Fundusze Europejskie
Program Regionalny

SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

Szkoły Podstawowej nr 1 w Szamotułach

Tytuł zajęć

„ Zajęcia wyrównawcze z matematyki"

Autor/Autorzy opracowania

Lucyna Juś

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:

„ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań"

Poznań 2021

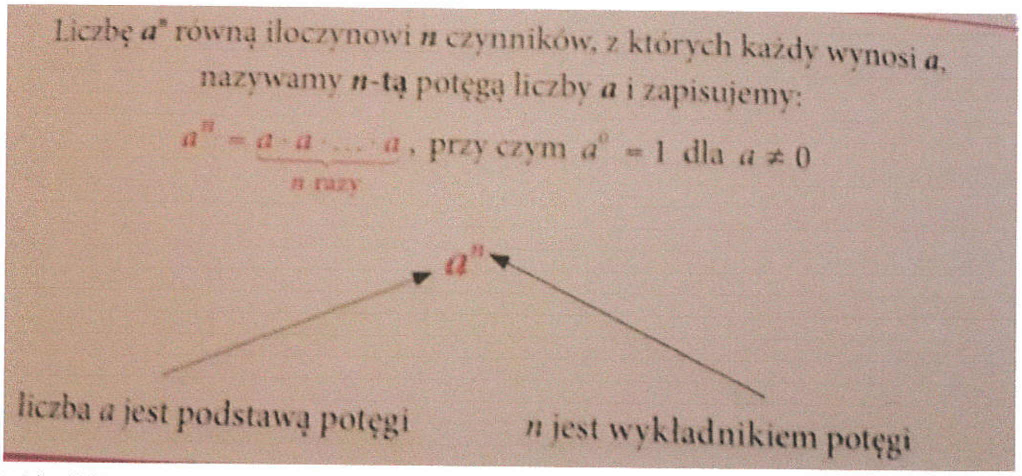
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Własności potęg	1
2.	Mediana i średnia arytmetyczna	1
3.	Obliczenia procentowe	1
4.	Własności pierwiastków	1
5.	Twierdzenie Pitagorasa	1
6.	Wyrażenia algebraiczne	1
7.	Równania	1
8.	Własności kątów	1
9.	Nierówność trójkąta	1
10.	Figury przystające	1
11.	Wielokąty foremne	1
12.	Graniastosłupy	1
13 .	Objętość graniastosłupa	1
14 .	Pole powierzchni graniastosłupa	1
15 .	Ostrosłupy	1
16.	Objętość ostrosłupa	1
17.	Figury płaskie	1
18.	O ile procent więcej, o ile mniej	1
19.	Kwadrat i jego połowa	1
20.	Trójkąt równoboczny i jego połowa	1

Razem: 20.

1. Własności potęg.


Liczbę a^n równą iloczynowi n czynników, z których każdy wynosi a, nazywamy n-tą potęgą liczby a i zapisujemy:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}, \text{ przy czym } a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

Mnożąc potęgi o tej samej podstawie, dodajemy ich wykładniki.
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, gdzie n, m – liczby naturalne

Dzieląc potęgi o tej samej podstawie, odejmujemy ich wykładniki.
$a^n : a^m = a^{n-m}$, gdzie n, m – liczby naturalne oraz $n \geq m$

Mnożąc potęgi o tych samych wykładnikach, mnożymy podstawy i zapisujemy w danym wykładniku.
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, gdzie n – liczba naturalna

8 Marta przygotowała dwa żetony takie, że suma liczb zapisanych na obu stronach każdego żetonu jest równa zero. Widok jednej ze stron tych żetonów przedstawiono poniżej. (... / 1 p.)

-5^2 $\qquad\qquad$ $(-2)^3$

Żeton 1. $\qquad$ Żeton 2.

Jakie liczby znajdują się na niewidocznych stronach tych żetonów? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. -25 i -8 $\qquad$ **B.** -25 i 8 $\qquad$ **C.** 25 i -8 $\qquad$ **D.** 25 i 8

9 **Która z podanych niżej liczb <u>nie jest</u> równa 3^{15}? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.** (... / 1 p.)

A. $3 \cdot 3^{14}$ $\qquad$ **B.** $3^9 \cdot 3^6$ $\qquad$ **C.** $3^{17} : 9$ $\qquad$ **D.** $(3^5)^3$ $\qquad$ **E.** $9^{15} : 3$

10 **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.** (... / 1 p.)

Wartość wyrażenia $\frac{4^2}{5} - 3^2$ jest równa

A. $-\frac{29}{5}$ $\qquad$ **B.** $-\frac{22}{5}$ $\qquad$ **C.** $\frac{7}{5}$ $\qquad$ **D.** $\frac{61}{5}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2. Mediana i średnia arytmetyczna

Aby wyliczyć medianę należy wszystkie nasze obserwacje uporządkować od wartości najniższej do najwyższej i wyznaczyć punkt środkowy.

średnia arytmetyczna z liczb 2, 7, 8, 13

sumujemy wszystkie liczby

to średnia arytmetyczna

$$\frac{2+7+8+13}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

tyle liczb do siebie dodaliśmy

28 Średnia arytmetyczna dwóch ocen Janka z matematyki jest równa 3, 5. (... / 1 p.)

Jaką trzecią ocenę musi uzyskać Janek, by średnia jego ocen była równa 4? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

29 Państwo Nowakowie mają trzy córki i jednego syna. Średnia wieku wszystkich dzieci państwa Nowaków jest równa 10 lat, a średnia wieku wszystkich córek jest równa 8 lat. (... / 1 p.)

Ile lat ma syn państwa Nowaków? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 9 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 16

3. Obliczenia procentowe

Jeden **procent** (1%) pewnej liczby to setna część tej liczby.

$$1\% \cdot x = \frac{1}{100} \cdot x$$

Uogólniając:

$$p\% \cdot x = \frac{p}{100} \cdot x$$

Promil (‰) stanowi $\frac{1}{10}$ procenta.

ZAMIANA PROCENTU NA UŁAMEK I UŁAMKA NA PROCENT

- Aby wyrazić część pewnej całości za pomocą procentu, mnożymy ją przez 100%.

PRZYKŁAD

$\frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$

- Aby część pewnej wielkości przedstawionej w postaci procentu przedstawić w postaci ułamka, w zapisie procentu zastępujemy znak % mnożeniem przez $\frac{1}{100}$.

PRZYKŁAD

$1\frac{1}{3}\% = 1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{75}$

Aby obliczyć liczbę, której $p\%$ wynosi a, możemy:
podzielić liczbę a przez p i następnie otrzymany iloraz pomnożyć przez 100

$$\begin{cases} p\% - a \\ 100\% - x \end{cases} \text{ stąd } x = \frac{100a}{p}$$

albo ułożyć odpowiednią proporcję

$$\frac{p}{100} = \frac{a}{x}$$

Aby ustalić, ile procent wielkości a stanowi wielkość b:
najpierw obliczamy stosunek $b : a$,
następnie wyrażamy ten stosunek w procentach: $p = \frac{b}{a} \cdot 100\%$.

Stwierdzenie, o ile procent wielkość a jest większa od wielkości b, sprowadza się do obliczenia, jakim procentem liczby b jest różnica między danymi wielkościami $(a - b)$.

$$b \xrightarrow{+p\% \cdot b} a, \text{ stąd } p\% = \frac{a - b}{b}$$

Z kolei określenie, o ile procent wielkość a jest mniejsza od b, sprowadza się do obliczenia, jakim procentem liczby b jest różnica między danymi wielkościami $(b - a)$.

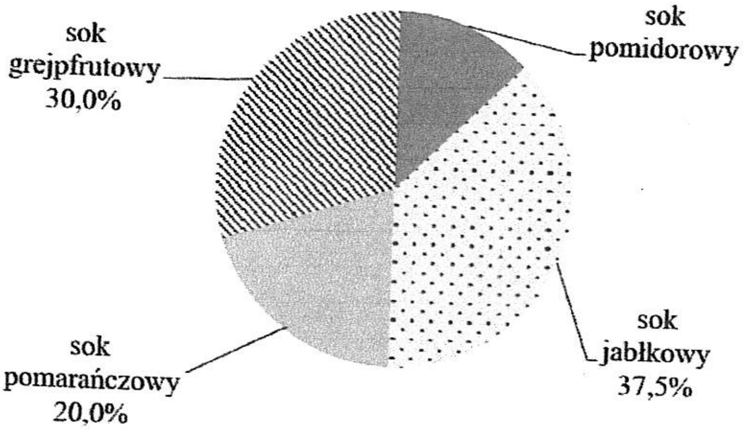
$$b \xrightarrow{-p\% \cdot b} a, \text{ stąd } p\% = \frac{b - a}{b}$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Procent p z danej wielkości obliczamy, mnożąc ją przez dany procent.

$$a \cdot p\% = \frac{a \cdot p}{100}$$

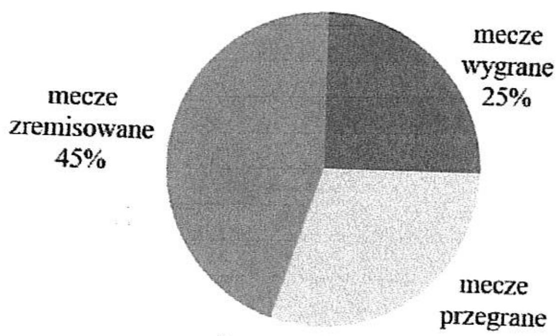
6 Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy udział soków o różnych smakach, które zostały sprzedane podczas festynu. Najmniej sprzedano soku pomidorowego, tylko 15 kartonów, a najwięcej – soku jabłkowego. (... / 1 p.)



