$

12. Oblicz, jakim procentem liczby 10 jest wartość wyrażenia:

$$0{,}8 - \left(\sqrt{1{,}44} : 2\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\right) : \left(-\sqrt{\frac{1}{64}}\right) + 2 \cdot 1450^0.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

12. Napisz każde wyrażenie w postaci potęgi zakładając, że $x \neq 0$:

a) $x^5 : ((x^6 : x^3) \cdot x^5)$
b) $(x^{-6} : (x^{-2} \cdot x^{-3})) \cdot x^{-3}$
c) $(x^{-7} : (x^{-5} : x^{-3})) \cdot x^{-4}$
d) $(x^{10} : (x^7 : x^2)) : (x^8 : (x^4 \cdot x))$
e) $(x^{-3} \cdot (x^{-8} : x^{-7})) \cdot (x^{-6} : (x^{-3} : x^{-2})) : x^{-2}$
f) $(x^{-10} : (x^{-12} \cdot x^{-3})) : (x^{-2} \cdot (x^{-7} : x^{-6}))$

13. Oblicz:

a) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$
b) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}$
c) $\left[(-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-3}$
d) $[(-0{,}2) \cdot 5]^{-2}$
e) $\left[(-1) \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right]^{-4}$
f) $\left[(-0{,}1) \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)\right]^{-2}$

14. Podnieś do potęgi iloczyny:

a) $(-2x)^3$
b) $(0{,}1 \cdot x \cdot y \cdot z)^4$
c) $\left(\frac{1}{2}x \cdot y\right)^2$
d) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot a \cdot b\right]^{-3}$, jeśli $a, b \neq 0$
e) $[(-0{,}2) \cdot p \cdot q]^{-3}$, jeśli $p, q \neq 0$
f) $\left[\left(-2\frac{1}{3}\right) \cdot p \cdot y\right]^{-2}$, jeśli $p, y \neq 0$

15. Przedstaw iloczyny potęg w postaci potęgi i oblicz:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
b) $(0{,}75)^{-2} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$
c) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 10^2$
d) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$
e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot (-10)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
f) $(-3)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

16. Podnieś potęgi do potęgi i oblicz:

a) $(2^2)^{-3}$
b) $(2^{-3})^{-2}$
c) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3}$
d) $((-2)^{-3})^{-2}$
e) $((-2)^2)^{-3}$
f) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-4}$
g) $((-0{,}1)^{-2})^{-4}$
h) $((-0{,}1)^{-4})^2$
i) $((-1)^{-3})^{-6}$
j) $((-1)^6)^{-3}$

17. Uporządkuj liczby rosnąco:

a) $2^{10}, 4^{16}, 2^0, 16^4, 8^5, 32^{10}$
b) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-9}, 9^{15}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-20}, 27^{30}, \left(\frac{1}{243}\right)^{-2}$

* **18.** Uporządkuj liczby malejąco:

$1^{-700}, 7^{-100}, 2^{-600}, 6^{-200}, 3^{-500}, 5^{-300}, 4^{-400}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

3. Wykonaj działania:

a) $(\sqrt[3]{2a})^3 - 2 \cdot a \cdot (\sqrt{c})^2$, jeśli $a, c \geqslant 0$

b) $\left(\sqrt{\frac{2}{5}a}\right)^2 \cdot 0{,}4a + (\sqrt{a-b})^2 \cdot (b-a)$, jeśli $a \geqslant b \geqslant 0$

4. Oblicz:

a) $\sqrt{9 \cdot 4}$, $\sqrt{49 \cdot 36}$, $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$

b) $\sqrt{4 \cdot 25}$, $\sqrt{16 \cdot 64}$, $\sqrt{4 \cdot 25 \cdot 36}$

c) $\sqrt[3]{1 \cdot 27}$, $\sqrt[3]{8 \cdot 64}$, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64}$

d) $\sqrt{0{,}25 \cdot 100}$, $\sqrt{0{,}09 \cdot 64}$, $\sqrt{0{,}09 \cdot 1{,}21 \cdot 1{,}44}$

