Fundusze Europejskie Program Regionalny | SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO | Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

LO św. Marii Magdaleny w Poznaniu

Tytuł zajęć

„ Zajęcia wyrównawcze z matematyki”

Autor opracowania

Edyta Sidor-Banaszek

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.: „*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań*”

Poznań 2021

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Geometria płaska – trójkąty	2
2.	Geometria płaska – okręgi i koła	1
3.	Geometria płaska – pole koła i pole trójkąta	2
4.	Geometria płaska - czworokąty	2
5.	Geometria płaska – pole czworokąta	1
6.	Trygonometria	2
Łączna liczba godzin		10

1 . Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

Uczeń przypomni sobie:

- podstawowe pojęcia geometryczne (punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt);
- pojęcie figury wklęsłej i wypukłej;
- pojęcie figury ograniczonej i nieograniczonej;
- wiadomości o kątach (kąt prosty, ostry, rozwarty, kąty przyległe, kąty wierzchołkowe);
- położenie prostych na płaszczyźnie, pojęcie odległości punktu od prostej i pojęcie odległości między prostymi równoległymi;
- pojęcie symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta oraz jaką własność ma dowolny punkt leżący na symetralnej odcinka (dwusiecznej kąta);
- twierdzenie o dwóch prostych równoległych, przeciętych trzecią prostą;
- podział trójkątów ze względu na boki i kąty;
- twierdzenie o sumie miar kątów w trójkącie;

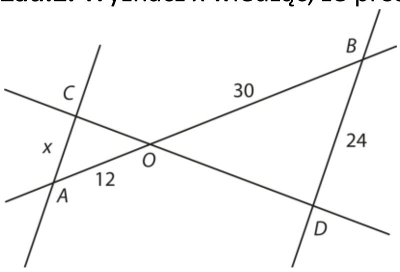
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

- na czym polega nierówność trójkąta;
- twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta;
- twierdzenie Pitagorasa;
- twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
- twierdzenie Talesa;
- twierdzenie o wysokościach w trójkącie;
- twierdzenie o środkowych w trójkącie;
- pojęcie trójkątów przystających oraz cechy przystawania trójkątów;
- trójkątów podobnych oraz cechy podobieństwa trójkątów.

Zadania do rozwiązania na zajęciach:

Zad.1. Znajdź wielokąt, w którym liczba przekątnych jest 5 razy większa od liczby boków. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych tego wielokąta.

Zad.2. Wyznacz x wiedząc, że proste k i l są równoległe.



Zad.3. Sprawdź, czy trójkąt o bokach $(\sqrt{2}+1)$ cm, $(\sqrt{2}+1)$ cm, $2\sqrt{2}$ cm jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Zad.4. Boki trójkąta ABC mają długości : $|AB|$ = 2,4 cm, $|BC|$ = 3,2 cm, $|AC|$ = 4 cm.
a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
b) Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta prostokątnego $A_1B_1C_1$, w którym jedna z przyprostokątnych jest równa 4 cm, a druga jest o 2 cm krótsza od przeciwprostokątnej.
c) Podaj skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A_1B_1C_1$.

Zad. 5. W trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych |AC|=16 i |BC|= 12 poprowadzone na przyprostokątne środkowe przecięły się w punkcie S. Oblicz długość odcinka AS.

Zad. 6. W równoległoboku ABCD wysokość poprowadzona z wierzchołka D dzieli bok AB na odcinki $|AE| = 3\sqrt{3}$ i $|EB| = 5\sqrt{3}$. Przekątna BD ma długość 12. Oblicz długość odcinków, na jakie przekątną BD dzieli symetralna boku AB.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

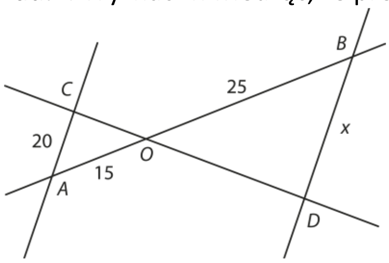
Zad. 7. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C, dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A dzieli przeciwległą przyprostokątną na odcinki o długościach |EC|=2 i |EB|=6. Oblicz obwód trójkąta.

Zad. 8. Oblicz sumę odległości środka ciężkości trójkąta równobocznego od jego boków, jeśli długość boku tego trójkąta jest równa $\sqrt{2}$.