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Sprzedano łącznie 125 kartonów soków.	P	F
2.	Sprzedano o 30 kartonów więcej soku jabłkowego niż pomidorowego.	P	F

7 Na diagramie przedstawiono informacje, jaki procent meczów w ciągu całego sezonu drużyna piłkarska zakończyła wygraną, jaki – przegraną, a jaki – remisem. (... / 2 p.)



W ciągu całego sezonu drużyna wygrała 10 meczów. Ile meczów w sezonie ta drużyna przegrała? Zapisz obliczenia.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

17 Trzej właściciele firmy – Adam, Janusz i Oskar – kupili samochód dostawczy za kwotę 154 000 zł. Kwoty wpłacone przez Adama, Janusza i Oskara są – odpowiednio – w stosunku 2 : 3 : 6. (... / 1 p.)

Jaką kwotę wpłacił Janusz? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 14 000 zł **B.** 28 000 zł **C.** 42 000 zł **D.** 84 000 zł

---

18 Dorota sporządziła z cukru i wody syrop do deseru. Stosunek masy cukru do masy wody w tym syropie jest równy 5 : 3. (... / 1 p.)

Ile procent masy tego syropu stanowi masa cukru? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 25% **B.** 37,5% **C.** 40% **D.** 60% **E.** 62,5%

---

4. Własności pierwiastków

Pierwiastkiem kwadratowym (stopnia drugiego) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b, która po podniesieniu do kwadratu jest równa liczbie a.

$\sqrt{a} = b$ wówczas $b^2 = a$

dla $a \geq 0$ i $b \geq 0$

Przy potęgowaniu potęgi mnożymy przez siebie wykładniki potęgi.
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, gdzie n, m – liczby naturalne

Dzieląc potęgi o tych samych wykładnikach, dzielimy podstawy i zapisujemy w danym wykładniku.
$a^n : b^n = (a : b)^n$, gdzie n – liczba naturalna oraz $b \neq 0$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Potęga o wykładniku ujemnym ma postać:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdzie n – liczba naturalna oraz $a \neq 0$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Liczba zapisana w notacji wykładniczej ma postać:
$a \cdot 10^k$, gdzie k – liczba całkowita oraz $1 \leq a < 10$

Pierwiastkiem sześciennym (stopnia trzeciego) z liczby a nazywamy liczbę b, która po podniesieniu do sześcianu jest równa a.

$\sqrt[3]{a} = b$ wówczas $b^3 = a$

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b > 0$
- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad b \neq 0$
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$
- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$
- $\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

11 **Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.** (... / 1 p.)

Wartość wyrażenia $\sqrt{1+\frac{25}{144}}$ jest róna **A/B**. **A.** $1\frac{5}{12}$ **B.** $1\frac{1}{12}$

Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{3+\frac{3}{8}}$ jest równa **C/D**. **C.** $1\frac{1}{2}$ **D.** $1\frac{1}{8}$

12 Do liczby $\left(-\sqrt{10}\right)$ dodajemy 5. (... / 1 p.)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Otrzymany wynik jest liczbą

A. większą od 1.

B. dodatnią mniejszą od 1.

C. mniejszą od (−8).

D. ujemną większą od (−8).

13 **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.** (... / 1 p.)

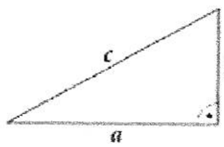
Wartość wyrażenia $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}\right)$ jest równa

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{45}$ **D.** $\sqrt{69}$

5. Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie Pitagorasa

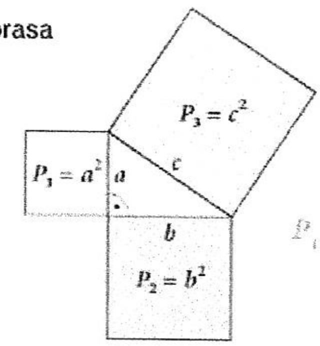
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości obu jego przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



$\longrightarrow a^2+b^2=c^2$

Własności trójkątów wynikające z twierdzenia Pitagorasa

Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu kwadratu zbudowanego na jego przeciwprostokątnej.

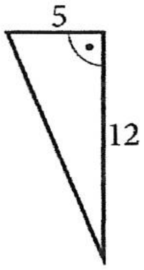


$P_1 + P_2 = P_3$

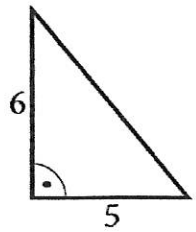
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

4 Na rysunku podano długości dwóch boków trójkąta. Oblicz długość trzeciego boku. (... / 6 p.)

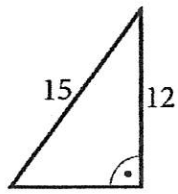
a)



b)



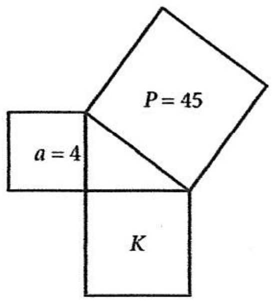
c)



5 Jeden z boków trójkąta o kątach: 90°, 45°, 45° ma długość 10 cm. Jaką długość mają pozostałe boki tego trójkąta? Rozważ wszystkie przypadki. (... / 2 p.)

6 (... / 2 p.)

Oblicz pole kwadratu K, jeśli wszystkie figury zbudowane na bokach trójkąta prostokątnego to kwadraty. Wykorzystaj informacje podane na rysunku.



6. Wyrażenia algebraiczne

Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie, które składa się z liczb, liter, działań

Wyrażenie algebraiczne	Nazwa wyrażenia
$xy + b$	suma iloczynu xy i liczby b
$a^2 - b^2$	różnica kwadratów liczb a i b
$(a+b)(a-b)$	iloczyn sumy liczb a i b przez ich różnicę
$\frac{x}{c+d}$	iloraz liczby x przez sumę liczb c i d
$(a+b)^3$	sześcian sumy liczb a i b

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego obliczamy, podstawiając w miejsce występujących w wyrażeniu liter dane liczby i wykonując obliczenia.

Jednomianem nazywamy wyrażenie, które jest pojedynczą liczbą (np. 2) lub literą (np. x), lub iloczynem liczb i liter (np. $5abc$).

Suma algebraiczna to wyrażenie zbudowane z jednomianów.

Aby **przedstawić sumę algebraiczną** w najprostszej postaci, dokonujemy **redukcji wyrazów podobnych**, która polega na dodawaniu i odejmowaniu jednomianów podobnych.

Dodając lub **odejmując** wyrażenia algebraiczne, najpierw usuwamy nawiasy, a następnie przeprowadzamy **redukcję wyrazów podobnych**.

Gdy przed nawiasem znajduje się znak (+), to możemy nawias pominąć.

$$(a+b)+(c+d)=a+b+c+d$$

Gdy przed nawiasem znajduje się znak (–), to przy opuszczaniu nawiasu zmieniamy znaki **wszystkich** wyrazów w nawiasie.

$$-(a+b)=-a-b$$

$$-(-3x-5y)=3x+5y$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Mnożąc przez siebie dwa wyrażenia algebraiczne, wykonujemy mnożenie **każdego** czynnika z pierwszego nawiasu przez **każdy** czynnik drugiego nawiasu, uwzględniając znaki stojące przy każdym czynniku.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$$

Przy wyłączaniu wspólnego czynnika przed nawias stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania lub odejmowania:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

---

1 **Pewną kwotę rozdzielono na trzy nagrody pieniężne. Marcin dostał 2 razy więcej pieniędzy niż Jędrek, a Kamil 2 razy mniej niż Jędrek. Uzasadnij, że Kamil otrzymał $\frac{1}{7}$ tej kwoty.** (... / 2 p.)

(... / 1 p.)

4 **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wyrażenie: $(2a + 3b)(3b - 2a)$ jest równe

A. $4a^2 - 12ab + 9b^2$

B. $9b^2 + 12ab + 4a^2$

C. $9b^2 - 4a^2$

D. $4a^2 - 9b^2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

6. Równania

Równanie to dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem równości, z których przynajmniej jedno zawiera literę zwaną niewiadomą.

Liczba, która spełnia równanie, jest jego **rozwiązaniem** lub inaczej **pierwiastkiem równania**.

- każda liczba, jak np. w równaniu $6x - 3 = 3(2x - 1)$, ponieważ po przekształceniu otrzymujemy $6x - 3 = 6x - 3$, czyli $-3 = -3$, czyli otrzymujemy równość stron dla każdej wartości x.

Takie równanie jest nazywa[ne] tożsamościowym.

- Równanie może nie mieć rozwiązań, jak np. równanie $2(x - 1) = 2x + 2$, ponieważ po przekształceniu otrzymujemy $2x - 2 = 2x + 2$, skąd $-2 = 2$, a zatem nie otrzymujemy równości stron.

Takie równanie jest nazywan[e] sprzecznym.

Równania nazywamy **równoważnymi**, gdy mają dokładnie te same rozwiązania.

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb spełniających dane równanie lub wykazaniu, że równanie jest sprzeczne.

Rozwiązując równanie, można:

- dodawać lub odejmować stronami to samo wyrażenie,
- mnożyć lub dzielić stronami przez to samo wyrażenie różne od zera.

