Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny w Poznaniu

Tytuł zajęć

„Udowodnię, że… .”

Autor opracowania

Mieczysław Kulas

Niniejszy skrypt powstał na potrzeby realizacji Projektu
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:
„*ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki*
w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych
Metropolii Poznań”

Poznań 2022

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”.
Opracowanie współfinansowane przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

PROGRAM ZAJĘĆ

L.p.	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	**Moduł nr 1.** (4 godziny lekcyjne) **1.1** Pojęcie pierwotne, definicja, aksjomat, twierdzenie i jego dowód, hipoteza **1.2** Budowa zdań logicznych w (*KRZ*) **1.3** Implikacja w (*KRZ*) i jej typy **1.4** Kwadrat logiczny dla czterech typów implikacji **1.5** Dowód wprost **1.6** Dowód za pomocą przekształceń równoważnych tezy **1.7** Dowód trywialny **1.8** Dowód w próżni **1.9** Dowód przez przypadki **1.10** Uwagi o schematach wnioskowania	4
2.	**Moduł nr 2.** (4 godziny lekcyjne) **2.1** Dowód nie wprost dla implikacji wykorzystujący prawo kontrapozycji **2.2** Dowód nie wprost dla implikacji wykorzystujący prawo negacji implikacji	4
3.	**Moduł nr 3.** (4 godziny lekcyjne) **3.1** Równoważność jako koniunkcja implikacji **3.2** Warunek konieczny i wystarczający (dostateczny) **3.3** Dowodzenie twierdzeń mających formę równoważności	4
4.	**Moduł nr 4.** (4 godziny lekcyjne) **4.1** Budowa zdań logicznych w (*KRK*). Forma zdaniowa jednej oraz wielu zmiennych **4.2** Typy form zdaniowych jednej zmiennej **4.3** Kwantyfikator. Forma zdaniowa poprzedzona kwantyfikatorem **4.4** Prawa de Morgana dla zdań z kwantyfikatorami. Dowody twierdzeń, w których występują kwantyfikatory. **4.5** Kontrprzykład **4.6** Dowód efektywny **4.7** Dowód nieefektywny	4
5.	**Moduł nr 5.** (4 godziny lekcyjne) Strategia konstruowania dowodów na przykładach zadań maturalnych z algebry oraz geometrii.	4
	Łączna liczba godzin	20

0. Wprowadzenie do logiki

0.1 Logika w wybranych cytatach

- „Logika przeprowadzi cię od punktu A do punktu B. Wyobraźnia zaprowadzi cię wszędzie.” Albert Einstein[1]
- „Logika, to sztuka umiejętnego mylenia się.”
  Joseph Wood Krutch[2]
- „Logika jest jak miecz – kto nią wojuje, ten od niej ginie.”
  Samuel Butler[3]
- „Logika można uzasadnić wszystko. Tak jej moc i największa wada.”
  Kate Mulgrew[4]
- „Czysta logika, to upadek ducha.”
  Antoine de Saint - Exupery[5]
- „Logika jest anatomią myślenia.”
  John Locke[6]

0.2 Sławy świata logiki

1. Arystoteles (384 – 322 p.n.e)
2. Gottfried Leibniz (1646 – 1716)
3. George Boole (1815 – 1864)
4. Lewis Carroll (1832 – 1898)
5. Georg Cantor (1845 – 1918)
6. Gottlob Frege (1848 – 1925)
7. Bertrand Russell (1872 – 1970)
8. Dawid Hilbert (1862 – 1943)
9. Kurt Gödel (1906 – 1978)
10. Alan Turing (1912 – 1954)

0.3 Logika w ujęciu praktycznym

Logiki używamy codziennie. W wielu sytuacjach prawdopodobnie nie zdajemy sobie z tego sprawy. Służy ona do tego, by formułować i wyrażać swoje myśli (w mowie lub w piśmie). Kiedy nawet nie postępujemy zgodnie z logiką, posługujemy się nią intuicyjnie. Jeśli zatem logika jest częścią naszej działalności, to gdy zaczynamy ją dostrzegać, warto przyjrzeć się jakie są jej efekty lub jakie są efekty jej braku.

Z praktycznego punktu widzenia, logika wykrywa i weryfikuje błędy w argumentowaniu, ujawnia nieścisłe sformułowania. Z drugiej strony, logika dostarcza narzędzi, za pomocą których przechodzimy od znanych informacji (nazwijmy je założeniami) do wyciągnięcia z nich logicznych informacji (wniosków). Widać tutaj zasadę przyczynowo – skutkową. Powiązanie to uwidacznia się w *zdaniach warunkowych*, tak zwanych *implikacjach*, które możemy rozpoznać, po ich konstrukcji, gdyż tworzymy je za pomocą schematu:

„Jeżeli … , to… .”

[1] Wybitny fizyk niemiecki, laureat nagrody Nobla
[2] Amerykański przyrodnik i pisarz
[3] Angielski nowelista i eseista
[4] Amerykańska aktorka
[5] Francuski pisarz
[6] Angielski filozof

Natura zdań warunkowych jest następująca. Każde z nich składa się z dwóch członów – odpowiednich zdań. Pierwszy człon, nazywany *poprzednikiem*, występuje bezpośrednio po słowie „jeżeli”. Drugi człon, określany mianem *następnika*, występuje bezpośrednio po słowie „to”. Okaże się wkrótce, że powiązanie przyczyny ze skutkiem może być o wiele subtelniejsze lub bardziej rozbudowane. Wynika to stąd, że istnieją „zwroty logiczne” typu *każdy, nie każdy, każda, każde, wszyscy, nie wszyscy, wszystkie, żaden, nikt, nic, pewien, jakiś, istnieje, nie istnieje, pewne, niektóre, albo, bądź, ani, wtedy i tylko wtedy, gdy, nie jest tak, że, nieprawda, że* i wiele innych.