<u>Zadania do samodzielnego wykonania:</u>

Zad.1. Znajdź wielokąt, w którym liczba przekątnych jest 8 razy większa od liczby boków. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych tego wielokąta.

Zad.2. Wyznacz x wiedząc, że proste k i l są równoległe.



Zad.3. Sprawdź, czy trójkąt o bokach $(\sqrt{3}+1)$ cm, $(\sqrt{3}+1)$ cm, $2\sqrt{3}$ cm jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Zad.4. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ mają długości : $|A_1B_1|$ = 7,2 cm, $|B_1C_1| = 9{,}6$ cm, $|A_1C_1|$= 12 cm.
a) Wykaż, że trójkąt jest $A_1B_1C_1$ prostokątny.
b) Wykaż, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta prostokątnego ABC, w którym jedna z przyprostokątnych jest równa 12 cm, a druga jest o 4 cm krótsza od przeciwprostokątnej.
c) Podaj skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A_1B_1C_1$.

Zad. 5. W trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych |AC|=16 i |BC|= 12 poprowadzone na przyprostokątne środkowe przecięły się w punkcie S. Oblicz długość odcinka BS.

Zad. 6. W równoległoboku ABCD wysokość poprowadzona z wierzchołka B dzieli bok AD na odcinki $|AE| = \sqrt{2}$ i $|ED| = 3\sqrt{2}$. Przekątna BD ma długość 10. Oblicz długość odcinków, na jakie przekątną BD dzieli symetralna boku AD.

Zad. 7. W trójkącie prostokątnym ABC o kacie prostym przy wierzchołku C, dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku B dzieli przeciwległą przyprostokątną na odcinki o długościach |CE|=2 i |AE|=6. Oblicz obwód trójkąta.

Zad. 8. Oblicz sumę odległości środka ciężkości trójkąta równobocznego od jego wierzchołków, jeśli długość boku tego trójkąta jest równa $\sqrt{5}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

2. Geometria płaska – okręgi i koła

Uczeń przypomni sobie:

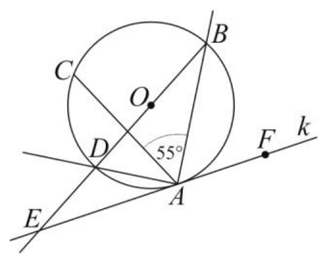
- pojęcie koła i okręgu;
- położenie prostej względem okręgu;
- twierdzenia dotyczące stycznej do okręgu;
- wzajemne położenie dwóch okręgów;
- definicję kąta środkowego w kole oraz pozna określenie kąta wpisanego w koło i kąta dopisanego do okręgu;
- twierdzenia dotyczące kątów środkowych, wpisanych i dopisanych do okręgu.

Zadania do rozwiązania na zajęciach:

Zad. 1. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym IACI=IBCI=6, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz IKCI=ILCI=2. Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

Zad. 2. Na okręgu o promieniu długości r opisano trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami trójkąta ma miarę 120^o. Oblicz pole trójkąta.

Zad. 3.
Prosta *k* jest styczna w punkcie *A* do okręgu o środku w punkcie *O*. Z punktu *A* poprowadzono dwie cięciwy *AB* i *AC*, które utworzyły kąt 55°. Półprosta $BO^{\rightarrow}$ przecina okrąg w punkcie *D* i prostą *k* w punkcie *E* (zobacz rysunek obok). Wykaż, że jeśli półprosta $AB^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta *FAC*, to trójkąt *ACD* jest równoramienny.



Zad. 4. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość $28\frac{4}{17}$. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży w odległości 8 od ramion. Oblicz:
a) długość ramion trójkąta,
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 5. Wykaż, że suma promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa średniej arytmetycznej długości przyprostokątnych tego trójkąta.

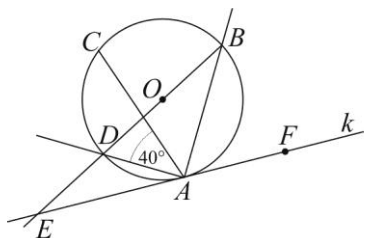
Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

<u>Zadania do samodzielnego wykonania:</u>

Zad. 1. Dany jest prostokąt ABCD. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

Zad. 2. W kąt o mierze 60^o wpisane są dwa koła styczne zewnętrznie o promieniach R_1 i R_2 $(R_1 > R_2)$. Oblicz stosunek pól $\frac{P_1}{P_2}$ $(P_1 > P_2)$ tych pól.