Równanie **tożsamościowe** jest to równanie, które spełnia każda liczba.

Równanie **sprzeczne** jest to równanie, którego **nie** spełnia żadna liczba.

5 W pewnym zakładzie każdy z pracowników codziennie maluje taką samą liczbę jednakowych ozdób. (... / 1 p.)
Pracownicy potrzebowali 12 dni roboczych, aby wykonać zamówienie. Gdyby było ich o dwóch więcej, to czas wykonania tego zamówienia byłby o 3 dni krótszy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbę pracowników x tego zakładu można obliczyć, rozwiązując równanie

A. $12x = 9(x - 3)$ **B.** $12x = 9(x + 2)$ **C.** $12(x - 3) = 9x$ **D.** $12(x + 2) = 9x$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2 O liczbie x wiemy, że $\frac{1}{3}$ tej liczby jest o $\frac{3}{4}$ większa od $\frac{1}{6}$ tej liczby. (... / 1 p.)

Które równanie pozwoli wyznaczyć liczbę x? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = \frac{5}{6}x$ **C.** $\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = \frac{1}{6}x$

3 Ogrodnik kupił ziemię ogrodową, którą zaplanował zużyć w maju, czerwcu i lipcu. W maju zużył $\frac{1}{3}$ masy kupionej ziemi. W czerwcu zużył połowę masy ziemi, która została. Na lipiec pozostało mu jeszcze 60 kg ziemi. (... / 1 p.)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli przez x oznaczymy masę zakupionej ziemi, to sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje równanie

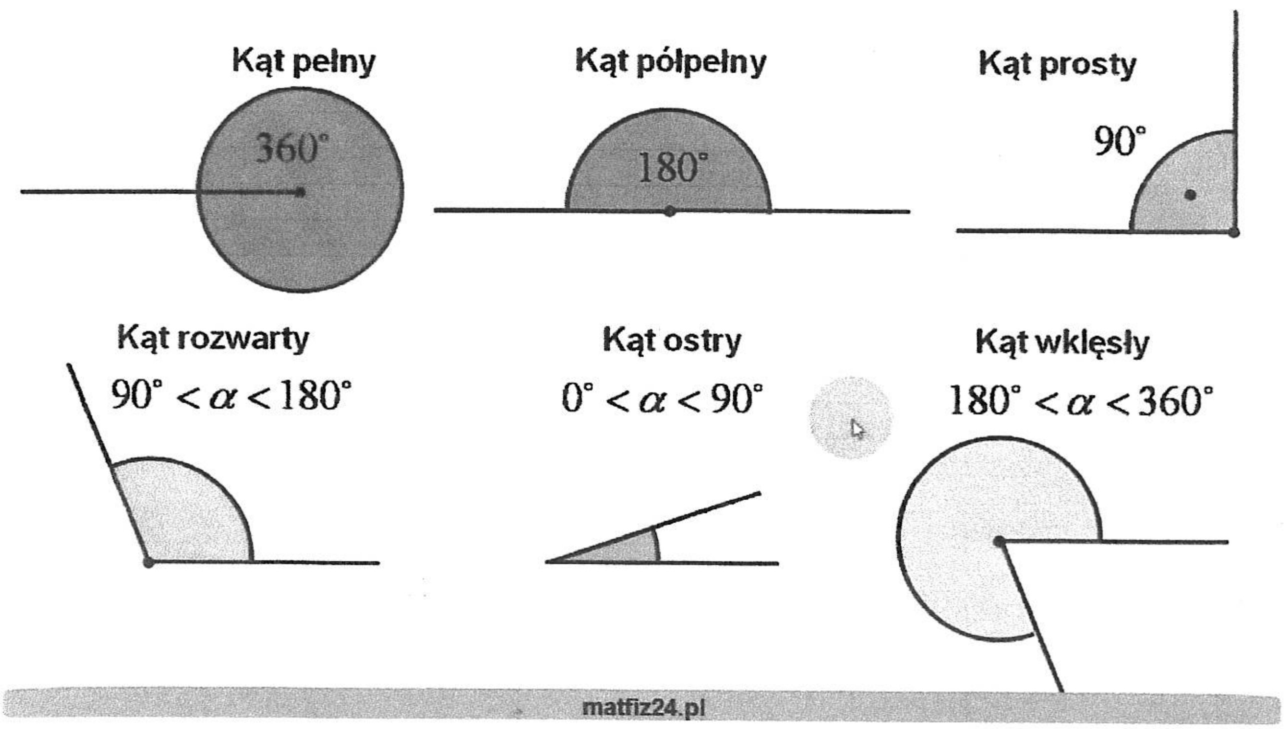
A. $\left(x - \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{2}x = 60$

B. $\left(x - \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x\right) = 60$

C. $\left(x - \frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{2}x = 60$

D. $\left(x - \frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x\right) = 60$

8. Własności kątów

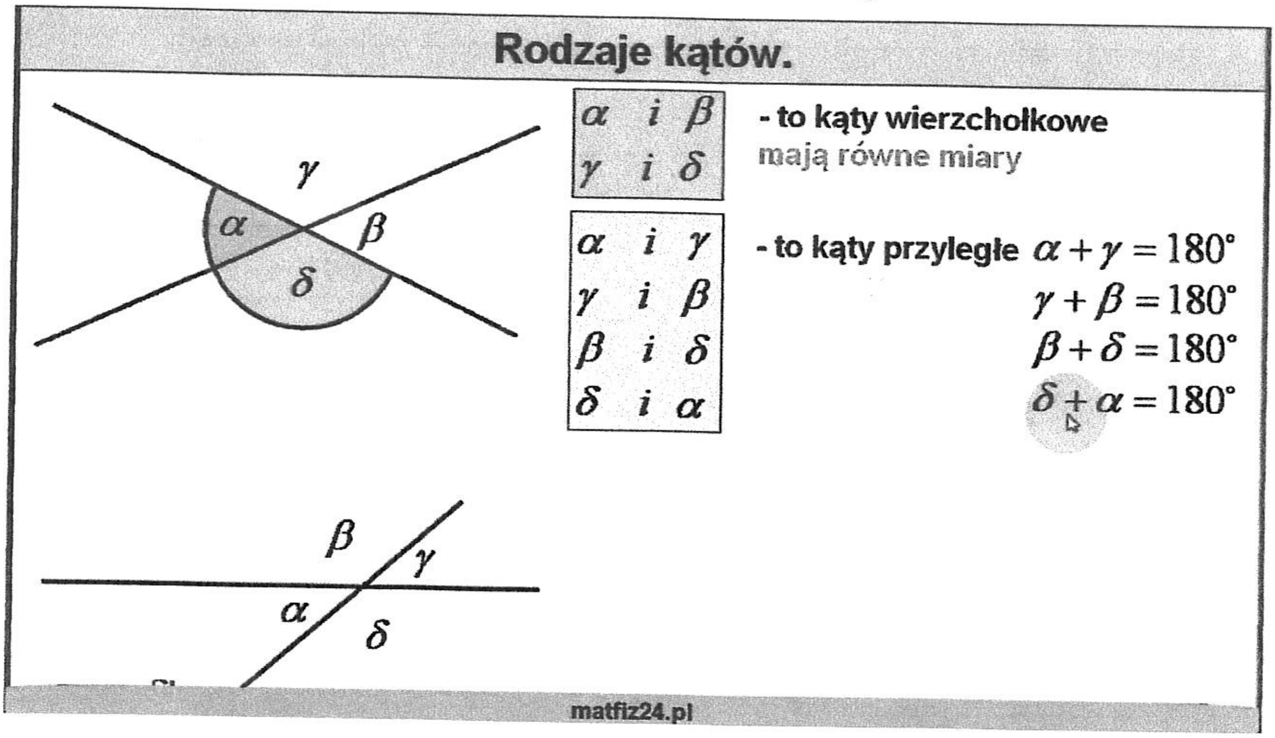


Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

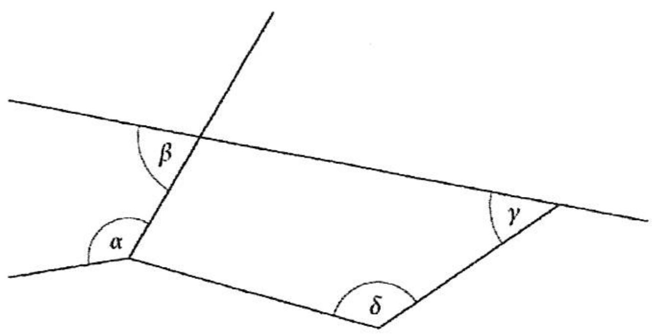
Fundusze Europejskie
Program Regionalny

SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



1 Na rysunku zaznaczono i podpisano literami greckimi cztery kąty. Wskaż wśród nich <u>wszystkie</u> kąty ostre. (... / 1 p.)



