



Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły:

III Liceum Ogólnokształcącego im. św. Jana Kantego

Tytuł zajęć

„Koło matematyczne”

Autor opracowania

Violetta Lewandowska

Niniejsze scenariusze powstały na potrzeby realizacji Projektu

nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:

„ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki

w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych

Metropolii Poznań”

Poznań 2022

Scenariusze

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Podzielność, NWD(a,b), algorytm Euklidesa	2
2.	Kongruencja	2
3.	Teoria liczb	2
4.	Równania diofantyczne	1
5.	Indukcja matematyczna	1
6.	Wzory Viete'a	1
7.	Układy równań	2
8.	Nierówności	2
9.	Funkcje	1
10.	Równania funkcyjne	2
11.	Równość funkcji, suriekcja, bijekcja	1
12.	Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste, funkcje różnowartościowe	1
13.	Złożenie funkcji	2
14.	Funkcja odwrotna	2
15.	Planimetria	2
Łączna liczba godzin		24



Scenariusz 1

Temat zajęć: **Podzielność, NWD(a,b), algorytm Euklidesa**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna i rozumie twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze,
- Zna własności relacji podzielności,
- Zna algorytm Euklidesa,
- Potrafi obliczyć NWD za pomocą algorytm Euklidesa,
- Zna twierdzenie o superpozycji,
- Zna rozszerzony algorytm Euklidesa,
- Potrafi zastosować poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań dotyczących podzielności.

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka,
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- a) prezentacja,
- b) komputer, tablica interaktywna
- c) kalkulatory



Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących własności podzielności liczb całkowitych, pojęcia NWD i NWW,
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Podzielność, NWD(a,b), algorytm Euklidesa str.3,
- Zadania do samodzielnego wykonania

Zestaw zadań 1: NWD, NWW i algorytm Euklidesa, Paweł Gładki
<http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/teaching/2011-2012/a1i-zestaw1.pdf>

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 2

Temat zajęć: **Kongruencja**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna i rozumie pojęcie kongruencji,
- Zna własności kongruencji,
- Zna chińskie twierdzenie o resztach,
- Zna twierdzenie Eulera,
- Rozwiązuje kongruencje liniowe, kongruencje kwadratowe, układy kongruencji liniowych,
- Wykorzystuje kongruencje do wyznaczania cech podzielności przez liczby całkowite,
- Potrafi zastosować kongruencje do: znajdowania dni tygodnia określonych dat z przeszłości, badania własności wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów,
- praca zespołowa.

Metody:

- pogadanka,
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- komputer, tablica interaktywna,
- kalkulatory,
- prezentacja.

Przebieg zajęć:

- Wprowadzenie pojęć kongruencja, chińskiego twierdzenie o resztach, twierdzenia Eulera
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Kongruencja str.10
- Zadania do samodzielnego wykonania
 - a) Przed konkursem matematycznym 1 gimnazjum, liceum, Paulina Cholewik , Maria Dębska , Łukasz Drwiega , Bogusław Gardaś , Tomasz Szymczyk , Magdalena Węgrzyn, Wydawnictwo: OMEGA, Kraków 2011,
 - b) Kółko matematyczne dla olimpijczyków, Henryk Pawłowski, Wydawnictwo TURPRESS, Toruń 1994.

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 3

Temat zajęć: **Teoria liczb**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna pojęcia: liczby pierwsze, liczby złożone, liczby względnie pierwsze
- Zna i stosuje twierdzenie Fermata
- Stosuje cechy podzielności liczb do rozwiązywania zadań dotyczących własności liczb,
- Stosuje przekształcenia algebraiczne do rozwiązywania zadań dotyczących własności liczb,
- Stosuje wzory skróconego mnożenia do rozwiązywania zadań dotyczących własności liczb,

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów,
- praca zespołowa.