Zad. 3. Prosta *k* jest styczna w punkcie *A* do okręgu o środku w punkcie *O*. Z punktu *A* poprowadzono dwie cięciwy *AD* i *AC*, które utworzyły kąt 40°. Prosta *DO* przecina okrąg w punkcie *B* i prostą *k* w punkcie *E* (zobacz rysunek obok). Wykaż, że jeśli półprosta $\overrightarrow{AD}$ jest dwusieczną kąta *EAC*, to trójkąt *ABC* jest równoramienny.



Zad. 4. W trójkąt rozwartokątny równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wpisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu równym 4 cm. Punkt P jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC. Symetralna boku AC przecina ten bok w punkcie M oraz symetralną boku AB w punkcie S. Wiedząc, że $|PM| = 4{,}5\ cm$ oraz $|SM| = 10\ cm$, oblicz:
a) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC,
b) długość boku AB.

Zad. 5. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wiedząc, że obwód tego trójkąta wynosi 30 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6,5 cm.

3. Geometria płaska. Pole koła, pole trójkąta

<u>Uczeń przypomni sobie:</u>

- pojęcie pola figury;
- własności pola;
- wzór na pole koła;
- wzór na pole wycinka koła;
- stosowane wzory na pole trójkąta (np. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ czy wzór na pole trójkąta równobocznego);
- wzory na pole trójkąta (np. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$, $P = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, $P = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}$, $P = p \cdot r$);
- twierdzenie dotyczące pól figur podobnych.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zadania do rozwiązania na zajęciach:

Zad. 1. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 3 cm większa od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz pole trójkąta równobocznego.

Zad. 2. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole tego trójkąta równoramiennego.

Zad. 3. W trapezie *ABCD*, *AB* || *CD*, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie P. Pola trójkątów *ABP* i *BCP* są odpowiednio równe 75 i 15. Oblicz pole trapezu *ABCD*.

Zad. 4. W trójkącie *ABC* mamy dane: $|AC| = 8$, $|BC| = 12$ oraz $|\angle ACB| = 120°$. Przez wierzchołek *C* poprowadzono prostą prostopadłą do boku *BC*. Przecięła ona bok *AB* w punkcie *D*. Oblicz:
a) długość odcinka *CD*
b) promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*.

Zad. 5. Pole trójkąta równobocznego T_1 jest większe od pola trójkąta równobocznego *T* o 156%. Oblicz, ile razy bok trójkąta T_1 jest dłuższy od boku trójkąta *T*.

Zad. 6. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 8 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg o. Punkty D i E są punktami styczności okręgu, odpowiednio z ramion AC i BC tego trójkąta, przy czym IDCI+ICEI=IDAI+IABI+IBEI. Oblicz: a) pola trójkąta ABC ; b) promień okręgu o.

Zad. 7. Dwa boki trójkąta mają długości 17 cm i 25 cm, a jego pole jest równe 210 cm^2. Wiedząc, że promień okręg wpisanego w ten trójkąt jest równy 6 cm, oblicz :
a) długość trzeciego boku trójkąta
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 8. W trójkącie dwa boki mają długość 12 i , a kąt miedzy nimi jest równy 60^0. Oblicz:
a) pole trójkąta
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie
c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zad. 9. Cięciwy AB i CD koła przecinają się pod kątem 30^0 w punkcie E. Wiedząc, że IAEI=6 cm, IEDI=3cm, IEBI=2 cm, oblicz pole trójkąta AEC.

Zadania do samodzielnego wykonania:

Zad. 1. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 3 cm większa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz pole trójkąta równobocznego.

Zad. 2. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 1. Oblicz pole tego trójkąta równoramiennego.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań".
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 3. W trapezie *ABCD*, *AB* || *CD*, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie P. Pola trójkątów *ABP* i *BCP* są odpowiednio równe 75 i 15. Oblicz pole trapezu *ABCD*.

Zad. 4. W trójkącie *ABC* mamy dane: $|AC| = 8$, $|BC| = 12$ oraz $|\angle ACB| = 120°$. Przez wierzchołek *C* poprowadzono prostą prostopadłą do boku *BC*. Przecięła ona bok *AB* w punkcie *D*. Oblicz:
a) długość odcinka *CD*
b) promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*.

Zad. 5. Pole trójkąta równobocznego T_1 jest większe od pola trójkąta równobocznego *T* o 224%. Oblicz, ile razy bok trójkąta T_1 jest dłuższy od boku trójkąta *T*.