A. α

B. β

C. γ

D. δ

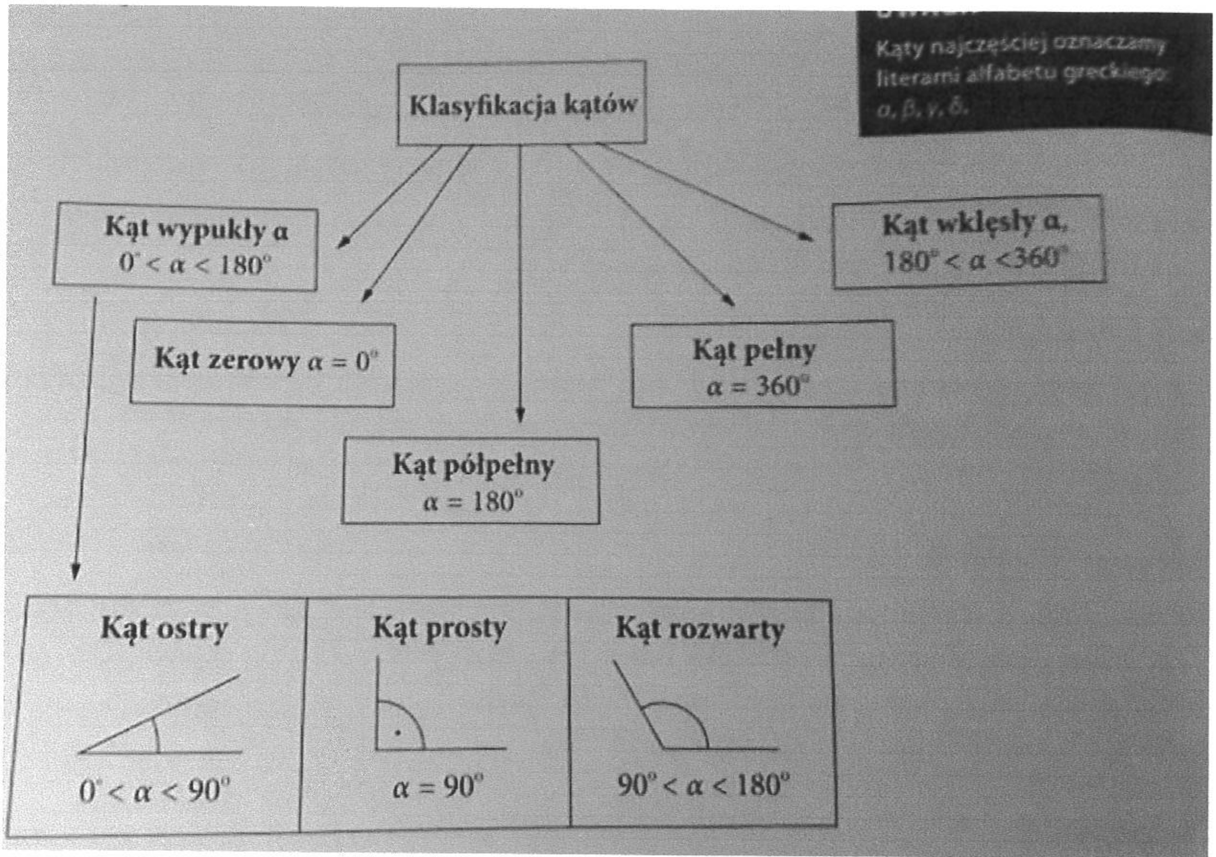
2 Określ rodzaj kąta o podanej mierze. (... / 3 p.)

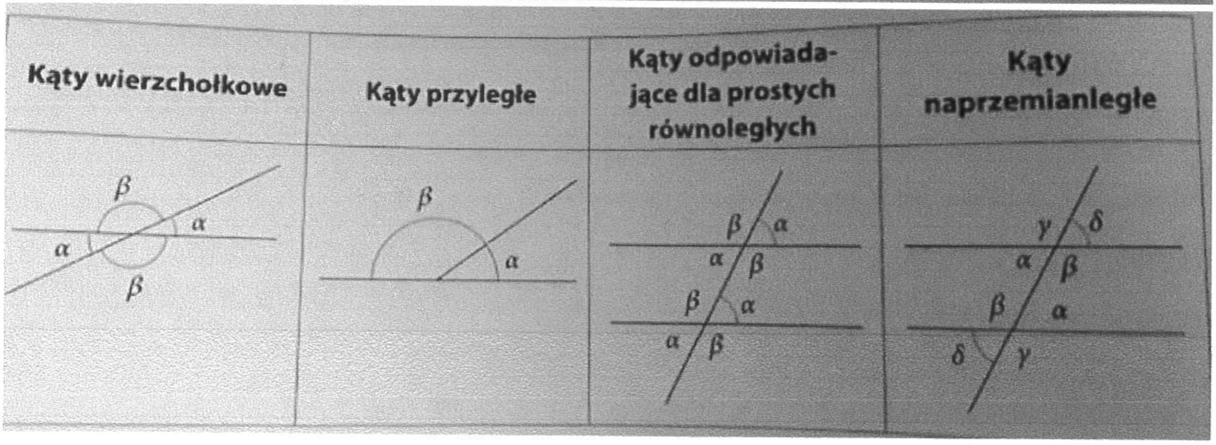
a) 90°: ______________________________

b) 39°: ______________________________

c) 98°: ______________________________

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

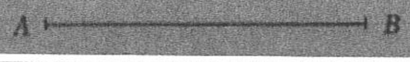




Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

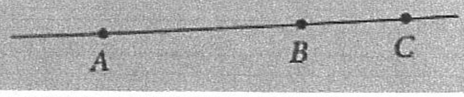
9. Nierówność trójkąta

Odcinek oznaczamy, podobnie jak prostą, dwoma punktami i czytamy, że jest to odcinek o końcach w punktach A i B.

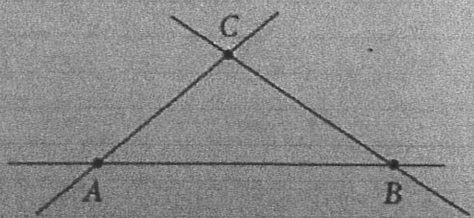


O punktach, które leżą na jednej prostej, mówimy, że są **współliniowe**.

Wówczas $|AB| + |BC| = |AC|$.



Przez trzy punkty, które nie są współliniowe, można poprowadzić trzy proste.



Wówczas zachodzą nierówności: $|AB| + |BC| > |AC|$, $|AC| + |BC| > |AB|$, $|AB| + |AC| > |BC|$. Nierówności te nazywamy **nierównościami trójkąta ABC**.

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeśli suma długości dowolnych dwóch spośród nich jest większa od długości trzeciego odcinka.

1 Dwa boki trójkąta mają długość 10 cm i 30 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok? (... / 1 p.)

A. 40 cm **B.** 50 cm **C.** 10 cm **D.** 35 cm

2 Czy z trzech odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt? Zapisz obliczenia uzasadniające odpowiedź. (... / 2 p.)

a) 7 cm, 4 cm, 10 cm: ______________________

b) 6 cm, 8 cm, 15 cm: ______________________

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie
Program Regionalny

SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO

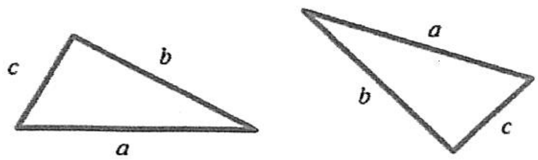
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

10. Figury przystające

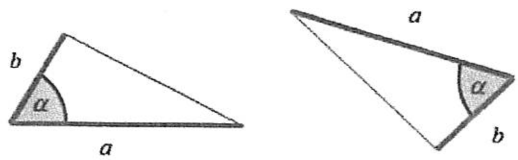
Figurami przystającymi nazywamy wszystkie figury, które mają taką samą liczbę boków, o takiej samej długości a kąty między nimi mają takie same wartości. Dlatego o figurach przystających mówimy, wtedy gdy jedna figura stanowi odbicie lustrzane drugiej lub wtedy, kiedy jedną można otrzymać za pomocą symetrii i skończonej liczby obrotów oraz przesunięć drugiej z nich. Figury te mają takie samo pole powierzchni i można nałożyć jedną na drugą.

Podsumowując **figury przystające są to takie same figury, mają taki sam kształt i wielkość** są tylko przesunięte lub obrócone lub przesunięte i obrócone.

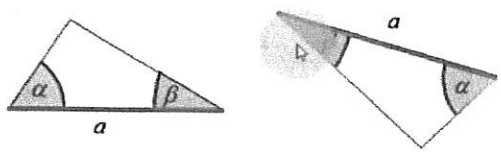
Pierwsza cecha przystawania trójkątów: Bok-Bok-Bok (BBB).
Jeśli dwa trójkąty mają odpowiednie boki równej długości to są przystające (takie same).



Druga cecha przystawania trójkątów: Bok-Kąt-Bok (BKB).
Jeśli dwa trójkąty mają odpowiednie dwa boki równej długości oraz kąt między tymi bokami ma taką samą miarę, to te trójkąty są przystające (takie same).



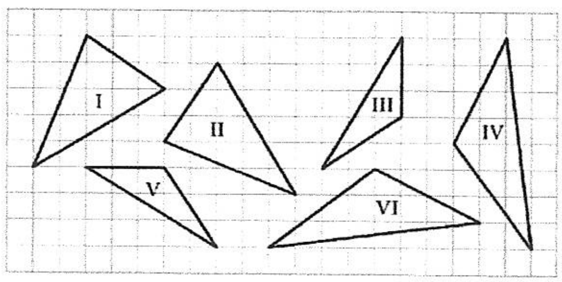
Trzecia cecha przystawania trójkątów: Kąt-Bok-Kąt (KBK).
Jeśli dwa trójkąty mają bok tej samej długości i dwa kąty przy tym boku mają równe miary, to te trójkąty są przystające (takie same).