Stwierdziliśmy, że logika dostarcza narzędzi, za pomocą których przechodzimy od założeń do wniosków. Jest to proces *prowadzenia wnioskowania*. Z tego punktu widzenia można powiedzieć, że *logika pozwala odróżnić wnioskowanie poprawne od niepoprawnego*. Inaczej, *logika określa warunki, w jakich zbiór prawdziwych założeń pozwala otrzymać prawdziwy wniosek*. W praktyce oznacza to, że *podchodzimy logiczne* do pewnego zagadnienia lub określonej sytuacji. Po zakończeniu procesu wnioskowania należy sprawdzić, czy otrzymany wniosek jest poprawny z formalnego punktu widzenia. W tym celu zakładamy, że wszystkie przyjęte założenia są prawdziwe i sprawdzamy, czy uzyskany wniosek wynik rzeczywiście z przyjętych założeń. Dochodzenie do prawdziwych wniosków możemy oprzeć na trzech podstawowych regułach (*zasadach*), które sformułował Bertrand Russell. Należą do nich:

- *zasada tożsamości* – każdy obiekt (byt) jest tożsamy ze sobą
- *zasada wyłączonego środka* – każde zdanie (logiczne) może być albo prawdziwe, albo fałszywe
- *zasada niesprzeczności* – jeżeli mamy dwa zdania, o których wiemy, że jedno z nich jest zaprzeczeniem drugiego, to co najmniej jedno z tych zdań musi być zdaniem fałszywym

Wyjątkową przestrzenią dla procesu prowadzenia interesujących nas wnioskowań jest przestrzeń matematyczna. Przekonamy się o tym, że *matematyka pomaga w zrozumieniu logiki*. Przykłady matematyczne wydają się wyjątkowymi ilustracjami zdań prawdziwych lub zdań fałszywych. Na odwrót, *logika pomaga w zrozumieniu matematyki*. Każda współczesna teoria matematyczna (na przykład w ramach matematyki szkolnej: *klasyczny rachunek zdań, klasyczny rachunek kwantyfikatorów, teoria zbiorów, teoria liczb naturalnych, teoria liczb rzeczywistych, geometria elementarna, teoria prawdopodobieństwa*) opiera się na odpowiednio przyjętym systemie zdań (tak zwanym *systemie aksjomatów*), które przyjmujemy jako prawdziwe, następnie wykorzystujemy narzędzia logiki, by rozwijać tę teorię, to znaczy uzyskiwać interesujące fakty o obiektach, których ta teoria dotyczy.

0.4 Logika jako dyscyplina naukowa

Logika traktowana jako dyscyplina naukowa ma swoje początki około 2400 lat temu. Nie ma wątpliwości, że jej prekursorem był Arystoteles. W cyklu sześciu pism o logice (zebrane i opublikowane pod nazwą *Organon*[7]), określa podstawowe pojęcia logiczne, na przykład *pojęcie wyrażenia* jako zdania, które jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Arystoteles analizował strukturę tak zwanych *sylogizmów*, czyli poprawnych rozumowań, zawierających przesłanki, prowadzące w konsekwencji do odpowiednich wniosków.

[7] Czyli „Narzędzie”

0.5 Główne gałęzie logiki
1. Logika Boole'a (inaczej logika algebraiczna, logika booleowska)
2. Logika formalna
3. Logika klasyczna
4. Logika kwantowa
5. Logika kwantyfikatorów (na przykład klasyczny rachunek kwantyfikatorów – (*KRK*))
6. Logika nieformalna
7. Logika nieklasyczna
8. Logika predykatów (w szczególności logika form zdaniowych)
9. Logika propozycjonalna
10. Logika rozmyta
11. Logika sylogistyczna
12. Logika symboliczna
13. Logika wielowartościowa (na przykład trójwartościowa logika Łukasiewicza)
14. Logika współczesna
15. Logika zdań (na przykład klasyczny rachunek zdań – (*KRZ*))

Moduł nr 1. (4 godziny lekcyjne)
1.1 Pojęcie pierwotne, definicja, zdanie logiczne, prawda, fałsz, twierdzenie i jego dowód, aksjomat, lemat, wniosek, hipoteza
1.2 Budowa zdań logicznych w (*KRZ*)
1.3 Implikacja w (*KRZ*) i jej typy
1.4 Kwadrat logiczny dla czterech typów implikacji
1.5 Dowód wprost
1.6 Dowód za pomocą przekształceń równoważnych tezy
1.7 Dowód trywialny
1.8 Dowód w próżni
1.9 Dowód przez przypadki

1.1 Pojęcie pierwotne, definicja, zdanie logiczne, prawda, fałsz, twierdzenie i jego dowód, aksjomat, lemat, wniosek, hipoteza

Wśród wszystkich pojęć, które spotykamy w matematyce[8] wyróżnia się tak zwane *pojęcia pierwotne* oraz pojęcia pozostałe, określane za pomocą pojęć pierwotnych. Towarzyszą im *terminy pierwotne* oraz takie terminy, które określamy za pomocą terminów pierwotnych oraz pojęć pierwotnych (lub/oraz pojęć pozostałych). Powstają w ten sposób pewne *obiekty matematyczne*. Intuicyjnie, pojęcia pierwotne to pojęcia najwcześniejsze, z tego powodu nie określamy ich za pomocą pojęć „jeszcze wcześniejszych". Możemy zatem powiedzieć, że *pojęciem pierwotnym w danej teorii matematycznej jest takie pojęcie, którego nie definiujemy*. Wybór pojęć pierwotnych dla danej dyscypliny matematycznej może być różnorodny.

Przykłady
1. W wielu teoriach matematycznej porównujemy występujące w nich obiekty między sobą. Można to zrobić za pomocą pojęcia identyczności), czyli równości obiektów (na ogół iden-

[8] Pojęcia matematyczne mogą być rozumiane jako takie pojęcia abstrakcyjne, które wyrosły na gruncie obserwacji związanych z kształtem oraz ilością oraz ich własnościami.

tyczność kojarzymy z symbolem „=”, choć w geometrii stosujemy symbol „≡”, wyróżniający figury przystające.
2. W teorii zbiorów przyjmujemy, że pojęciami pierwotnymi są dwa pojęcia: pojęcie zbioru oraz pojęcie należenia (elementu do zbioru). Istnieje wariant teorii zbiorów, w którym dodatkowym pojęciem pierwotnym jest pojęcie identyczności.
3. W szkolnej geometrii elementarnej (euklidesowej) do pojęć pierwotnych należą pojęcia pierwotne teorii zbiorów (wraz z pojęciem identyczności) oraz pojęcia naturalne dla samej geometrii elementarnej, to znaczy pojęcie punktu, pojęcie prostej, pojęcie płaszczyzny oraz pojęcie przestrzeni. W zaawansowanym ujęciu, na przykład w geometrii euklidesowej Hilberta do pojęć pierwotnych należą pojęcia: „leżeć na”, „leżeć między”, „przystawać”.
4. W arytmetyce szkolnej spotkamy bardzo wiele pojęć pierwotnych. Oprócz pojęć pierwotnych teorii zbiorów, w zależności od prezentacji programu, pojęciem pierwotnym jest pojęcie liczby naturalnej (czym innym jest liczba naturalna, a czym innym jest jej oznaczenie) lub pojęcie liczby rzeczywistej (uwaga analogiczna jak dla liczby naturalnej).

Każde pojęcie, które nie jest pojęciem pierwotnym musi być określone w sposób przejrzysty i jednoznaczny. Do tego celu wykorzystujemy definicje.