5. Oblicz:

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, $\sqrt{25} \cdot \sqrt{36}$, $\sqrt{81} \cdot \sqrt{100}$

b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

c) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$, $\sqrt{36} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{121}$, $\sqrt{64} \cdot \sqrt{144} \cdot \sqrt{169}$

d) $\sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{343}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$, $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{64}$

e) $\sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{144} \cdot \sqrt{0{,}81}$, $\sqrt{0{,}36} \cdot \sqrt{2{,}56} \cdot \sqrt{2{,}25}$

6. Oblicz:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{12}$, $\sqrt{0{,}06} \cdot \sqrt{0{,}05} \cdot \sqrt{1{,}2}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{18}$, $\sqrt{0{,}3} \cdot \sqrt{0{,}5} \cdot \sqrt{0{,}15}$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$, $\sqrt[3]{0{,}04} \cdot \sqrt[3]{0{,}12} \cdot \sqrt[3]{0{,}36}$

7. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{1025}$

b) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{48}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{108}$, $\sqrt[3]{135}$, $\sqrt[3]{192}$, $\sqrt[3]{448}$

8. Włącz czynnik pod znak pierwiastka:

a) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$, $4\sqrt{6}$, $2\sqrt{11}$

b) $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[3]{5}$, $4\sqrt[3]{4}$, $2\sqrt[3]{6}$

c) $0{,}1\sqrt{10}$, $0{,}5\sqrt{3}$, $1{,}5\sqrt{3}$, $0{,}2\sqrt{5}$, $0{,}3\sqrt{2}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, $\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}$, $\frac{1}{7}\sqrt{7}$

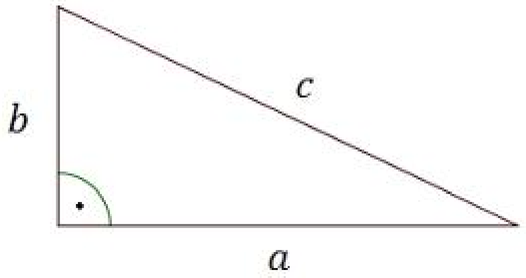
e) $0{,}1\sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$, $\frac{1}{4}\sqrt[3]{32}$, $0{,}1\sqrt[3]{140}$, $10\sqrt[3]{0{,}1}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Twierdzenie Pitagorasa.

Twierdzenie Pitagorasa najczęściej wykorzystujemy do obliczenia długości trzeciego boku trójkąta prostokątnego, w sytuacji gdy znamy długości dwóch pozostałych boków.

Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



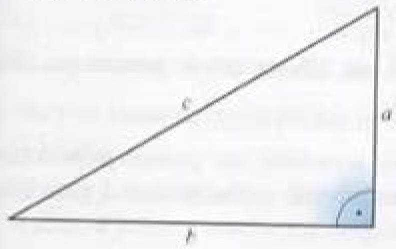
$$a^2 + b^2 = c^2$$

1. Dane są odcinki, których długości wynoszą:

a) $7, 8, 12$
b) $6, 10, 8$
c) $3, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}$
d) $\sqrt{5}, 2, 3$
e) $9, 10, 14$
f) $3{,}5, 12, 12\frac{1}{2}$

Sprawdź, w którym przypadku można zbudować z danych odcinków trójkąt prostokątny.

2. Dany jest trójkąt:



Oblicz długości brakujących odcinków:

a) $a = 4, b = 5$
b) $a = 3\sqrt{2}, b = 4$
c) $c = 10, b = 8$
d) $a = 12, c = 13$
e) $b = \sqrt{3}, c = 2\sqrt{5}$
f) $a = 3\sqrt{7}, b = 4\sqrt{3}$
g) $a = 4\sqrt{5}, c = 5\sqrt{5}$
h) $b = 2\sqrt{2}, c = 2\sqrt{6}$

3. W układzie współrzędnych dane są punkty A i B. Znajdź odległość między nimi:

a) $A = (2, 1), B = (6, 4)$
b) $A = (-4, 1), B = (4, -8)$
c) $A = (-2, 7), B = (7, -5)$
d) $A = (8, -3), B = (-4, 2)$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