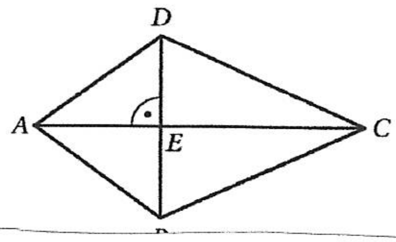
33 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. (... / 1 p.)

1.	Dwa równoległoboki o bokach długości 2 cm i 4 cm zawsze są przystające.	**P**	**F**
2.	Dwa odcinki równoległe do tej samej prostej zawsze są przystające.	**P**	**F**

34 Wskaż pary trójkątów przystających. (... / 3 p.)

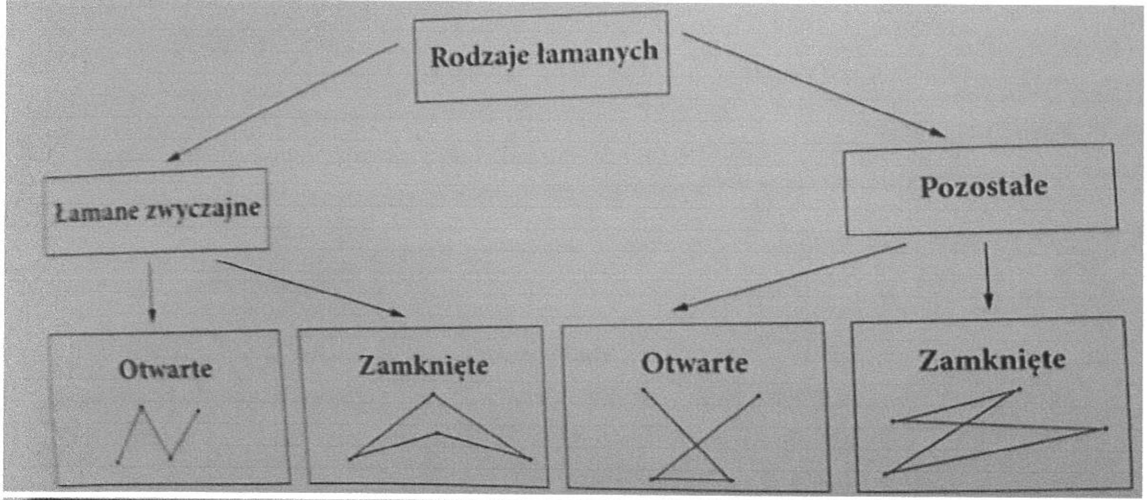


35 Przekątne deltoidu dzielą go na trójkąty. Wypisz trzy pary trójkątów przystających. (... / 3 p.)



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

11. Wielokąty foremne



Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą razem z tą łamaną.

- Suma kątów wewnętrznych wielokąta o n bokach wyraża się wzorem:

$$180° \cdot n - 360° = 180° \cdot (n-2).$$

Przekątna wielokąta jest to odcinek łączący dwa wierzchołki, który nie jest bokiem.

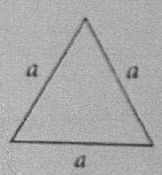
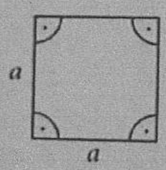
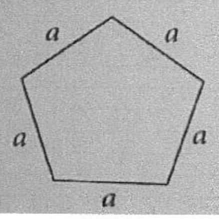
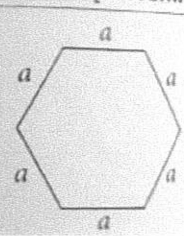
- Liczba przekątnych wielokąta o n bokach wyraża się wzorem $\frac{(n-3)}{2} \cdot n$.

Wielokąt foremny jest wielokątem, którego wszystkie boki i kąty są równe.

- W wielokącie foremnym miary kątów wewnętrznych są równe. Zatem obliczając miarę kąta wewnętrznego α, należy sumę miar kątów wewnętrznych $180° \cdot (n-2)$ podzielić przez liczbę n wierzchołków wielokąta. Stąd otrzymujemy wzór na miarę kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym:

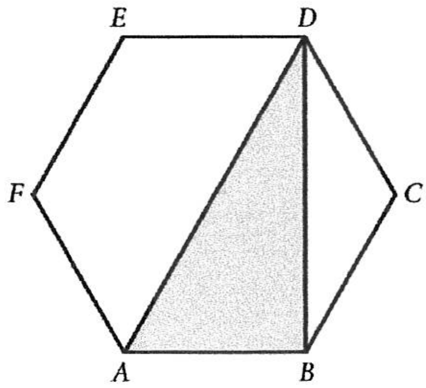
$$\alpha = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180°.$$

PRZYKŁADY WIELOKĄTÓW FOREMNYCH

Trójkąt równoboczny	Kwadrat	Pięciokąt foremny	Sześciokąt foremny
			

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Bok sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 3 cm. Oblicz pole trójkąta ABD. (... / 3 p.)

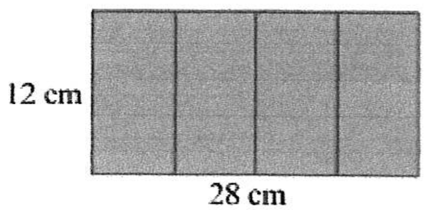


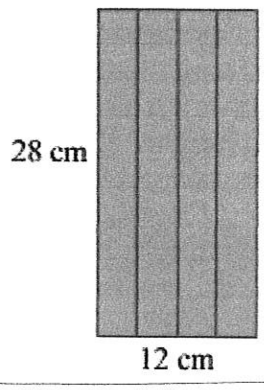
Wszystkie wierzchołki pewnego wielokąta foremnego leżą na okręgu. Środek tego okręgu i trzy kolejne wierzchołki wielokąta wyznaczają czworokąt o kątach: 48°, 78°, 78°, 156° . Ile wierzchołków ma ten wielokąt foremny? (... / 3 p.)

Suma wszystkich kątów wewnętrznych pewnego wielokąta foremnego jest równa 2700° . Ile wierzchołków ma ten wielokąt? (... / 3 p.)

12. Graniastosłupy

27 Maja zrobiła dwa pudełka w kształcie graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o różnych objętościach. Powierzchnię boczną każdego z tych graniastosłupów wykonała z takich samych prostokątów o wymiarach 28 cm i 12 cm (patrz rysunek). Oblicz różnicę objętości tych graniastosłupów. Zapisz obliczenia. (... / 3 p.)





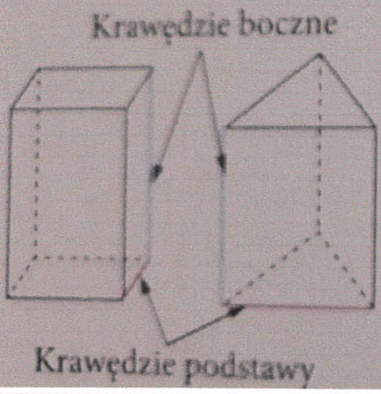
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie
Program Regionalny

SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

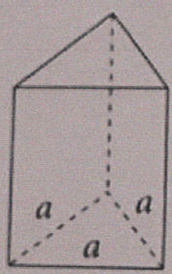
Graniastosłup prosty to graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są prostokątami.



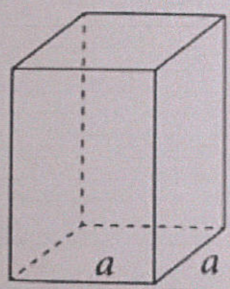
Krawędź boczna jest jednocześnie **wysokością** graniastosłupa prostego. Podstawy graniastosłupa są dowolnymi wielokątami przystającymi.

Graniastosłup pochyły to graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są równoległobokami.

Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.



Graniastosłup prawidłowy trójkątny



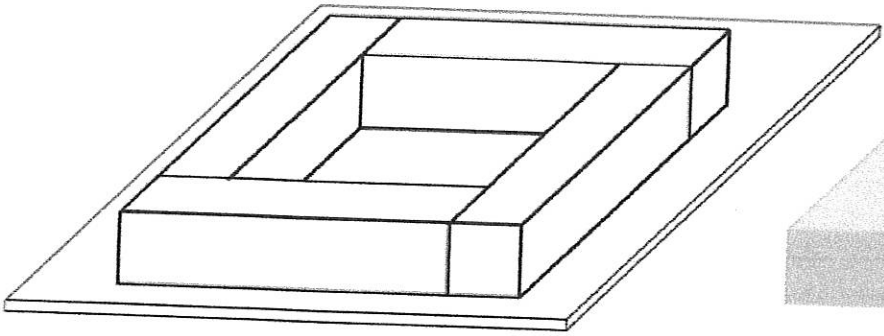
Graniastosłup prawidłowy czworokątny

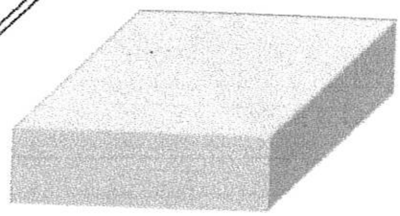
Prostopadłościan to graniastosłup prosty, którego wszystkie ściany są prostokątami.

Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

24 Cztery jednakowe drewniane elementy, każdy w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$, przyklejono do metalowej płytki w sposób pokazany na rysunku I. (... / 1 p.)


Rysunek I

gipsowy odlew

Rysunek II

W ten sposób przygotowano formę, którą wypełniono masą gipsową, i tak otrzymano gipsowy odlew w kształcie prostopadłościanu, pokazany na rysunku II.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

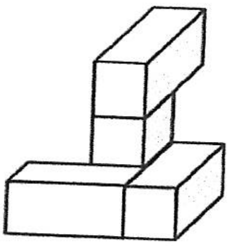
Objętość drewna, z którego zbudowano formę, jest równa **A/B**.