W dziedzinie matematyki, poglądowo, *definicja jest to takie zdanie, które ustala nazwę oraz precyzuje określenie nowego pojęcia lub obiektu za pomocą pojęć pierwotnych lub pojęć już wcześniej wprowadzonych*.

Przykłady
5. Mając już określone pojęcie obiektów identycznych (równych), łatwo określić, kiedy obiekty są różne. Powiemy w myśl definicji, że *dwa obiekty są różne wtedy i tylko wtedy, gdy nie są identyczne*.
6. Zauważmy, że w teorii zbiorów (na ogół) nie włącza się pojęcia identyczności zbiorów do grupy pojęć pierwotnych. Pojęcie to definiuje się za pomocą pojęcia należenia (elementu do zbioru). Przyjmuje się, że *dwa zbiory są identyczne (równe) wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te mają te same elementy*[9], to znaczy, że *każdy element pierwszego zbioru jest elementem drugiego zbioru i jednocześnie, każdy element drugiego zbioru jest elementem pierwszego zbioru*. Stąd już łatwo określić to, kiedy dwa zbiory nie są identyczne. Powiemy, że *dwa zbiory nie są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element pierwszego zbioru, który nie jest elementem drugiego zbioru lub istnieje element drugiego zbioru, który nie jest elementem pierwszego zbioru*.
7. Geometria elementarna dostarcza bardzo dużo przykładów definicji nowych pojęć. Wprowadzamy między innymi pojęcie figury geometrycznej płaskiej: *figurą geometryczną płaską nazywamy każdy podzbiór płaszczyzny*. Tutaj wykorzystaliśmy pojęcie zbioru (ściślej, pojęcie podzbioru) występujące w teorii zbiorów. Do definiowania oraz opisu nowych obiektów geometrycznych, geometria elementarna wykorzystuje teorię zbiorów.
8. W teorii liczb rzeczywistych mamy również bardzo wiele przykładów nowych obiektów lub nowych pojęć. Nie wchodząc w szczegóły, można zdefiniować ważne z punktu widzenia zastosowań „nowe liczby rzeczywiste”, na przykład *wartość bezwzględną liczby rzeczywistej* czy zagadkowo brzmiące nazwy *podłogi* oraz *sufitu liczby rzeczywistej*. Centralnym pojęciem matematyki wydaje się *pojęcie funkcji*.

[9] Jest to treść tak zwanej zasady ekstensjonalności.

9. Wkrótce poznamy pojęcie zdania logicznego (Definicja 1.1), podstawowego pojęcia logiki, a w szczególności ważnego jej działu, tak zwanego klasycznego rachunku zdań (*KRZ*).

Z teoretycznego i praktycznego punktu widzenia, cała wiedza matematyczna jest zawarta w charakterystycznych dla tej nauki stwierdzeniach, czyli pewnych zdaniach. W języku naturalnym mówionym i pisanym posługujemy się zdaniami różnego typu. Zasadniczym celem jest przekazanie pewnych informacji obiektywnych lub subiektywnych. Z gramatycznego punktu widzenia często operujemy *zdaniami oznajmującymi* (*orzekającymi*), *pytającymi*, *rozkazującymi*, a nawet korzystamy z *równoważników zdań*. Komunikujemy się za pomocą tak zwanych *zdań prostych* lub *zdań złożonych*. W języku naukowym stosowanym głownie w matematyce i naukach przyrodniczych posługujemy się również zdaniami. Ich treść jest ściśle związana z dyscypliną naukową, w ramach której są one wypowiadane czy zapisywane. W wielu przypadkach nie są one „czytelne" dla niezorientowanego w istocie rzeczy odbiorcy ze względu na charakterystyczny sposób ich zapisu lub wypowiedzi. Mają one jednak ważną cechę: niosą pewną treść „logicznie prawdziwą" choć może zdarzyć się inaczej, przekazywana informacja okazuje się być „logicznie fałszywą". Z matematycznego punktu widzenia, spośród wszystkich zdań gramatycznych wyróżnimy tak zwane *zdania logiczne*.

Definicja 1.1 (zdanie logiczne)
Zdaniem logicznym nazywamy takie i tylko takie *zdanie oznajmujące* w sensie gramatycznym, o którym możemy powiedzieć, że jest albo *zdaniem prawdziwym*, albo *zdaniem fałszywym*.

Zwrot „albo…, albo…" w powyższej definicji oznacza, że zdanie logiczne nie może być jednocześnie zdaniem prawdziwym i zdaniem fałszywym.

Przykłady
10. Zdanie: „Kilogram żelaza waży więcej, niż kilogram puchu." jest przykładem zdania logicznego. Oczywiście, fałszywego (mamy tę samą jednostkę miary wagi).
11. Zdanie: „Nie lubię poniedziałku." jest przykładem zdania oznajmującego, ale nie traktujemy tego zdania jak zdanie logiczne (jest to opinia subiektywna).
12. Zdanie: „Prędkość światła w próżni jest równa w przybliżeniu 300 000 km/s." jest przykładem zdania logicznego prawdziwego (jest to konsekwencja teorii fizycznej badającej naturę światła).
13. Rozpatrzmy następujące trzy zdania oznajmujące, które można spotkać w matematyce: Zdanie pierwsze „Dla każdej liczby rzeczywistej x, $x = 0$", zdanie drugie „Istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x = 0$", zdanie trzecie „$x = 0$". W każdym z nich pojawia się tak zwana zmienna (wyraża ją symbol x). Pierwsze zdanie jest zdaniem logicznym fałszywym, drugie zdanie jest zdaniem logicznym prawdziwym. Zdanie trzecie nie jest zdaniem logicznym (choć jest zdaniem oznajmującym w sensie gramatycznym). Okaże się wkrótce, że zdanie trzecie jest przykładem tak zwanej *formy zdaniowej jednej zmiennej* (w tym przypadku zmiennej x), dla której jeszcze nie określono zakresu jej zmienności.

W jaki sposób oceniamy prawdziwość lub fałszywość zdania (oznajmującego)? Oczywiście, na podstawie odpowiednich kryteriów. Wybitny logik amerykański polskiego pochodzenia Alfred Tarski uważał, że „*zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest tak, jak* *ono orzeka*". W takim razie, pewne zdanie jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, jak ono orzeka!

Do oceny prawdziwości (fałszywości) zdania w naukach przyrodniczych i w matematyce wystarcza na ogół znajomość faktów tej teorii, w ramach której zdanie jest wypowiadane lub zapisywane. Jest tak z pewnością dla wszystkich zdań występujących w Przykładach o numerach 10 - 13.