4. W trójkącie prostokątnym różnica długości dwóch przyprostokątnych wynosi 3 cm, a ich stosunek jest równy $\frac{4}{3}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

5. W trójkącie prostokątnym suma długości przeciwprostokątnej i przyprostokątnej wynosi 50 cm, a ich różnica kwadratów 100 cm^2. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

6. Oblicz długości przyprostokątnych prostokątnego trójkąta równoramiennego, w którym przeciwprostokątna wynosi:

a) $4\sqrt{2}$ cm b) 40 cm c) $\sqrt{8}$ cm

7. Oblicz promień okręgu o średnicy AB, jeżeli jego cięciwy wynoszą:

$|AC| = 6\sqrt{2}$ cm $|BC| = 8\sqrt{2}$ cm

8. Dany jest okrąg o promieniu 20 cm. Oblicz odległość środka okręgu od cięciwy o długości 32 cm.

9. Dane jest półkole o promieniu 13 cm. Oblicz odległość między równoległymi cięciwami, których długości wynoszą: 24 cm i $13\sqrt{2}$ cm.

10. Obwód kwadratu wynosi $40\sqrt{2}$ cm. Oblicz długość jego przekątnej.

11. Oblicz długość przekątnej prostokąta o bokach:

a) 15 cm, 20 cm
b) 2 dm, $2\sqrt{3}$ dm
c) $2\sqrt{2}$ cm, 1 cm
d) $3\sqrt{2}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm

12. W prostokącie przekątna ma długość $\sqrt{41}$ cm. Oblicz obwód prostokąta, jeżeli jeden z jego boków stanowi 80% drugiego.

13. W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość do przeciwprostokątnej, która podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 cm i 8 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

14. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono wysokość CD. Oblicz miary kątów trójkąta BCD. Jaki jest stosunek długości boków CB i DB?

*15. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku B wynosi $60°$. Oblicz miarę kąta zawartego między środkową i wysokością poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego C.

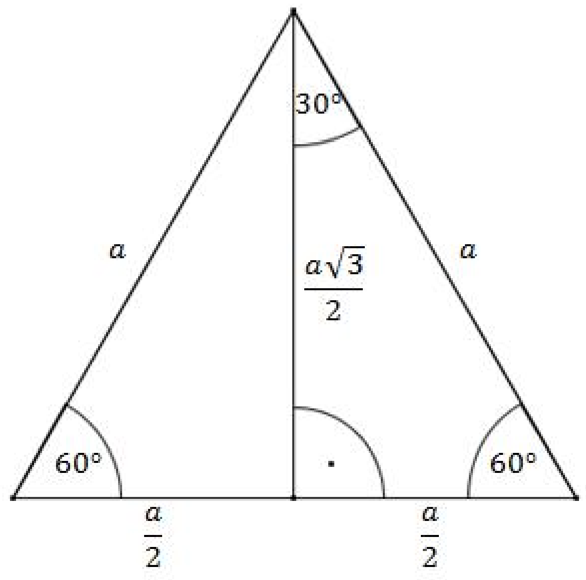
16. W trójkącie prostokątnym długość boku leżącego naprzeciw kąta $30°$ jest równa $4\sqrt{2}$ cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej i obwód tego trójkąta.

17. Jakie wymiary ma kwadratowy ekran monitora komputera, jeżeli przekątna ekranu ma 16 cali? Przyjmij, że 1 cal $\approx$ 2,5 cm.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Trójkąt prostokątny 30° 60° 90°

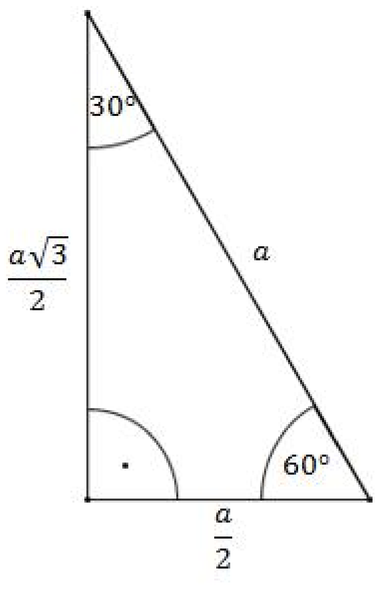
Kąty 30° i 60° mamy w trójkącie prostokątnym, który jest połówką trójkąta równobocznego.