A. 144 cm^3 **B.** 36 cm^3

Objętość gipsowego odlewu jest równa **C/D**.

C. 162 cm^3 **D.** 98 cm^3

25 Cztery jednakowe prostopadłościenne klocki, każdy o wymiarach $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, ułożono tak, jak przedstawiono na rysunku. (... / 2 p.)



Następnie do tej budowli dołożono sześcienne klocki o krawędzi długości 1 cm tak, aby powstał prostopadłościan najmniejszy z możliwych.

Uzupełnij zdania. Wpisz w każdą lukę odpowiednią liczbę.

Liczba sześciennych klocków o krawędzi długości 1 cm, które należy dołożyć do budowli, jest równa ______. Najmniejszy z możliwych prostopadłościanów, który w ten sposób otrzymano, ma wymiary ___ cm × ___ cm × ___ cm.

13 i 14. Objętość graniastosłupa i pole powierzchni graniastosłupa

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$1\ \text{km}^3 = (1000\ \text{m})^3 = 10^9\ \text{m}^3 = (10\,000\ \text{dm})^3 = 10^{12}\ \text{dm}^3 = (100\,000\ \text{cm})^3 = 10^{15}\ \text{cm}^3$

$1\ \text{m}^3 = (10\ \text{dm})^3 = 10^3\ \text{dm}^3 = (100\ \text{cm})^3 = 10^6\ \text{cm}^3 = (1000\ \text{mm})^3 = 10^9\ \text{mm}^3$

$1\ \text{m}^3 = 10^{-12}\ \text{mm}^3 = 10^{-9}\ \text{dm}^3 = 10^{-6}\ \text{cm}^3 = 10^{-9}\ \text{km}^3$

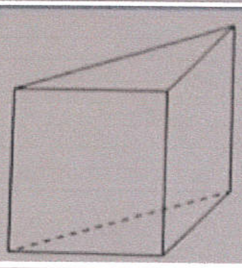
$1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{litr} = 1000\ \text{cm}^3$

$1\ \text{cm}^3 = 0{,}001\ \text{dm}^3 = 1\ \text{militr}$

$1000\ \text{ml} = 1\ \text{litr}$

$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \frac{5}{18}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

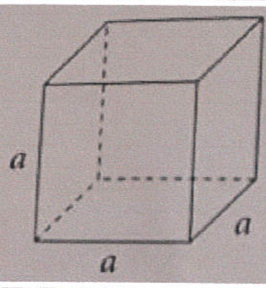
$$1\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0{,}001\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = \frac{18}{5}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 3{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Ogólny wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa:

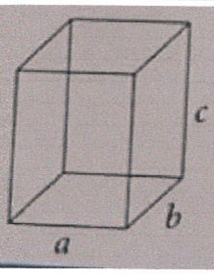
$$P_c = P_b + 2P_p,$$

gdzie P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa,
P_p – pole powierzchni podstawy graniastosłupa.



Wzór na pole powierzchni całkowitej sześcianu:

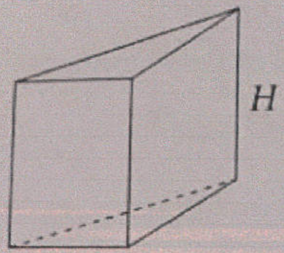
$$P_c = 6a^2$$



Wzór na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

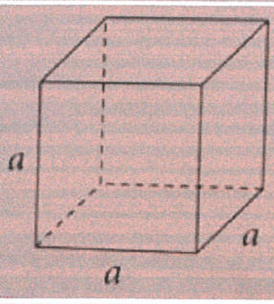


Ogólny wzór na objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H,$$

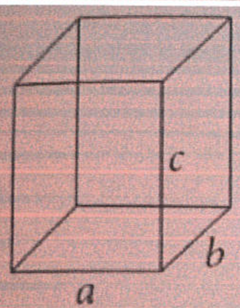
gdzie H – wysokość graniastosłupa,

P_p – pole powierzchni podstawy graniastosłupa.



Wzór na objętość sześcianu:

$$V = a^3$$



Wzór na objętość prostopadłościanu:

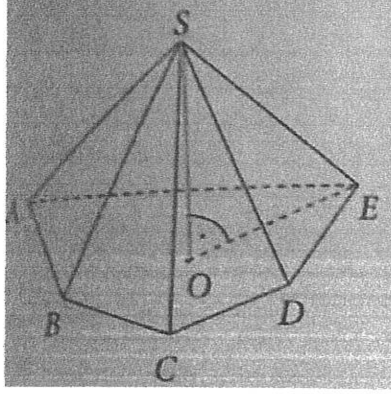
$$V = 2abc$$

ZAMIANA JEDNOSTEK DŁUGOŚCI I POWIERZCHNI
$1\ km = 1000\ m = 10^3\ m = 10\,000\ dm = 10^4\ dm = 100\,000\ cm = 10^5\ cm = 10^6\ mm$
$1\ km^2 = (1000\ m)^2 = 10^6\ m^2 = (10\,000\ dm)^2 = 10^8\ dm^2 = (100\,000\ cm)^2 = 10^{10}\ cm^2$
$1\ m^2 = (10\ dm)^2 = 10^2\ dm^2 = (100\ cm)^2 = 10^4\ cm^2 = (1000\ mm)^2 = 10^6\ mm^2$
$1\ dm^2 = (10\ cm)^2 = 10^2\ cm^2 = (100\ mm)^2 = 10^4\ mm^2$
$1\ cm^2 = (100\ mm)^2 = 10^2\ mm^2$
$1\ ha = (100\ m)^2 = 10^4\ m^2 = 100\ a$
$1\ a = (10\ m)^2 = 10^2\ m^2 = (0{,}01\ ha)^2 = 10^{-2}\ ha$
$1\ m^2 = 10^{-4}\ ha = 10^{-6}\ km^2$
$1\ dm^2 = 10^{-2}\ m^2 = 10^{-8}\ km^2$
$1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2 = 10^{-10}\ km^2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

15 i 16. Ostrosłup i objętość ostrosłupa

Ostrosłupem nazywamy bryłę, której podstawą jest wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



AS, BS, CS, DS, ES – krawędzie boczne

SO – wysokość

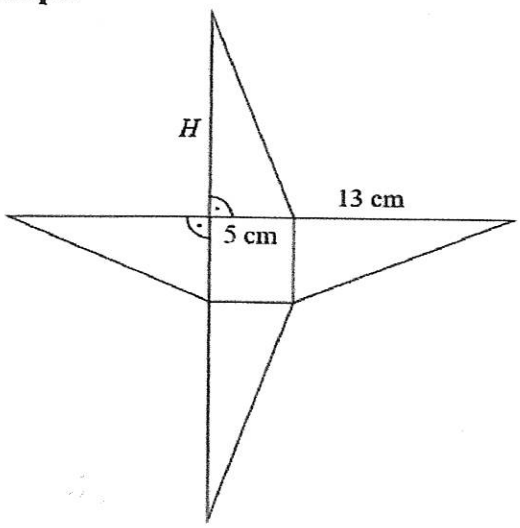
$ABCDE$ – podstawa ostrosłupa

ABS, BCS, CDS, DES, AES – ściany boczne

S – wierzchołek ostrosłupa

O – spodek wysokości

23 **Podstawą ostrosłupa o wysokości *H* jest kwadrat. Na rysunku przedstawiono siatkę i podano długości niektórych krawędzi tego ostrosłupa.** (... / 3 p.)



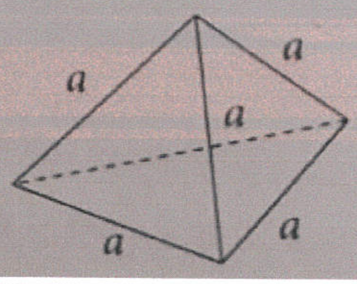
Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Wysokość ostrosłupa to odcinek prostopadły do podstawy poprowadzony z wierzchołka ostrosłupa.

Spodek wysokości jest to rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny, a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Czworościan foremny to ostrosłup prawidłowy, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.

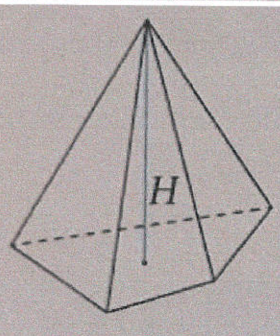


Ogólny wzór na pole powierzchni ostrosłupa:

$$P_c = P_b + P_p,$$

gdzie P_b – pole powierzchni bocznej ostrosłupa

P_p – pole powierzchni podstawy ostrosłupa.