Prawda oraz *fałsz,* to tak zwane *wartości logiczne zdań logicznych*. Będziemy oznaczać je specjalnymi symbolami, odpowiednio: **1** (symbol prawdy) oraz **0** (symbol fałszu). Zwracamy uwagę na to, że nie są to liczby (symbole te mają ,,zamienniki", odpowiednio **T** oraz **F**). Przyjmujemy, że są to jedyne wartości logiczne zdań logicznych, zakładamy tym samym, że zbiór wartości logicznych jest zbiorem dwuelementowym. System logiczny oparty na dwuelementowym zbiorze wartości logicznych nazywamy *logiką dwuwartościową*. Dla kontrastu, przedstawimy zarys teorii logicznej, w której zbiór wartości logicznych jest zbiorem trzyelementowym. System logiczny oparty na trzyelementowym zbiorze wartości logicznych nazywamy *logiką trójwartościową*. W logice trójwartościowej, obok wartości logicznych **1** oraz **0** wprowadzamy *trzecią wartością logiczną, którą symbolizuje ułamek* **½**. Wartości logicznej **½** odpowiadają tak zwane *zdania możliwe*. Idea logiki trójwartościowej pochodzi od polskiego logika, Jana Łukasiewicza[10]

Twierdzenia matematyczne, to zdania logiczne, które mają jednoznacznie określoną właściwość, są z logicznego punktu widzenia albo prawdziwe, albo fałszywe (tak też może się zdarzyć…). Określają one własności obiektów oraz związki między tymi obiektami. Wśród twierdzeń wyróżnia się tak zwane *aksjomaty* (nazywane również *postulatami* lub *pewnikami*). *Aksjomaty, to* takie *twierdzenia, o których zakładamy, że są bezwarunkowo prawdziwe, to znaczy są to takie zdania, które nie wymagają uzasadnienia* (nie wymagają dowodu), *które powinny być oczywiste (jasne, zrozumiałe) i konieczne (do wyprowadzania innych twierdzeń)*. Wybór aksjomatów może być różnorodny (tak, jak zaznaczyliśmy to dla pojęć pierwotnych). Układ aksjomatów nie może składać się z takich twierdzeń, których treści byłyby wzajemnie sprzeczne. Ze zbioru aksjomatów oraz zbioru pojęć pierwotnych staramy się rozwijać wiedzę matematyczną w ramach konkretnej teorii matematycznej. Każde twierdzenie matematyczne, które nie jest aksjomatem musi mieć uzasadnienie, inaczej musi być ,,udowodnione". W dowodach niektórych twierdzeń występują tak zwane *lematy, czyli twierdzenia pomocnicze* (które podaje się wraz z dowodem). Szczególne przypadki twierdzeń lub elementarne fakty z nich wynikające to tak zwane *wnioski*. Na zakończenie dodajmy, że oprócz twierdzeń matematycznych w samej matematyce pojawia się wiele zdań przypuszczających, wyrażających hipotetyczne własności obiektów matematycznych lub pojęć. Zdania te nazywamy *hipotezami* (lub przypuszczeniami). Aktualny stan wiedzy matematycznej nie pozwala rozstrzygnąć jaka jest natura logiczna tych zdań, to znaczy, nie potrafimy w danym momencie ocenić, czy hipoteza jest prawdziwa, czy jest fałszywa. Dla rozwoju nauk matematycznych istotne są tak zwane problemy millenijne[11].

[10] Przyjmuje się, że miało to miejsce około 1920 r.

[11] Jednym z ważniejszych problemów millenijnych jest hipoteza Riemanna o rozkładzie tak zwanych nietrywialnych zer funkcji dzeta (Riemanna).

Przykłady

14. „Standardowa" teoria zbiorów jest oparta na określonym wcześniej układzie pojęć pierwotnych (Przykład 2) oraz na tak zwanym *systemie aksjomatów ZFC*[12]. Wśród aksjomatów tego systemu pojawia się *gwarancja istnienia zbioru pustego,* czyli zbioru, do którego nie należy żaden element (aksjomat zbioru pustego). Inny aksjomat (aksjomat nieskończoności) zagwarantuje istnienie zbioru, który intuicyjnie nazwalibyśmy zbiorem nieskończonym (dzięki niemu można skonstruować zbiór wszystkich liczb naturalnych, a więc arytmetyka może być wyrażona w teorii zbiorów!). Aksjomaty systemu aksjomatów *ZFC* pokazują precyzyjnie jakiego typu zbiory są dopuszczalne w ramach danej teorii oraz jakie są możliwe schematy konstruowania zbiorów. Dzięki aksjomatom systemu *ZFC* wykluczamy istnienie pewnych „zbiorów", na przykład *nie istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie możliwe zbiory*, *nie istnieje zbiór, który miałby taka własność, że jest on swoim elementem*!

15. W ramach geometrii elementarnej spotykamy różnorodność systemów aksjomatycznych. Od prawdopodobnie pierwszej próby ujęcia w sposób aksjomatyczny wiedzy geometrycznej (Elementy Euklidesa) i wiedzy w ogóle, po współczesny system jej aksjomatów (system aksjomatów Hilberta i innych).

16. W arytmetyce (teoretycznej) można określić za pomocą układu aksjomatów własności podstawowe wszystkich „dobrze znanych" zbiorów liczbowych, to znaczy zbioru liczb naturalnych, liczb całkowitych, liczb wymiernych, liczb rzeczywistych oraz nie prezentowanego w matematyce szkolnej zbioru liczb zespolonych.

W tym module rozpoczynamy analizę struktury twierdzeń matematycznych a także metody ich dowodów.

1.2 Budowa zdań logicznych w (*KRZ*)

Twierdzenia matematyczne mają często strukturę implikacji. Implikacje jako zdania logiczne oraz jako funkcje zdaniowe jednej lub wielu zmiennych spotykamy w logice, w ramach *klasycznego rachunku zdań* (*KRZ*) oraz w ramach *klasycznego rachunku kwantyfikatorów* (*KRK*).

Rozpatrzmy najpierw strukturę zdań logicznych w klasycznym rachunku zdań (*KRZ*). Z teoretycznego punktu widzenia, *zdania logiczne będziemy zastępować małymi literami alfabetu*, najczęściej będą to litery p, q, r, z ewentualnymi indeksami (na przykład p_1, p_2). Jest to wygodne wtedy, gdy nie ma znaczenia treść zdań, lecz to, czy są one prawdziwe, czy fałszywe. Litery, które zastępują zdania logiczne nazywamy *zmiennymi zdaniowymi*.