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- komputer, tablica interaktywna

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących podzielności liczb
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Teoria liczb str.17



- Zadania do samodzielnego wykonania

Zadania z elementarnej teorii liczb, Andrzej Nowicki, UMK, Toruń 2011
<https://www-users.mat.umk.pl/~anow/ps-dvi/zada.pdf>

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 4

Temat zajęć: **Równania diofantyczne**

Czas trwania zajęć: 1h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna pojęcie równia diofantycznego,
- Zna sposoby rozwiązywania równania diofantycznego,
- Potrafi rozwiązywać równanie diofantyczne,
- Zna kryterium rozwiązalności równania diofantycznego o współczynnikach całkowitych,
- Rozwiązuje przykładowe rozwiązania wybranych równań z dwiema i trzema niewiadomymi, w tym równania Pitagorasa.

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka,
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, tablica interaktywna,
- kalkulatory,
- smartfony

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących rozwiązywania równań (liniowych, kwadratowych i wymiernych) z jedną niewiadomą, wykorzystywania własności

funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych,

- Przypomnienie wiadomości dotyczących algorytmu Euklidesa, obliczania NWD,
 - Wprowadzenie pojęcia równań diofantycznych,
 - Zapoznanie z metodami rozwiązywania równań diofantycznych,
 - Rozwiązywanie zadań Skrypt – Równania diofantyczne str. 26,
 - Zadania do samodzielnego wykonania
- a) Przed konkursem matematycznym 1 gimnazjum, liceum, Paulina Cholewik ,
Maria Dębska , Łukasz Drwiega , Bogusław Gardaś , Tomasz Szymczyk ,
Magdalena Węgrzyn, Wydawnictwo: OMEGA, Kraków 2011,

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 5

Temat zajęć: **Indukcja matematyczna**

Czas trwania zajęć: 1h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna i rozumie pojęcie indukcji matematycznej,
- umie prowadzić łatwe i średnio trudne dowody metodą indukcji matematycznej.

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka,
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa.

Środki dydaktyczne:

- komputer, tablica interaktywna,
- smartfony

Przebieg zajęć:

- Wprowadzenie pojęcia indukcji matematycznej
 - Rozwiązywanie zadań Skrypt – Indukcja matematyczna str. 37
 - Zadania do samodzielnego wykonania
- a) Indukcja matematyczna, Piotr Nayar
Seminarium Olimpiady Matematycznej (spotkanie IX)



b) I Ty zostaniesz Euklidesem, zbiór zadań nie tylko dla Asa do klasy 2 szkół średnich, Wydawnictwo ADAM, Warszawa 1999

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 6

Temat zajęć: **Wzory Viète'a**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna i potrafi wyprowadzić wzory Viète'a II stopnia,
- Zna i potrafi wyprowadzić wzory Viète'a III stopnia,
- Zna i potrafi wyprowadzić wzory Viète'a dowolnego stopnia,
- Stosuje wzory Viète'a do rozwiązywania zadań.

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących wzorów Viète'a stopnia 2
- Uogólnienie wzorów Viète'a
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Wzory Viète'a str.41
- Zadania do samodzielnego wykonania



- a) Uogólnione wzory Viete'a. Zadania olimpijskie z wielomianów - pełny przegląd, Agnieszka Hejna
file:///C:/Users/Violetta/Downloads/wielomiany_rzeczywiste_2019.pdf

- b) Wzory Viete'a, Uniwersyteckie Kółko Matematyczne
<http://www.math.uni.wroc.pl/~preisner/jg/pliki2/beta13.pdf>

- c) Matematyka klasa 2. Zakres rozszerzony Zbiór zadań do liceów i techników
Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda, Wydawnictwo Pazdro

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 7

Temat zajęć: **Układy równań**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Potrafi rozwiązywać układy równań równania wielomianów symetrycznych dwóch i trzech zmiennych

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- kalkulatory,
- smartfony

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących rozwiązywania układów równań
 - Rozwiązywanie zadań Skrypt – Układy równań str. 50
 - Zadania do samodzielnego wykonania
- a) Wzory Viete'a i ich zastosowanie do układów równań wielomianów symetrycznych dwóch i trzech zmiennych, Paweł Józiaś
<https://www.impan.pl/~pjoziak/data/viete.pdf>



b) Układy równań, Dominik Burek
Seminarium Olimpiady Matematycznej (spotkanie XXIII)