Ogólny wzór na objętość ostrosłupa:

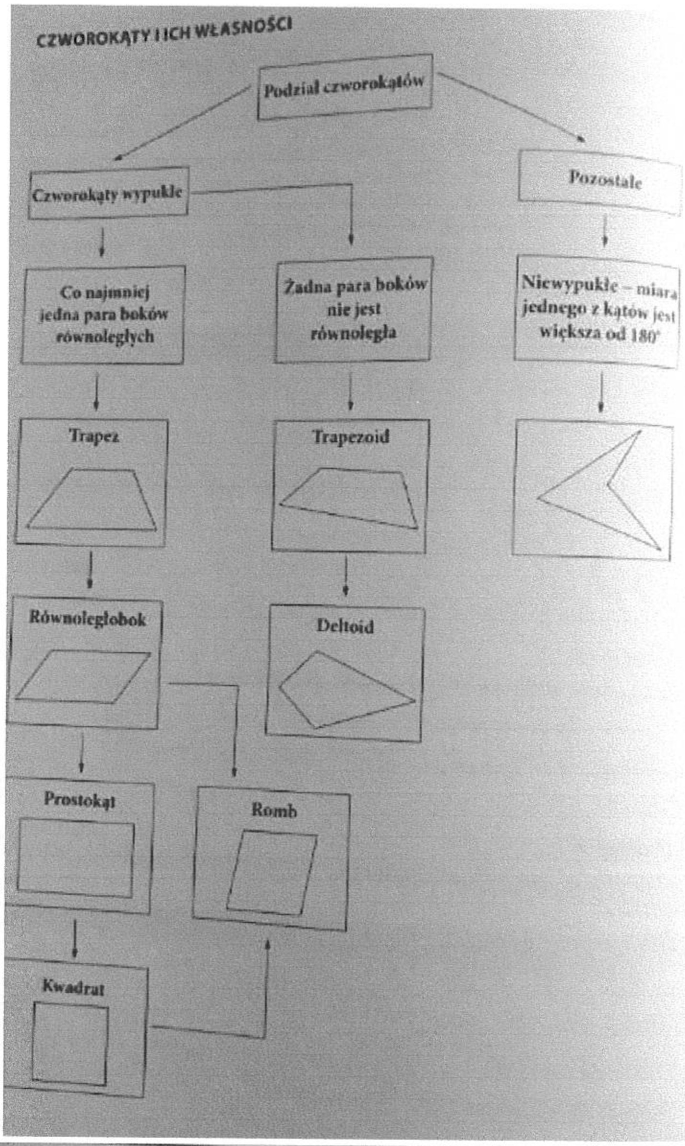
$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

gdzie H – wysokość ostrosłupa,

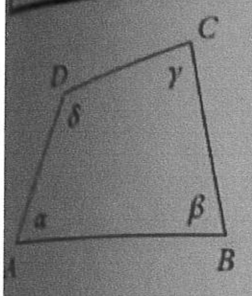
P_p – pole powierzchni podstawy ostrosłupa.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

17. Figury płaskie



Czworokąt to wielokąt mający cztery boki.



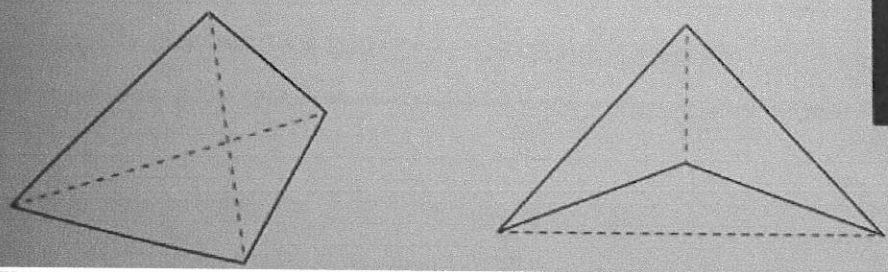
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – kąty wewnętrzne

AB i DC oraz AD i BC – boki przeciwległe

Suma kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

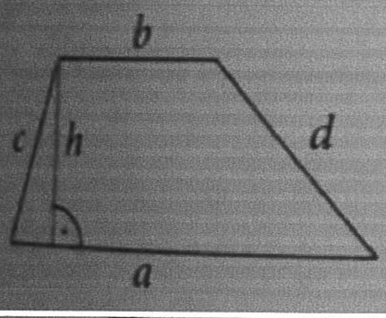
- Każdy czworokąt ma dwie przekątne.



PAMIĘTAJ!
Przekątna nie musi zawierać się w czworokącie.

Trapezy są czworokątami, które mają co najmniej jedną parę boków równoległych.

- **Wysokość** h trapezu jest to odcinek prostopadły do podstaw.

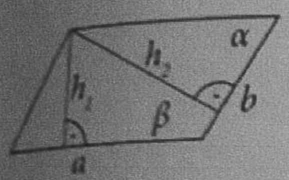


a, b – podstawy trapezu

c, d – ramiona trapezu

h – wysokość trapezu

Równoległoboki są czworokątami, które mają dwie pary boków równoległych.



h_1 – wysokość do boku a

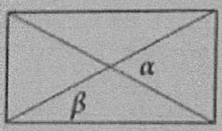
h_2 – wysokość do boku b

$\alpha + \beta = 180^\circ$

- Własności równoległoboku:
  - długości dwóch przeciwległych boków są równe,
  - miary przeciwległych kątów są równe,
  - suma miar dwóch kolejnych kątów jest równa 180°,
  - punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowę.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Prostokąty to równoległoboki, w których wszystkie kąty są proste.

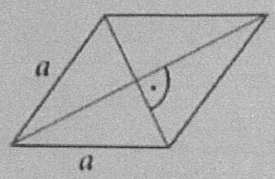


α – kąt między przekątnymi

β – kąt między bokiem i przekątną

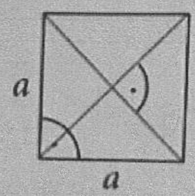
- Własności prostokąta:
  - prostokąt ma wszystkie własności równoległoboku,
  - przekątne w prostokącie są równej długości.

Romby to równoległoboki, których wszystkie boki są równej długości.



- Własności rombu:
  - romb ma wszystkie własności równoległoboku,
  - przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym,
  - przekątne dzielą kąty rombu na połowy.

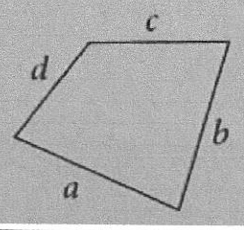
Kwadraty to romby, w których wszystkie kąty proste.



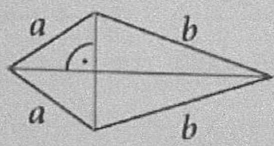
- Własności kwadratu:
  - kwadrat ma wszystkie własności rombu i prostokąta,
  - każda przekątna tworzy z bokiem kąt 45°,
  - przekątna kwadratu o boku a wyraża się wzorem $d = a\sqrt{2}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Trapezoidy są czworokątami, które nie mają żadnej pary boków równoległych.



Deltoidy są czworokątami, które mają dwie pary sąsiednich boków równej długości i przekątne prostopadłe.



Własności deltoidu:

- kąty zawarte między bokami różnej długości są równe,
- przekątna łącząca kąty o równych miarach dzieli go na dwa trójkąty równoramienne.

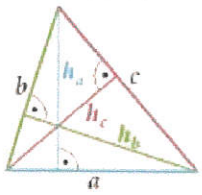
Trójkąty i czworokąty

L – obwód figury, P – pole figury

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań". Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Trójkąt

dowolny



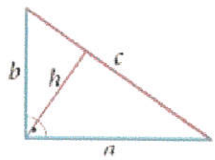
$L = a + b + c$

$P = \frac{1}{2}ah_a$

$P = \frac{1}{2}bh_b$

$P = \frac{1}{2}ch_c$

prostokątny

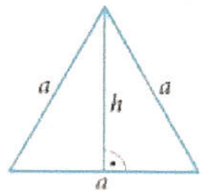


$L = a + b + c$

$P = \frac{1}{2}ab$

$P = \frac{1}{2}ch$

równoboczny

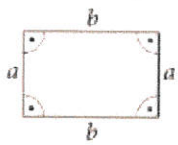


$L = 3a$

$P = \frac{1}{2}ah$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

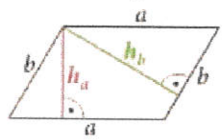
Prostokąt



$L = 2a + 2b$

$P = ab$

Równoległobok

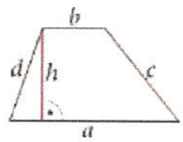


$L = 2a + 2b$

$P = ah_a$

$P = bh_b$

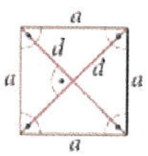
Trapez



$L = a + b + c + d$

$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Kwadrat

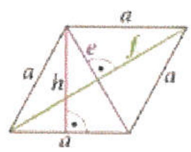


$L = 4a$

$P = a^2$

$P = \frac{d^2}{2}$

Romb

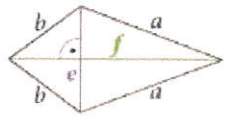


$L = 4a$

$P = ah$

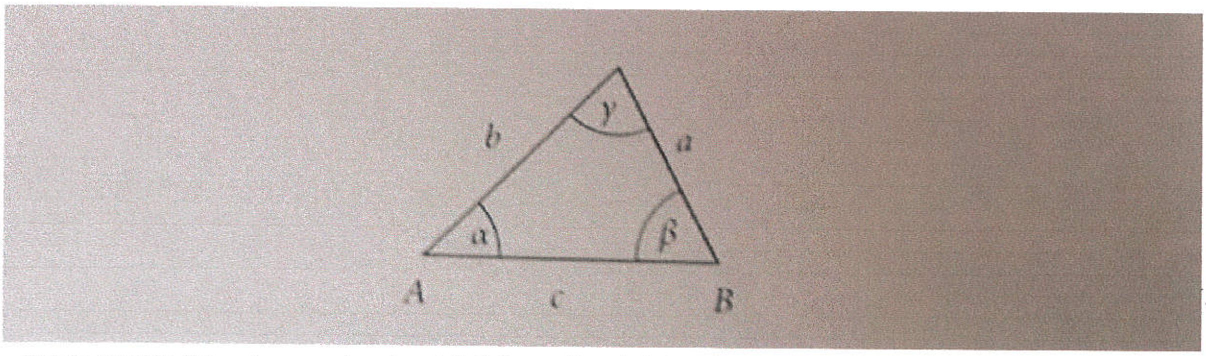
$P = \frac{ef}{2}$

Deltoid



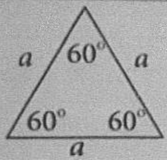
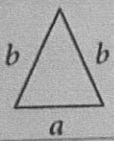
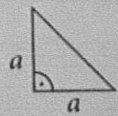
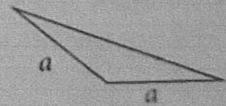
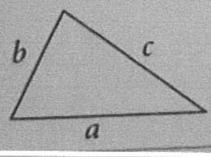
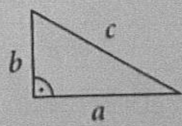
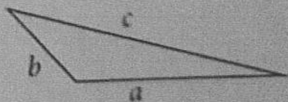
$L = 2a + 2b$