W logice dwuwartościowej, jeśli zmienna zdaniowa p zastępuje takie zdanie logiczne, które jest prawdziwe, napiszemy: $w(p) = \mathbf{1}$ i powiemy, że *wartość logiczna zdania p jest równa* **1** oraz (w uproszczeniu), że *p jest zdaniem prawdziwym*. Jeśli zmienna zdaniowa p zastępuje zdanie logiczne, które jest zdaniem fałszywym, napiszemy: $w(p) = \mathbf{0}$ i mówimy, że *wartość logiczna zdania p jest równa* **0** oraz że *p jest zdaniem fałszywym*.

Przykłady

17. Zapis $p \coloneqq 0 = 1$ oznacza, że zmienna zdaniowa p zastępuje zdanie „$0 = 1$". Oczywiście, $w(p) = \mathbf{0}$. Zdanie p jest zdaniem fałszywym.

---

[12] *Z* oraz *F*, to pierwsze litery nazwisk twórców tego systemu aksjomatów: Ernesta Zermelo ora Abrahama Fraenkla. Symbol *C* oznacza skrót od nazwy jednego z aksjomatów systemu, tak zwanego aksjomatu wyboru (axiom of choice).

18. Zapis $q \coloneqq 0 < 1$ odczytujemy jako: zmienna zdaniowa q zastępuje zdanie „$0 < 1$”. Tutaj, $w(q) = \mathbf{1}$. Zdanie q jest zdaniem prawdziwym.

Formalnie, konstruowanie nowych zdań logicznych w (*KRZ*) odbywa się za pomocą łączenia zmiennych zdaniowych z odpowiednim *spójnikiem logicznym*. Spójnik logiczny nazywany jest często *funktorem zdaniotwórczym*. Spójnik logiczny wiążący jedno zdanie logiczne nazywamy *spójnikiem jednoargumentowym*. Istnieją dokładnie cztery spójniki jednoargumentowe. Spójnik logiczny wiążący dwa zdania logiczne nazywamy *spójnikiem dwuargumentowym*. Istnieje dokładnie szesnaście spójników dwuargumentowych.

Definicja 1.2 (zdanie proste, zdanie złożone)
Zdanie logiczne, w którym nie występuje żaden spójnik logiczny nazywamy *zdaniem prostym*. Zdanie logiczne, w którym występuje co najmniej jeden spójnik logiczny nazywamy *zdaniem złożonym*.

1.2.1 Klasyfikacja spójników jednoargumentowych. Zdania utworzone prze te spójniki i ich wartości logiczne

1. Spójnik afirmacji V (*verum*). Jeśli zmienna zdaniowa p zastępuje pewne zdanie logiczne, to symbol $V(p)$ określa zdanie złożone, które czytamy „jest tak, jak orzeka p lub nie jest tak, jak orzeka p”.
2. Spójnik asercji A. Jeśli zmienna zdaniowa p zastępuje pewne zdanie logiczne, to symbol $A(p)$ określa zdanie złożone, które czytamy „jest tak, jak orzeka p” lub „prawdą jest, że p”.
3. Spójnik negacji $\sim$. Jeśli zmienna zdaniowa p zastępuje pewne zdanie logiczne, to symbol $\sim p$ definiuje zdanie złożone, które czytamy „nie jest tak, jak orzeka p” lub „nie jest prawdą, że p”.
4. Spójnik odrzucania F (*falsum*). Jeśli zmienna zdaniowa p zastępuje pewne zdanie logiczne, to symbol $F(p)$ definiuje zdanie złożone, które czytamy „jest tak, jak orzeka p i nie jest tak, jak orzeka p”.

Zestawienie wartości logicznych zdań zbudowanych za pomocą spójników jednoargumentowych

$w(p)$	$w(V(p))$	$w(A(p))$	$w(\sim p)$	$w(F(p))$
1	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**

Z tabelki wynika, że spójniki afirmacji V i odrzucania F można uważać za wzajemne negacje. Analogicznie mają się do siebie spójniki negacji $\sim$ oraz asercji A. W zastosowaniach najważniejszym spójnikiem jednoargumentowym jest spójnik negacji.

1.2.2 Klasyfikacja spójników dwuargumentowych. Wartości logiczne zdań złożonych zbudowanych za pomocą spójników dwuargumentowych

Istnieje dokładnie szesnaście spójników dwuargumentowych. Dla każdego z nich istnieje spójnik będący jego negacją. Otrzymujemy zatem osiem par spójników. Naszą uwagę zwrócą spójniki (w kolejności ich występowania w poniższej tabeli): alternatywy ($\vee$), implikacji ($\Rightarrow$), równoważności ($\Leftrightarrow$) oraz koniunkcji ($\wedge$).

Zestawienie wartości logicznych zdań zbudowanych za pomocą spójników dwuargumentowych

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$f_1(V)$	$f_2(\vee)$	$f_3(\Leftarrow)$	$f_4(na\,p)$	$f_5(\Rightarrow)$	$f_6(na\,q)$	$f_7(\Leftrightarrow)$	$f_8(\wedge)$
$w(\boldsymbol{p})$	$w(\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_1\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_2\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_3\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_4\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_5\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_6\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_7\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}f_8\boldsymbol{q})$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$h_1(\vert)$	$h_2(\oplus)$	$h_3(\sim f_6)$	$h_4(\sim f_5)$	$h_5(na\,q)$	$h_6(\sim f_3)$	$h_7(\downarrow)$	$h_8(F)$
$w(\boldsymbol{p})$	$w(\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}\vert\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_2\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_3\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_4\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_5\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_6\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_7\boldsymbol{q})$	$w(\boldsymbol{p}h_8\boldsymbol{q})$
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

Komentarz

1. Spójniki f_1, h_8. Pierwszy jest odpowiednikiem spójnika jednoargumentowego *V* (*verum*). Jeśli zmienne zdaniowe *p*, *q* zastępują pewne zdania logiczne, to symbol $p\ f_1\ q$ określa zdanie złożone, które czytamy „jest tak, jak orzekają *p*, *q* lub nie jest tak, jak orzekają *p*, *q*”. Spójnik drugi, to odpowiednik spójnika jednoargumentowego *F* (*falsum*). Interpretowany jako negacja spójnika f_1. Jeśli zmienne zdaniowe *p*, *q* zastępują pewne zdania logiczne, to symbol $p\ h_8\ q$ określa zdanie złożone, które przeczytamy „jest tak i jednocześnie nie jest tak, jak orzekają *p*, *q*”.