4. Geometria płaska – czworokąty

Uczeń przypomni sobie:

- podział czworokątów;
- własności deltoidu;
- twierdzenia opisujące własności trapezów (np. twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu);
- własności równoległoboków;
- własności wielokątów (w tym wielokątów foremnych);
- utrwali pojęcie podobieństwa i jego własności;
- co to są czworokąty podobne;
- warunek konieczny i wystarczający na to, by na czworokącie opisać okrąg;
- warunek konieczny i wystarczający na to, by w czworokąt wpisać okrąg
- pojęcie podobieństwa i jego własności;
- co to są czworokąty podobne.

Zadania do rozwiązania na zajęciach:

Zad. 1. W równoległoboku *ABCD* z wierzchołka kąta rozwartego poprowadzono dwie wysokości *DP* i *DQ* ($P \in AB$, $Q \in BC$).
a) Udowodnij, że na czworokącie *DPBQ* można opisać okrąg.
b) Oblicz promień okręgu opisanego na czworokącie *DPBQ*, jeśli podstawy równoległoboku mają długość 15 i 33, a krótsza wysokość *DP* jest równa 12.

Zad. 2. W trapez prostokątny *ABCD* ($AB \parallel CD$, $AD \perp AB$) o krótszej podstawie *DC* mającej długość 3 wpisano okrąg o środku w punkcie *O* i promieniu równym 2.
a) Udowodnij, że trójkąt *BOC* jest prostokątny.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

b) Oblicz stosunek $\frac{r}{R}$ promienia okręgu wpisanego w trójkąt *BOC* do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 3. W trapezie równoramiennym *ABCD* ($AB \parallel CD$) poprowadzono odcinek *PQ* ($P \in AD$, $Q \in BC$) równoległy do podstaw w taki sposób, że trapezy *ABQP* i *PQCD* są podobne. Wiedząc, że podstawy trapezu *PQCD* mają długość 6 i 12, a wysokość trapezu *ABCD* jest równa 6, oblicz:
a) skalę podobieństwa trapezów *ABQP* i *PQCD*
b) obwód trapezu *ABQP*.

Zad. 4. W trapezoidzie *ABCD* połączono środki boków, tworząc czworokąt *PQRS*.
a) Udowodnij, że czworokąt *PQRS* jest równoległobokiem.
b) Oblicz obwód równoległoboku *PQRS*, wiedząc, że $|\angle A| = 120^\circ$, $|\angle D| = 60^\circ$ oraz $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|DC| = 7$.

Zad. 5. W pewnym prostokącie o obwodzie 28 przekątne długości 10 przecinają się pod kątem α. Oblicz tangens tego kąta.

Zad. 6. W równoległoboku *ABCD* o krótszej wysokości 4 cm i obwodzie równym 26 cm tangens kąta między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego jest równy $\frac{4}{3}$. Oblicz długość krótszej przekątnej tego równoległoboku.

Zad. 7. Dany jest romb *ABCD*.
a) Udowodnij, że środkiem okręgu wpisanego w romb jest punkt przecięcia przekątnych.
b) Wiedząc, że kąt ostry rombu ma miarę 30°, a promień okręgu wpisanego w romb jest równy *r*, oblicz długości przekątnych tego rombu oraz jego obwód.

Zad. 8. W dany trapez można wpisać okrąg i na danym trapezie można opisać okrąg. Wysokość tego trapezu poprowadzona z wierzchołka przy krótszej podstawie dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki. Dłuższy odcinek ma długość 10 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

Zadania do samodzielnego wykonania:

Zad. 1. W rombie *ABCD* z wierzchołka kąta rozwartego poprowadzono dwie wysokości *DK* i *DL* ($K \in AB$, $L \in BC$).
a) Udowodnij, że na czworokącie *DKBL* można opisać okrąg.
b) Oblicz promień okręgu opisanego na czworokącie *DKBL*, jeśli długość boku rombu jest równa 20, a wysokość 16.

Zad. 2. W trapez równoramienny *ABCD* ($AB \parallel CD$) o dłuższej podstawie *AB* mającej długość 16 wpisano okrąg o środku w punkcie *O* i promieniu 4.
a) Udowodnij, że trójkąt *BOC* jest prostokątny.
b) Oblicz stosunek $\frac{r}{R}$ promienia okręgu wpisanego w trójkąt *BOC* do promienia okręgu opisanego na tym

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

trójkącie.