$P = \frac{ef}{2}$



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

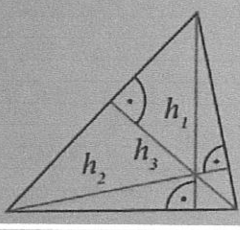
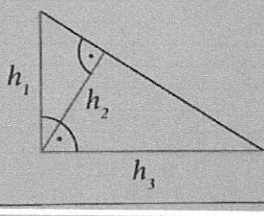
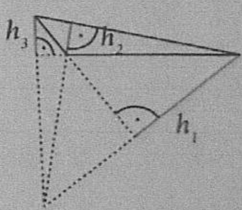
RODZAJE TRÓJKĄTÓW

	Trójkąt ostrokątny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt rozwartokątny
Równoboczny		—	—
Równoramienny			
Różnoboczny			

- W każdym trójkącie suma dowolnych dwóch boków jest większa od trzeciego boku.

Wysokość trójkąta jest to odcinek poprowadzony z wierzchołka trójkąta prostopadle do przeciwległego boku.

- Wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie rozwartokątnym – poza trójkątem, natomiast w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego.

Trójkąt ostrokątny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt rozwartokątny
		

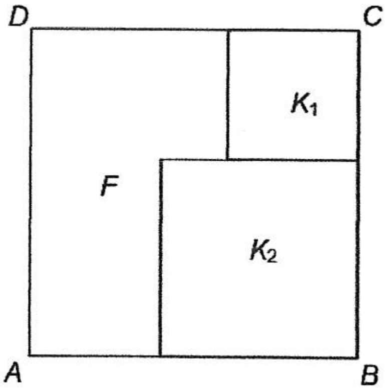
Środkowa trójkąta jest to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Suma kątów wewnętrznych α, β, γ w trójkącie **zawsze** jest równa 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

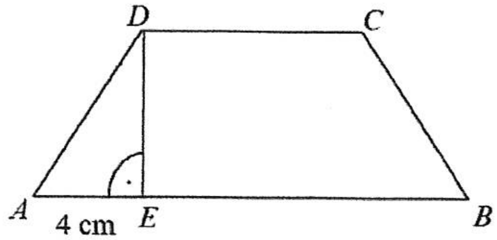
19 **Na rysunku przedstawiono kwadrat $ABCD$ o polu 400 cm^2. Figurę tę podzielono na kwadrat K_1 o polu 49 cm^2 i kwadrat K_2 oraz figurę F (patrz rysunek).** (... / 3 p.)



Oblicz obwód figury F. Zapisz obliczenia.

20 **Trapez równoramienny $ABCD$, którego pole jest równe 72 cm^2, podzielono na trójkąt AED i trapez $EBCD$. Odcinek AE ma długość równą 4 cm, a odcinek CD jest od niego 2 razy dłuższy.** (... / 3 p.)

Oblicz pole trójkąta AED. Zapisz obliczenia.



22 Na rysunku przedstawiono trójkąt równoramienny KLM o ramionach KM i LM. Miara kąta KML jest dwa razy większa niż miara kąta KLM. (... / 1 p.)

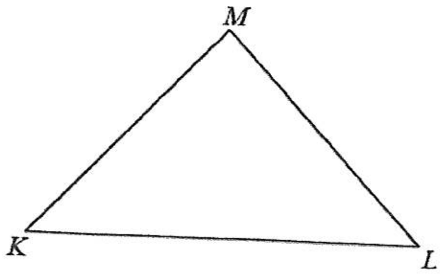
Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Miara kąta KLM jest równa **A/B**.

A. 40°　　**B.** 45°

Trójkąt KLM jest **C/D**.

C. rozwartokątny　　**D.** prostokątny



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie Program Regionalny
SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

18. O ile procent więcej o ile mniej

O ile procent więcej, o ile mniej.

a)

10 zł – różnica wartości (50 zł – 40 zł)
40 zł – wartość bazowa (kieszonkowe do którego się odnosimy)

$$\frac{50-40}{40}=\frac{10}{40}=0,25=25\%$$

Odpowiedź: Kieszonkowe Jacka było większe o 25%.

O ILE % MNIEJ? O ILE %WIĘCEJ?

Przykład:
O ile procent piłka jest tańsza od roweru?
- 100% - to cena roweru, czyli 250zł
- różnica w cenie to 50zł
- 50zł z 250zł

$$\frac{50}{250}=\frac{1}{5}=0,2=20\%$$

Odp.:
Piłka jest tańsza od roweru o 20%.

Przykład:
O ile procent rower jest droższy od piłki?
- 100% - to cena piłki, czyli 200zł
- różnica w cenie to 50zł
- 50zł z 200zł

$$\frac{50}{200}=\frac{1}{4}=0,25=25\%$$

Odp.:
Rower jest droższy od piłki o 25%.

Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$2\text{ zł} - 1{,}50\text{ zł} = 0{,}50\text{ zł}$ różnica cen

$$\frac{\textbf{różnica cen}}{\textbf{cena jabłek na targu}} \cdot \mathbf{100\%}$$

$$\frac{0{,}5\cancel{0}}{1{,}5\cancel{0}} \cdot 100\% =$$ podstawiliśmy do wymienionego ułamka

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

Odp.: Jabłka w sklepie są o $33\frac{1}{3}\%$ droższe niż na targu.

1 Liczba 318 jest większa od liczby 265 (... / 1 p.)

A. o 20%. **B.** o 25%. **C.** o 30%. **D.** o 40%.

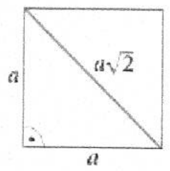
2 a) Cenę biletu na pociąg z Agrestowa do Borówkowa podniesiono z 20 zł do 25 zł. (... / 2 p.)
O ile procent wzrosła cena biletu?
b) Cenę biletu na pociąg z Chmurna do Deszczowa obniżono z 25 zł do 20 zł.
O ile procent obniżono cenę biletu?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

19 i 20. Kwadrat i jego połowa, trójkąt równoboczny i jego połowa

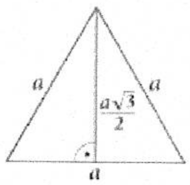
Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

Kwadrat



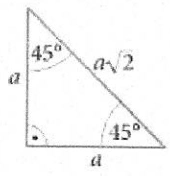
Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

Trójkąt równoboczny



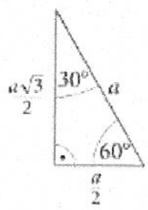
- Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Pole trójkąta równobocznego o boku długości a jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Połowa kwadratu



Trójkąt o kątach 45°, 45°, 90° ma boki długości $a, a, a\sqrt{2}$.

Połowa trójkąta równobocznego

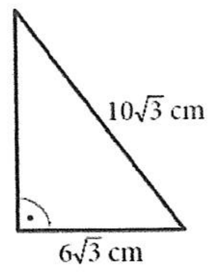


Trójkąt o kątach 30°, 60°, 90° ma boki długości $a, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1 Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 6 cm. Oblicz obwód tego trójkąta. (... / 3 p.)

2 Pole trójkąta jest równe: (... / 1 p.)



A. 70 cm^2.

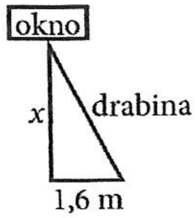
B. 72 cm^2.

C. 74 cm^2.

D. 76 cm^2.

3 (... / 3 p.)

Drabina jest o $0,4$ m dłuższa niż odległość okna od ziemi (na rysunku oznaczona literą x). Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się okno.

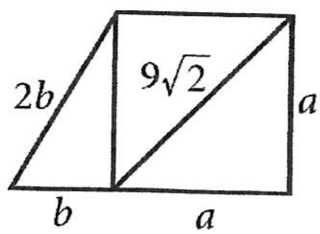


7 Dane są cztery liczby: $8\sqrt{3}$, $16\sqrt{3}$, 24 i 16. Po wykreśleniu jednej z nich otrzymamy długości boków trójkąta o kątach: 30°, 60°, 90°. Którą z tych liczb należy wykreślić? (... / 1 p.)

A. $8\sqrt{3}$ **B.** $16\sqrt{3}$ **C.** 24 **D.** 16

8 (... / 4 p.)

Z kwadratu i trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° zbudowano trapez taki jak na rysunku. Oblicz jego obwód.



Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020