2. Spójniki f_2, h_7. Pierwszy spójnik, to tak zwany *spójnik alternatywy niewykluczającej* ($\vee$). Jeśli zmienne zdaniowe *p*, *q* zastępują pewne zdania logiczne, to symbol $p \vee q$ określa zdanie złożone, które czytamy „alternatywa *p*, *q*” ewentualnie ,,*p* lub *q*”, a także „*p* bądź *q*”, czasami ,,co najmniej jedno z dwojga *p*, *q*”. *Alternatywa niewykluczająca dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z tych zdań jest zdaniem prawdziwym*. *Alternatywa niewykluczająca dwóch zdań jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy każde z tych zdań jest zdaniem fałszywym*. Spójnik drugi ($\downarrow$), to spójnik negacji alternatywy niewykluczającej, nazywany jest spójnikiem binegacji lub spójnikiem Peirce’a. Ciąg symboli $p \downarrow q$ czytamy: „ani *p*, ani *q*”, a także „nieprawda, że *p* i nieprawda, że *q*”. *Zdanie* $p \downarrow q$ *jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są fałszywe*.

3. Spójniki f_3, h_6. Spójnik f_3 ($\Leftarrow$), to spójnik implikacji odwrotnej (do spójnika implikacji prostej f_5). Zdanie $p \Leftarrow q$ czytamy „jeśli *q*, to *p*”, o ile *q*, to *p*”, ,,skoro *q*, to *p*”. Cztery schematy zdaniowe: $p \Leftarrow q$, $\sim p \Leftarrow \sim q$, $p \Rightarrow q$, $\sim p \Rightarrow \sim q$ tworzą tak zwany kwadrat logiczny implikacji (por. punkt **1.4**). Spójnik h_6 interpretujemy jak negację spójnika ($\Leftarrow$). Zdanie $p\ h_6\ q$ orzeka, że ,,nie jest tak, że jeśli *q*, to *p*”.

4. Spójniki f_4, h_5. Spójnik f_4, to spójnik rzutowania na pierwszą zmienną zdaniową. Schemat $p\ f_4\ q$ oznacza, że ,,jest tak, jak orzeka (pierwsze) zdanie (*p*)". Spójnik h_5 jest negacją spójnika f_4. Zdanie $p\ h_5\ q$ oznacza, że ,,jest tak, jak nie orzeka (pierwsze) zdanie (*p*)".
5. Spójniki f_5, h_4. Spójnik f_5 jest spójnikiem implikacji (prostej) ($\Rightarrow$). Zdanie $p \Rightarrow q$ ma wiele możliwych form opisu. Najczęstsze, to ,,jeżeli *p*, to *q*", ,,o ile *p*, to *q*", ,,skoro *p*, to *q*", ,,*p* jest warunkiem dostatecznym tego, by *q*", ,,*q* jest warunkiem koniecznym do tego, by *p*". Szerzej o zdaniach zbudowanych za pomocą spójnika implikacji traktuje punkt **1.3**. Spójnik h_4 jest negacją spójnika f_5.
6. Spójniki f_6, h_3. Spójnik f_6, jest spójnikiem rzutowania na drugą zmienną zdaniową. Schemat $p\ f_6\ q$ oznacza, że ,,jest tak, jak orzeka (drugie) zdanie (*q*)". Spójnik h_3 jest negacją spójnika f_6. Zdanie $p\ h_3\ q$ oznacza, że ,,jest tak, jak nie orzeka (drugie) zdanie (*q*)".
7. Spójniki f_7, h_2. Spójnik f_7 nazywamy spójnikiem równoważności ($\Leftrightarrow$). Schemat $p \Leftrightarrow q$ odczytamy jako ,,*p* wtedy i tylko wtedy, gdy *q*" lub ,,*p* zawsze i tylko wtedy, gdy *q*", a także ,,*p* dokładnie wtedy, gdy *q*". W zapisie $p \Leftrightarrow q$, symbol *p* reprezentuje lewą stronę danej równoważności, a symbol *q* jej prawą stronę. Zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym wyłącznie wtedy, gdy lewa i prawa strona mają tę sama wartość logiczną, to znaczy albo są jednocześnie zdaniami prawdziwymi, albo jednocześnie zdaniami fałszywymi. Spójnik h_2 ($\oplus$) nazywamy nierównoważnością, a także spójnikiem alternatywy wykluczającej (lub rozłącznej). Jest on negacją spójnika równoważności. Schemat $p \oplus q$ odczytamy jako ,,albo *p*, albo *q*", ,,bądź *p*, bądź *q*",
,,*p* wtedy i tylko wtedy, gdy nie *q*". Zdanie $p \oplus q$ jest zdaniem prawdziwym wyłącznie wtedy, gdy zdania *p*, *q* mają różne wartości logiczne.
8. Spójniki f_8, h_1. Spójnik f_8 nazywamy spójnikiem koniunkcji ($\wedge$). Ciąg symboli $p \wedge q$ czytamy: ,,*p* oraz *q*", ,,*p* i *q*", ,,*p* a *q*", ,,*p* mimo, że *q*", ,,*p* lecz *q*", ,,koniunkcja *p* oraz *q*". Zdanie $p \wedge q$ jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy zdania *p*, *q* są prawdziwe. Spójnik h_1 (|) jest negacją spójnika koniunkcji. Nazywamy go również kreską Sheffera. Ciąg symboli $p \mid q$ czytamy: ,,nieprawda, że *p* lub nieprawda, że *q*" lub ,,nie *p* lub nie *q*". Zdanie $p \mid q$ jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy zdania *p*, *q* są oba prawdziwe.

1.3 Implikacja w (*KRZ*) i jej typy
Definicja 1.3 (pojęcie implikacji w (*KRZ*))
Jeśli zmienne zdaniowe *p*, *q* zastępują zdania logiczne, to zapis $p \Rightarrow q$ oznacza zdanie logiczne, które nazywamy *implikacją o poprzedniku p i następniku q* i czytamy zwykle ,,jeśli *p* to *q*".

Zgodnie z punktem **1.2**, wartość logiczna implikacji zależy od wartości logicznych tych zdań, z których jest zbudowana. Określa ją następująca *matryca logiczna* (tablica logiczna)

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \Rightarrow q)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Z podanej tablicy wartości logicznych wynika, że dla twierdzenia, które ma kształt implikacji typu $p \Rightarrow q$ gdzie zdania logiczne zakodowano za pomocą dwóch zmiennych zdaniowych p, q można wypowiedzieć następujące fakty:
1. Twierdzenie mające postać „$p \Rightarrow q$" jest twierdzeniem fałszywym *wtedy i tylko wtedy, gdy* jego poprzednik p jest zdaniem prawdziwym i jednocześnie jego następnik q jest zdaniem fałszywym.
2. Twierdzenie mające postać „$p \Rightarrow q$" jest twierdzeniem prawdziwym, *jeśli* jego poprzednik p jest zdaniem fałszywym.
3. Twierdzenie mające postać „$p \Rightarrow q$" jest twierdzeniem prawdziwym, *jeśli* jego następnik q jest zdaniem prawdziwym.