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 8

Temat zajęć: **Nierówności**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna pojęcia: średnią arytmetyczną, średnią geometryczną, średnią harmoniczną, średnią kwadratową
- Zna związki między średnimi
- Wykorzystuje związki między średnimi do dowodzenia nierówności
- Przekształca wyrażenia algebraiczne, stosuje wzory skróconego mnożenia

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących nierówności
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – : Nierówności str.61
- Zadania do samodzielnego wykonania



- Matura z matematyki, Materiały pomocnicze dla nauczycieli i uczniów opracowane przez Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych w latach 2010-2014
- Nierówności, Piotr Nayar
Seminarium Olimpiady Matematycznej (spotkanie IV)
- c) Nierówności dla początkujących olimpijczyków, Aleksander Kubica, Tomasz Szymczyk
STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW
Warszawa 2014
- d) Nierówności między średnimi liczbowymi i ich zastosowanie, Renata Jurasieńska
<https://www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-2009/materialy/jurasinska.pdf>

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 9

Temat zajęć: **Funkcje**

Czas trwania zajęć: 1h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Wyznacza dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
- Zna funkcje szczególne: funkcja - część całkowita, podłoga; funkcja - część całkowita, sufit; funkcja - część ułamkowa, funkcja signum,
- Zna własności poznanych funkcji,
- Potrafi naszkicować wykresy poznanych funkcji
- Wykorzystuje własności funkcji do rozwiązywania zadań,

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- program DESMOS,
- smartfony

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących funkcji
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Funkcje str. 66
- Zadania do samodzielnego wykonania



- a) Przed konkursem matematycznym 1 gimnazjum, liceum, Paulina Cholewik ,
Maria Dębska , Łukasz Drwiega , Bogusław Gardaś , Tomasz Szymczyk ,
Magdalena Węgrzyn, Wydawnictwo: OMEGA, Kraków 2011
- b) Kółko matematyczne dla olimpijczyków, Henryk Pawłowski, Wydawnictwo
TURPRESS, Toruń 1994

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 10

Temat zajęć: **Równość funkcji, suriekcja, bijekcja**

Czas trwania zajęć: 1h

Cele szczegółowe:

Uczeń

- Zna i rozumie pojęcie równości funkcji, suriekcji oraz bijekcji
- Potrafi wskazać czy dana funkcja jest suriekcją, bijekcją
- Potrafi uzasadnić równość funkcji

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- program DESMOS, smartfony

Przebieg zajęć:

- Wprowadzenie pojęć równości funkcji, suriekcji oraz bijekcji
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Równość funkcji, suriekcja, bijekcja str. 74
- Zadania do samodzielnego wykonania

Matematyka dyskretna

<http://imif.utp.edu.pl/grzegorek/04funkcje.pdf>



Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 11

Temat zajęć: **Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste**

Czas trwania zajęć: 1h

Cele szczegółowe:

Uczeń

- Zna i rozumie pojęcie: funkcja parzysta, funkcja nieparzysta;
- bada czy podana funkcja jest parzysta, nieparzysta;
- rozpoznaje na podstawie wykresu funkcję parzysta, nieparzysta;
- stosuje własności funkcji nieparzystych, parzystych
- rozumie związek między wykresem funkcji parzystej o symetrią osiową względem prostej
- rozumie związek między wykresem funkcji nieparzystej o symetrią środkową względem punktu $(0,0)$

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- program DESMOS, smartfony

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących funkcji, monotoniczności funkcji



- Wprowadzenie pojęć: funkcja parzysta i funkcja nieparzysta, własności funkcji parzystej i funkcji nieparzystej
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste, str. 77
- Zadania do samodzielnego wykonania
 - a) Podstawowe własności funkcji: okresowość, parzystość, nieparzystość, ograniczoność, Anna Barbaszewska-Wiśniowska, Open AGH, E-podręczniki, 2021
 - b) Matematyka. zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 1. zakres podstawowy i rozszerzony, Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda, Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 2016

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 12

Temat zajęć: **Funkcje różnowartościowe**

Czas trwania zajęć: 1h

Cele szczegółowe:

Uczeń

- Zna i rozumie pojęcie funkcji różnowartościowej (iniekcji)
- Potrafi udowodnić, że funkcja jest różnowartościowa
- rozpoznaje, na podstawie wykresu, funkcję różnowartościową;
- stosuje własności funkcji różnowartościowej.