Zad. 3. W trapezie prostokątnym *ABCD* (*AB* || *CD*) poprowadzono odcinek *PQ* ($P \in AD$, $Q \in BC$) równoległy do podstaw w taki sposób, że trapezy *ABQP* i *PQCD* są podobne w skali $k = 3$. Wiedząc, że krótsza podstawa trapezu *ABQP* ma długość 6, a wysokość trapezu *ABCD* jest równa 8, oblicz:
a) długości podstaw trapezu *ABCD*
b) obwód trapezu *PQCD*.

Zad. 4. W deltoidzie *ABCD* połączono środki boków, tworząc czworokąt *PQRS*.
a)Udowodnij, że czworokąt *PQRS* jest prostokątem.
b) Oblicz obwód prostokąta *PQRS*, wiedząc, że $|\angle A| = |\angle C| = 150^\circ$, $|\angle D| = 45^\circ$ oraz $|AB| = 5$, $|AD| = 8$.

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Uczeń przypomni sobie:

- wzory na pola czworokątów (kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu);
- wzory na pole dowolnego czworokąta;
- twierdzenie dotyczące figur podobnych.

Zadania do rozwiązania na zajęciach:

Zad. 1. Dany jest równoległobok *ABCD*, w którym $|AB| = 2|AD|$, a przekątne mają długość $2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$. Oznaczmy środki boków *DC* i *BC* odpowiednio jako punkty *P* i *Q*.
a) Oblicz pole równoległoboku *ABCD*.
b) Oblicz pole czworokąta *ABPQ*.

Zad. 2. Trapez równoramienny *ABCD* jest opisany na okręgu o promieniu $2\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że przekątna tego trapezu ma długość $2\sqrt{17}$ cm, oblicz:
a) długość odcinka łączącego środki ramion trapezu
b) pole trapezu
c) długość ramienia trapezu.

Zad. 3. Rozważmy równoległoboki, w których przekątne przecinają się pod kątem 30°, a suma długości tych przekątnych jest równa 12. Wybierz równoległobok o największym polu, wyznacz to pole oraz oblicz długości boków tego równoległoboku.

Zad. 4. W rombie cosinus kąta ostrego jest równy $\frac{4}{5}$, a suma długości boku i wysokości jest równa $8\sqrt{5}$ cm.

Oblicz:
a) długości przekątnych i boku rombu

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

b) pole rombu.

Zadania do samodzielnego wykonania:

Zad. 1. Dany jest równoległobok *ABCD*, w którym boki mają długość 2 cm i 6 cm, a pole wynosi 8 cm^2. Oznaczmy środki boków *AB* i *BC* odpowiednio jako punkty *P* i *Q*.
a) Oblicz długości przekątnych równoległoboku *ABCD*.
b) Oblicz pole czworokąta *APQD*.

Zad. 2. Trapez równoramienny *ABCD* jest opisany na okręgu. Wiedząc, że przekątna tego trapezu ma długość 20 cm, a odcinek łączący środki ramion w trapezie ma 16 cm długości, oblicz:
a) pole trapezu
b) długość promienia okręgu wpisanego w trapez
c) długość ramienia trapezu.

Zad. 3. Rozważmy równoległoboki o obwodzie 16 i kącie ostrym 60°. Wybierz równoległobok o największym polu, wyznacz to pole i oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

Zad. 4. W rombie cosinus kąta ostrego jest równy $\frac{1}{4}$, a suma długości przekątnych wynosi $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Oblicz:
a) długości przekątnych i boku rombu
b) pole rombu.

6. Trygonometria

Uczeń przypomni sobie:

- określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;
- obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45°, 60°;
- podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego;
- wybrane wzory redukcyjne;
- określenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta (do 360°);
- twierdzenie sinusów i jego zastosowanie;
- twierdzenie cosinusów i jego zastosowanie.

Zadania do rozwiązania na zajęciach:

Zad. 1. Oblicz log ($\cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha$)

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie
Program Regionalny
SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Zad. 2. W trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych wynosi $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.

Zad. 3. Oblicz wartość wyrażenia: $\sin^2 75^0 + \sin^2 15^0 - 2\sin 30^0$

Zad. 4. Wykaż, że jeśli $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}3$ i α jest kątem ostrym, to $\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = 11\frac{1}{9}$.