1.4 Kwadrat logiczny dla czterech typów implikacji

Definicja 1.4 (implikacja prosta, odwrotna, przeciwna i przeciwstawna w (*KRZ*))

Jeśli zmienne zdaniowe p, q zastępują zdania logiczne, to dla implikacji $p \Rightarrow q$
a) implikację $q \Rightarrow p$ nazywamy *implikacją odwrotną* lub *konwersją*
b) implikację $(\sim p) \Rightarrow (\sim q)$ nazywamy *implikacją przeciwną* lub *inwersją*
c) implikację $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ nazywamy *transpozycją lub implikacją przeciwstawną*

Dla zmiennej zdaniowych p, q symbole $\sim p$, $\sim q$ oznaczają negacje tych zdań, które zastępują zmienne zdaniowe p, q.

Warto zwrócić uwagę na postać poprzednika oraz następnika w implikacji odwrotnej, przeciwnej i przeciwstawnej.

Przykłady

19. Rozpatrzmy implikację: „jeśli $x^2 = 25$, to $x = 5$". Implikacja odwrotna do danej ma postać: „jeśli $x = 5$, to $x^2 = 25$". Implikacją przeciwną do implikacji wyjściowej jest implikacja: „jeśli $x^2 \neq 25$, to $x \neq 5$", a implikacją przeciwstawną do implikacji wyjściowej jest implikacja: „jeśli $x \neq 5$, to $x^2 \neq 25$". Zadaniem czytelnika jest wyznaczenie wartości logicznej każdej implikacji.

20. Rozpatrzmy implikację: „jeśli $|x| = 25$, to $x = 25$ lub $x = -25$". Implikacja odwrotna do danej ma postać: „jeśli $x = 25$ lub $x = -25$, to $|x| = 25$". Implikacją przeciwną do implikacji wyjściowej jest implikacja: „jeśli $|x| \neq 25$, to $x \neq 25$ i $x \neq -25$", natomiast implikacja przeciwstawna do implikacji wyjściowej ma postać: „jeśli $x \neq 25$ i $x \neq -25$, to $|x| \neq 25$". Jakie wartości logiczne należy przypisać podanym implikacjom?

21. Rozpatrzmy implikację: „jeśli 2 dzieli x oraz 3 dzieli x, to 6 dzieli x". Implikacja odwrotna do danej, to „jeśli 6 dzieli x, to 2 dzieli x oraz 3 dzieli x". Implikacja przeciwna: „jeśli 2 nie dzieli x lub 3 nie dzieli x, to 6 nie dzieli x". Implikacja przeciwstawna: „jeśli 6 nie dzieli x, to 2 nie dzieli x lub 3 nie dzieli x". Jaką wartość logiczną przypiszemy każdej z podanych implikacji?

Definicja 1.5 (implikacje równoważne)

Niech p, q, r, s oznaczają zmienne zdaniowe. Implikacje $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow s$ nazywamy równoważnymi w (*KRZ*) wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne matryce logiczne dla tych samych wartości logicznych odpowiednich zmiennych zdaniowych. Fakt, że dwie implikacje $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow s$ są równoważne określa zapis $(p \Rightarrow q) \equiv (r \Rightarrow s)$.

Przykład
22. Porównując matryce logiczne par implikacji i jej transpozycji

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \Rightarrow q)$	$w((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$
1	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**

oraz matryce logiczne par implikacji odwrotnej i przeciwnej (do implikacji prostej)

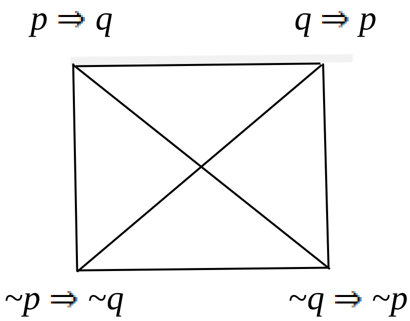
$w(p)$	$w(q)$	$w(q \Rightarrow p)$	$w((\sim p) \Rightarrow (\sim q))$
1	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**

stwierdzamy, że są to implikacje równoważne:

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$$

$$(q \Rightarrow p) \equiv ((\sim p) \Rightarrow (\sim q))$$

Wzajemne zależności logiczne między powyższymi typami implikacji można przedstawić za pomocą następującego kwadratu



Każde dwie implikacje znajdujące się w przeciwległych wierzchołkach kwadratu są równoważne. Aby ocenić wartość logiczną wszystkich czterech implikacji, wystarczy ocenić wartość logiczną dwóch spośród nich, które należą do jednego boku kwadratu. Implikacja prosta i odwrotna pozwalają dowodzić twierdzeń, które mają charakter równoważności (por. Punkt **3.1**).

1.5 Dowód wprost

Jest powszechnym sposobem dowodzenia tych twierdzeń, które mają postać implikacji. Nazywamy go również dowodem bezpośrednim. Idea tego typu dowodu opiera się na wykazaniu prawdziwości implikacji

$$(Z_1 \land Z_2 \land \ldots \land Z_m) \Rightarrow T$$

w której poprzednik jest koniunkcją założeń $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, a następnik - tezą T.

Przykład
23. Udowodnimy, że jeśli $x > -2$, $y < 3$, to $xy - 6 < 3x - 2y$.
Kroki dowodowe

1. $x > -2$, $y < 3$, (założenia)
2. $x + 2 > 0$, $y - 3 < 0$ (własność nierówności)
3. $(x + 2)(y - 3) < 0$ (własność znaku iloczynu)
4. $xy - 3x + 2y - 6 < 0$ (przekształcenia algebraiczne)
5. $xy - 6 < 3x - 2y$ (teza)

■

1.6 Dowód za pomocą przekształceń równoważnych
Dowody tego typu opierają się na wykorzystaniu takich zależności, które można wyrazić za pomocą zdania, w którym występują własności równoważne. Poniżej przytaczamy niektóre z takich zależności.