Wysokość trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem

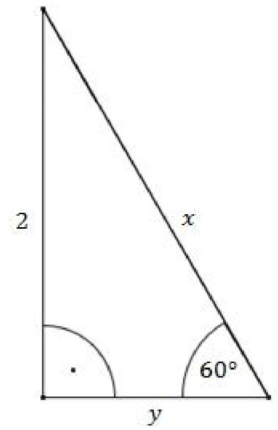
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Przedstawmy na oddzielnym rysunku sam trójkąt prostokątny:

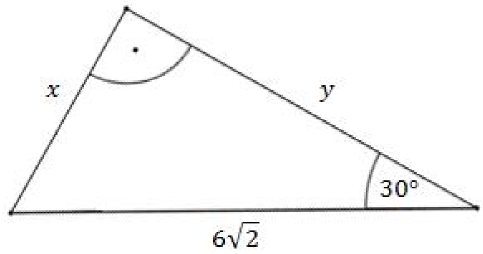


Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

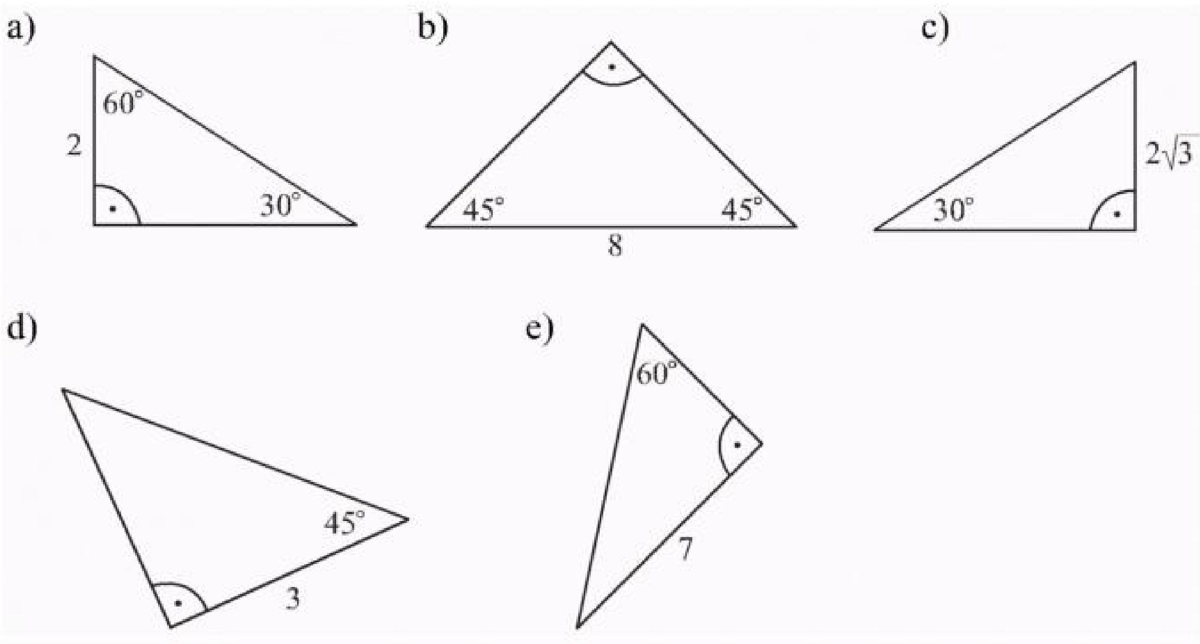
Oblicz długość odcinków x i y.



Oblicz długość odcinków x i y.