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- program DESMOS, smartfony

Przebieg zajęć:

- Wprowadzenie pojęcia funkcji różnowartościowej
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Funkcje różnowartościowe, str. 81
- Zadania do samodzielnego wykonania

a) Matematyka. zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 1. zakres podstawowy i rozszerzony, Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda, Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 2016



Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 13

Temat zajęć: **Złożenie funkcji**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń

- zna i rozumie pojęcie złożenia funkcji (superpozycji)
- zna pojęcie funkcji wewnętrznej, funkcji zewnętrznej
- zna twierdzenie o monotoniczności złożzeń
- bada monotoniczność funkcji złożonej
- dokonuje analizy własności składowych funkcji złożonych, aby pokazać daną własność złożenia;
- stosuje twierdzenia dotyczące funkcji złożonych do wykazywania własności złożzeń,
- wykorzystuje własności funkcji złożonej do rozwiązywania równań i nierówności

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- program DESMOS, smartfony

Przebieg zajęć:

- Zapoznanie z materiałem i omówienie wiadomości z Khan academy
<https://pl.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:composite>
- Przypomnienie pojęć funkcji: różnowartościowość, „na”, monotoniczność, parzystość i nieparzystość.
- Wprowadzenie pojęcia funkcji złożonej
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Złożenie funkcji str. 83
- Zadania do samodzielnego wykonania

Skrypt strona 65

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 14

Temat zajęć: **Równania funkcyjne**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Zna i rozumie pojęcie równania funkcyjnego
- Potrafi rozwiązywać równania funkcyjne

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik.

Przebieg zajęć:

- Wprowadzenie pojęcia równania funkcyjnego
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Równania funkcyjne str.87
- Zadania do samodzielnego wykonania
 - a) Kółko matematyczne dla olimpijczyków, Henryk Pawłowski, Wydawnictwo TURPRESS, Toruń 1994

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 15

Temat zajęć: **Funkcja odwrotna**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń

- Zna i rozumie pojęcie funkcji odwrotnej
- zna własności funkcji takie jak różnowartościowość, własność „na”
- pokazuje, że dana funkcja jest różnowartościowa, („na”) albo, jeśli nie jest, pokazuje prawdziwość zaprzeczenia tej własności
- rysuje funkcję odwrotną do danej, wiedząc o tym, że jej wykres jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$
- sprawdza, czy istnieje funkcja odwrotna do danej funkcji
- wyznacza wzór funkcji odwrotnej do danej funkcji
- wyznacza wzór funkcji odwrotnej do funkcji będącej złożeniem dwóch bijekcji

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- dyskusja
- burza mózgów
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- komputer, rzutnik,
- program DESMOS, smartfony

Przebieg zajęć:

- Zapoznanie i omówienie wiadomości z Khan academy



<https://pl.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:composite/x9e81a4f98389efdf:invertible/v/determining-if-a-function-is-invertible>

- Przypomnienie wiadomości dotyczących funkcji i ich własności
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Funkcja odwrotna. str. 95
- Zadania do samodzielnego wykonania
Skrypt strona 98

Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.

Scenariusz 16

Temat zajęć: **Planimetria**

Czas trwania zajęć: 2h

Cele szczegółowe:

Uczeń:

- Potrafi interpretować treści zadań, zapisać warunki i zależności między obiektami matematycznymi, wnioskować, argumentować i uzasadniać interpretować otrzymane wyniki;

Formy:

- praca indywidualna ucznia,
- burza mózgów
- praca zespołowa

Metody:

- pogadanka
- metoda problemowa,
- metoda ćwiczeniowa

Środki dydaktyczne:

- tablice matematyczne CKE, kalkulatory
- komputer, rzutnik
- program GEOGEBRA

Przebieg zajęć:

- Przypomnienie wiadomości dotyczących statystyki, rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki
- Rozwiązywanie zadań Skrypt – Planimetria str. 99
- Zadania do samodzielnego wykonania

Zadania na dowodzenie geometria, cz. II Wojciech Guzicki

http://www.fmw.uni.wroc.pl/sites/default/files/upload_attach/dowody_geometryczne.pdf



Podsumowanie zajęć:

Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.