Zad. 5. Wiedząc, że kąt α jest kątem ostrym i tg α = 3 wyznacz cos α, sinα, ctgα korzystając z podstawowych tożsamości trygonometrycznych.

Zad. 6. Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością: $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos\alpha}$

Zad. 7. W trójkącie *ABC* wysokość *BD* dzieli ramię *AC* na odcinki *AD* i *DC*. Oblicz długość *DC* jeśli $|BC| = 5, |AB| = 2\sqrt{3}, |\measuredangle BAC| = 60^0$.

Zad. 8. W prostokącie *ABCD* ($|AB|>|AD|$) przekątne mają długość 10 i przecinają się pod takim kątem α, że $\cos\alpha = 0{,}4$. Oblicz:

a) odległość wierzchołka *A* od przekątnej *BD*

b) tangens kąta nachylenia przekątnej *BD* do boku *AB*.

Zad. 9. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{9}{32}$, to $\sin\alpha + \cos\alpha = 1\frac{1}{4}$.

Zad. 10. Wiadomo, że $\alpha \in (270°, 360°)$ oraz $\frac{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -4\operatorname{ctg}\alpha$.
Oblicz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zad. 11. Oblicz:

1. $\sin 930°\operatorname{tg}(-960°) - \cos(-1380°)$
2. $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi \cdot \sin\frac{5}{6}\pi - \sin\frac{5}{4}\pi \cdot \cos\pi$

Zad. 12. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\cos 2x,\ x\epsilon < 0, 2\pi >$ oraz wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 1.

Zad. 13. Wykaż, że funkcja $f(x) = (\sin x - \cos x)^2 - 1$ jest nieparzysta.

Zad. 14. Określ ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = -1 - \sin x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$ i podaj jej zbiór wartości.

Zad. 15. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{ctg}\beta \cdot sin\alpha - tg\alpha \cdot cos\beta$, jeśli $\alpha, \beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ oraz $\cos\alpha = -\frac{11}{61}$, $\operatorname{tg}\beta = 3\frac{3}{7}$.

Zadania do samodzielnego wykonania:

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 1. Oblicz log ($\sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha$)

Zad. 2. W trójkącie prostokątnym suma sinusów kątów ostrych wynosi $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn cosinusów tych kątów.

Zad. 3. Oblicz wartość wyrażenia: $\cos^2 65^0 + \cos^2 25^0 - 2\cos 60^0$

Zad. 4. Wykaż, że jeśli $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}4$ i α jest kątem ostrym, to $\left(\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right)^2 = 6{,}25$.

Zad. 5. Wiedząc, że kąt α jest kątem ostrym i ctgα = 5 wyznacz $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sin\alpha$ korzystając z podstawowych tożsamości trygonometrycznych.

Zad. 6. Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością: $\frac{\cos\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{\sin\alpha}$

Zad. 7. W trójkącie *ABC* wysokość *AD* dzieli ramię *BC* na odcinki *BD* i *DC*. Oblicz długość *DC* jeśli $|AC| = 5, |AB| = 2\sqrt{3}, |\measuredangle ABD| = 60^0$.

Zad 8. W prostokącie *ABCD*, (□*AB*□>□*AD*□) przekątne mają długość 8 i przecinają się pod takim kątem α, że cos α = 0,25. Oblicz:

a) odległość wierzchołka *B* od przekątnej *AC*

b) tangens kąta nachylenia przekątnej *AC* do boku *AB*.

Zad. 9. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2\frac{1}{3}$, to $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = 3\frac{4}{9}$.

Zad. 10. Wiadomo, że $\alpha \in (180°, 270°)$ oraz $\frac{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 4\mathrm{tg}\,\alpha$.

Oblicz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zad. 11. Oblicz:

1. $\cos(-1290°)\,\mathrm{tg}870° - \sin(-2100°)$
2. $\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\frac{7}{6}\pi - \mathrm{tg}\frac{5}{4}\pi\cdot\sin\frac{1}{2}\pi$

Zad. 12. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $x\epsilon < 0, 2\pi >$ oraz wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 1.

Zad. 13. Wykaż, że funkcja $f(x) = x(\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x)$ jest parzysta.

Zad. 14. Określ ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = 1 - cosx$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$ i podaj jej zbiór wartości.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Zad. 15. Oblicz wartość wyrażenia $cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$, jeśli $\alpha, \beta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ oraz ctg $\alpha = -\frac{5}{12}$, tg $\beta = -\frac{3}{4}$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020