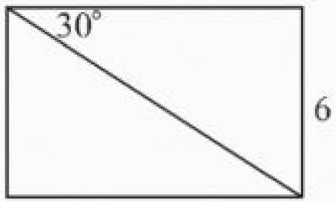


Oblicz długości pozostałych boków trójkąta:



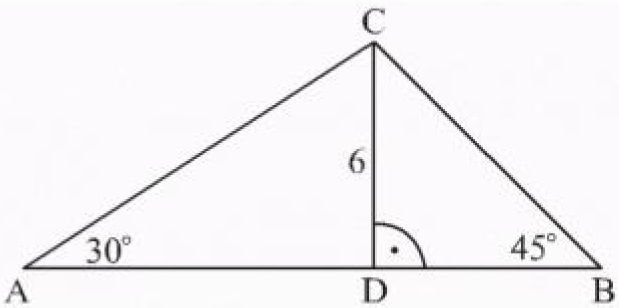
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Oblicz pole i obwód prostokąta przedstawionego na rysunku:



W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C ma 90°, a przy wierzchołku A ma 60°. Oblicz kąty i obwód tego trójkąta, jeżeli bok BC ma długość 9 cm.

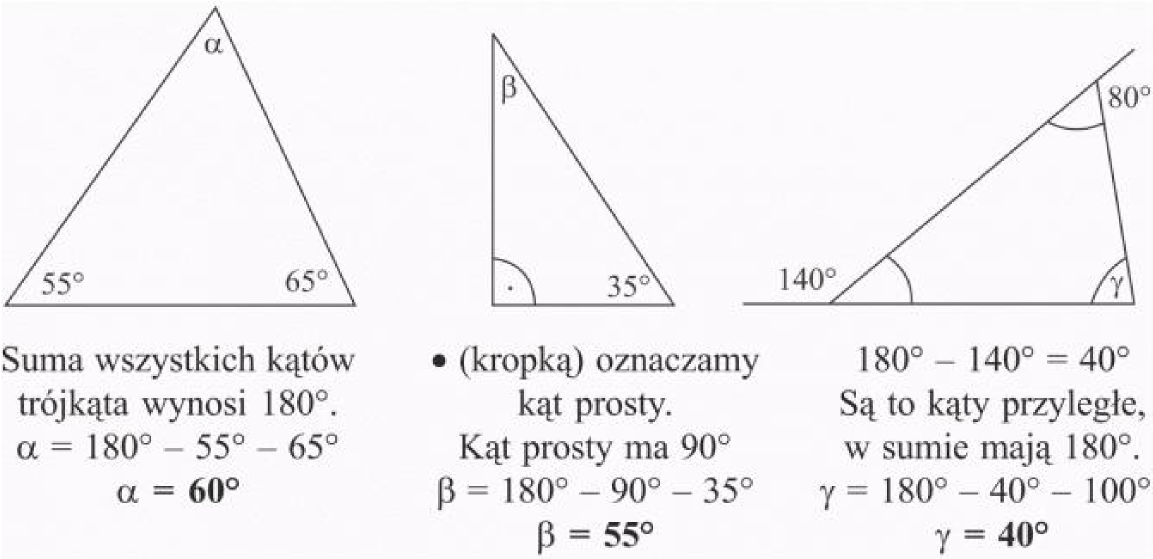
Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:

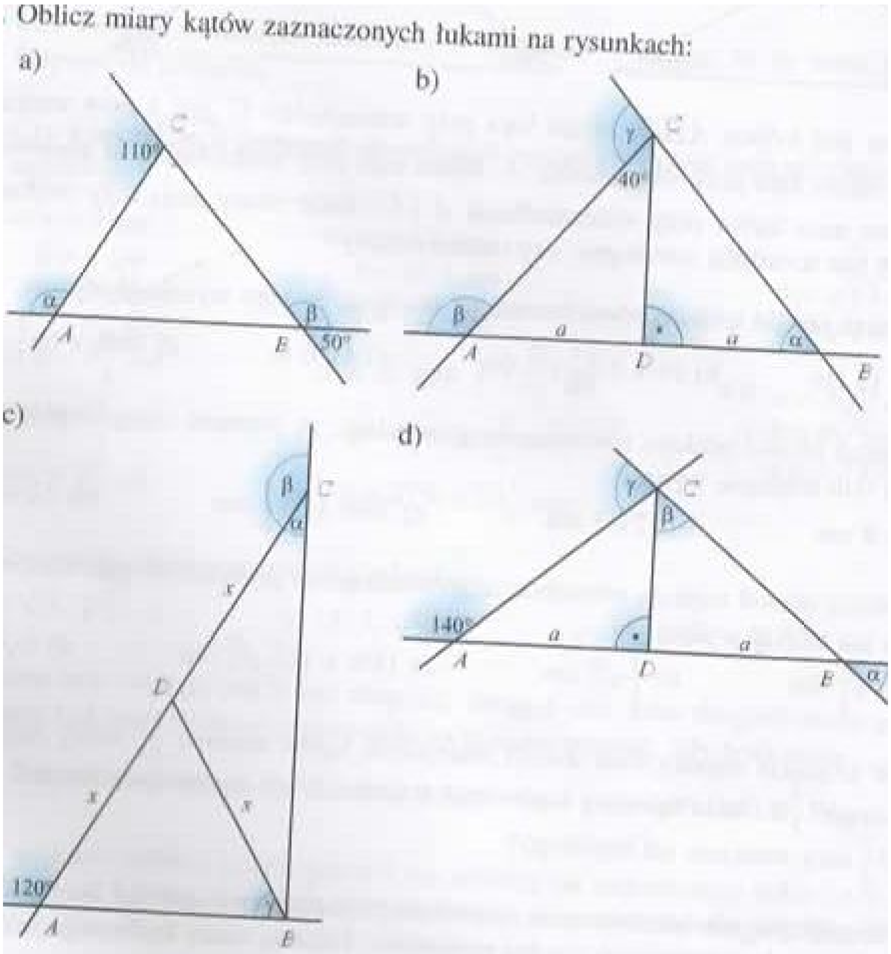


<u>Kąty w trójkątach.</u>

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Suma miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta wynosi 180°.



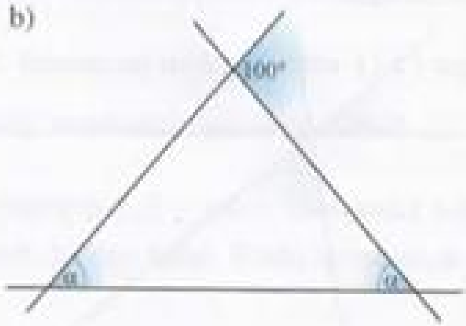


Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

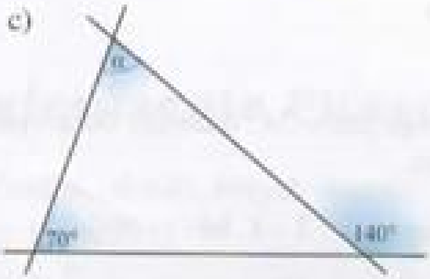
19. Oblicz, ile stopni ma kąt α:

a)

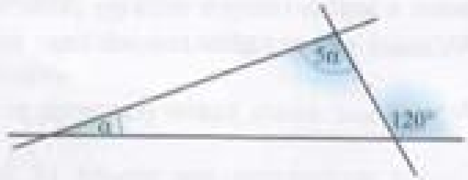
b)



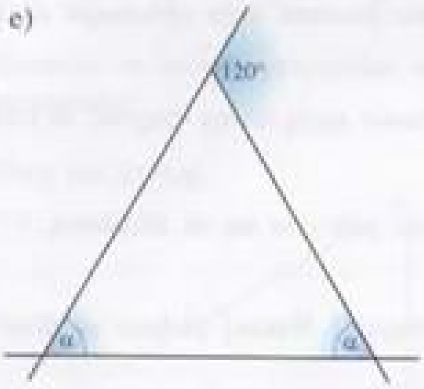
c)



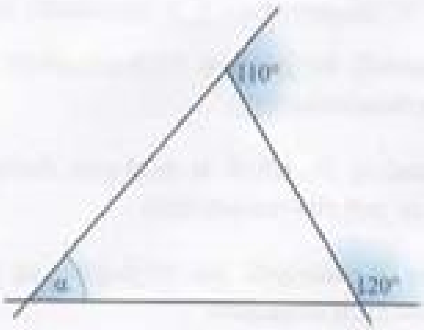
d)



e)

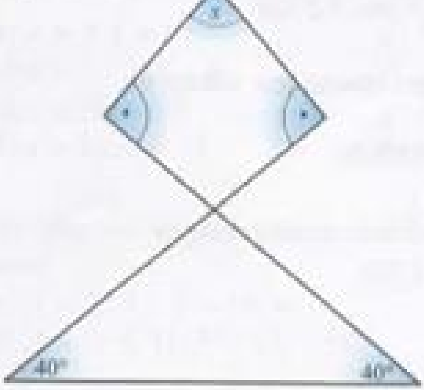


f)

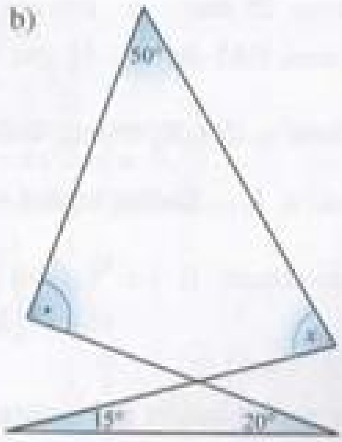


20. Oblicz, ile stopni ma kąt x:

a)



b)



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zdarzenia losowe

Rachunek prawdopodobieństwa pomaga obliczyć **szansę** zaistnienia pewnego określonego zdarzenia.

Przykład 1.

Jaka jest szansa, że dzisiaj jest niedziela?

Rozwiązanie:

Mamy 7 możliwości (bo jest 7 dni tygodnia).
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dzisiaj jest niedziela, wynosi: $1/7$.

Rachunek prawdopodobieństwa bazuje na kombinatoryce.

Żeby obliczyć szansę dowolnego zdarzenia (nazwijmy go literką A), musimy określić liczbę zdarzeń sprzyjających oraz liczbę wszystkich możliwych zdarzeń (do tego celu stosujemy kombinatorykę). Następnie do obliczenia prawdopodobieństwa korzystamy z jednego wzoru:

$$P(A)=|A|/|\Omega|$$

gdzie:
$|A|$ - to liczba zdarzeń sprzyjających (moc zbioru $|A|$)
$|\Omega|$ - to liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru $|\Omega|$)

Pojęcia stosowane w rachunku prawdopodobieństwa:

- **Doświadczenie losowe** - czynność którą wykonujemy, np.: rzut kostką, wybór dnia tygodnia.
- **Zdarzenie elementarne** - zdarzenie (tylko jedno!) jakie może wydarzyć się w doświadczeniu losowym, np.: wypadło 5 oczek, wybrano środę.
- **Zdarzenie losowe** - zbiór jednego lub kilku zdarzeń elementarnych, np.: wypadła parzysta liczba oczek (2, 4, lub 6), wybrano dzień powszedni.
- **Moc zbioru** - liczba elementów danego zbioru, np.: $|\{2,4,6\}|=3$, $|\{$dni powszednie$\}|=5$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Stosowane oznaczenia:

- Ω - zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, np.: dla rzutu kostką $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- A - zdarzenie losowe (podzbiór Ω), np.: jeżeli A to zdarzenie polegające na tym, że wypadła parzysta liczba oczek, to: $A=\{2,4,6\}$.

Zadania

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką wypadnie liczba oczek mniejsza od 5
2. Rzucasz trzy razy monetą.
   a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego. Ile ich jest?
   b) Wyrzuciłeś większą liczbę reszek niż orłów. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?
3. Losujesz dwie niepowtarzające się cyfry ze zbioru {1, 2, 3, 4} i tworzysz z nich liczbę.
   a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego. Ile ich jest?
   b) Wylosowałeś cyfry, które dały liczbę parzystą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?
4. Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3.
5. Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 15.
6. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.
7. Rzucasz dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) parzystej liczby oczek w obu rzutach
b) parzystej liczby oczek na pierwszej kostce
c) sumy oczek równej 5
d) iloczynu oczek równego 6
e) różnych liczb oczek na obu kostkach.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020