1.6.1 Własność nieujemności wartości funkcji kwadratowej, własność równości wartości funkcji kwadratowej, własność monotoniczności funkcji kwadratowej w odpowiednich przedziałach
a) dla dowolnej liczby rzeczywistej r, $r^2 \geq 0$, $r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0$
b) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest równoważność
$$r^2 = s^2 \Leftrightarrow (r = s \lor r = -s)$$
c) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja
$$[r > 0, s > 0] \Rightarrow [r \leq s \Leftrightarrow r^2 \leq s^2]$$
d) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja
$$[r < 0, s < 0] \Rightarrow [r \leq s \Leftrightarrow r^2 \geq s^2]$$

1.6.2 Własność różnowartościowości i monotoniczności funkcji „do sześcianu”
a) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest równoważność
$$r = s \Leftrightarrow r^3 = s^3$$
b) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest równoważność
$$r \leq s \Leftrightarrow r^3 \leq s^3$$

1.6.3 Własność różnowartościowości i monotoniczności funkcji „pierwiastek kwadratowy”
a) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja
$$[r \geq 0, s \geq 0] \Rightarrow [r = s \Leftrightarrow \sqrt{r} = \sqrt{s}]$$
b) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja
$$[r \geq 0, s \geq 0] \Rightarrow [r \leq s \Leftrightarrow \sqrt{r} \leq \sqrt{s}]$$

1.6.4 Własność różnowartościowości oraz monotoniczności funkcji proporcjonalność odwrotna
a) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja
$$[r \neq 0, s \neq 0] \Rightarrow [r = s \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{s}]$$

b) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja

$$[r > 0, s > 0] \Rightarrow [r \leq s \Leftrightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{1}{s}]$$

c) dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja

$$[r < 0, s < 0] \Rightarrow [r \leq s \Leftrightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{1}{s}]$$

1.6.5 Własność różnowartościowości oraz monotoniczności funkcji wykładniczej

a) dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej a, $a \neq 1$, dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest równoważność

$$r = s \Leftrightarrow a^r = a^s$$

b) dla dowolnej liczby rzeczywistej a, $a \in (0, 1)$, dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest równoważność

$$r \leq s \Leftrightarrow a^r \geq a^s$$

c) dla dowolnej liczby rzeczywistej a, $a > 1$, dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest równoważność

$$r \leq s \Leftrightarrow a^r \leq a^s$$

Przykład

24. Udowodnimy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest nierówność

$$(r + s)^2 \geq 4rs$$

Kroki dowodowe

Niech r, s oznaczają dowolnie ustalone liczby rzeczywiste. Na podstawie metody przekształceń równoważnych:

1. $(r - s)^2 \geq 0$ (punkt 1.6.1 a))
2. $r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$ (zastosowanie wzoru na kwadrat różnicy)
3. $r^2 - 2rs + s^2 + 4rs \geq 4rs$ (dodanie do obu stron nierówności liczby $4rs$)
4. $r^2 + 2rs + s^2 \geq 4rs$ (redukcja wyrazów podobnych)
5. $(r + s)^2 \geq 4rs$ (teza)

■

1.7 Dowód trywialny

Wiemy, że dowolna implikacja o następniku prawdziwym jest prawdziwa niezależnie od tego, czy jej poprzednik jest prawdziwy, czy fałszywy. Dowodem trywialnym (ang. *trivial proof*) nazywamy taki dowód prawdziwości implikacji, w którym dowodzimy prawdziwości jej następnika, nie odwołując się do wartości logicznej jej poprzednika.

Przykład

25. Udowodnimy, że jeśli x jest ujemną liczbą rzeczywistą, to $x^2 + 1 > 0$. Istotnie, wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x, $x^2 \geq 0$. Dodając do stron ostatniej nierówności jedynkę otrzymamy $x^2 + 1 \geq 0 + 1$, ponadto $0 + 1 > 0$. Prowadzi to do nierówności $x^2 + 1 > 0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. Zauważmy, że nie odwoływaliśmy się do założenie o tym, że x jest ujemną liczbą rzeczywistą.

■

1.8 Dowód w próżni

Wiemy, że każda implikacja o poprzedniku fałszywym jest prawdziwa niezależnie od tego, czy jej następnik jest prawdziwy, czy fałszywy. Dowodem w próżni (ang. *vacous proof*) nazywamy taki dowód prawdziwości implikacji, w którym dowodzimy fałszywości jej następnika.

Przykład

26. Uzasadnimy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. Istotnie, niech M oznacza dowolny zbiór. Naszym celem jest uzasadnienie zależności $\emptyset \subseteq \mathrm{M}$. Z logicznego punktu widzenia podany zapis ma następująca interpretację

$$(o \in \emptyset) \Rightarrow (o \in \mathrm{M})$$

Zauważmy, że poprzednik powyższej implikacji jest fałszywy, a zatem sama implikacja jest prawdziwa. To oznacza, że $\emptyset \subseteq \mathrm{M}$.

■

1.9 Dowód przez przypadki

Ideę dowodu przez przypadki prezentuje uzasadnienie następującego własności.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s, t prawdziwa jest implikacja

$$[r+s+t=1,\ r^2+s^2+\ t^2=1] \Longrightarrow rst \leq 0$$

Dowód

1. Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s, t prawdziwa jest zależność
$$(r+s+t)^2 = r^2+s^2+\ t^2+2(rs+rt+st)$$
2. Na podstawie założeń
$$1 = 1+2(rs+rt+st)$$
$$rs+rt+st=0$$
$$rs+(r+s)t=0$$
3. Jeśli $r+s=0$, to $rs=0$, tym bardziej $rst=0$, czyli $rst \leq 0$.
4. Jeśli $r+s \neq 0$, to albo $r+s<0$, albo $r+s>0$

4.1 Jeśli $r+s<0$, to na podstawie założenia $t=1-(r+s)$, czyli $t>1$ oraz $t^2>1$, co prowadzi do sprzeczności z tym, że $r^2+s^2+\ t^2=1$. Oznacza to, że $r+s>0$.

4.2 Jeśli $r+s>0$, to na podstawie tego, że $t=\frac{-rs}{r+s}$, otrzymamy:
$$rst = rs\cdot\frac{-rs}{r+s} = -\frac{(rs)^2}{r+s} \leq 0$$

■

1.10 Uwagi o schematach wnioskowania

Definicja 1.6

1. Niech n oznacza dodatnią liczbę naturalną. Rozpatrzmy zdania $p_1, p_2, \dots, p_n, w$. Schematem wnioskowania, w którym przesłankami są zdania $p_1, p_2, \dots, p_n$, a wnioskiem jest zdanie w, nazywamy układ $(\{p_1, p_2, \dots, p_n\}, w)$, który zapisujemy w postaci

$$\frac{p_1, p_2, \dots, p_n}{w} \qquad (*)$$

2. Schemat wnioskowania $(*)$ nazywamy niezawodnym wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow w \qquad (**)$$

jest tautologią rachunku zdań.

Przykłady

27. O potrzebie logiki, Arystoteles wypowiadał się w następujący sposób.

Logika jest potrzebna, bo jeśli nie jest potrzebna, to i tak jest potrzebna (dla poprawnego uzasadnienia tego, że nie jest potrzebna).

Korzystając z praw logiki, uzasadnimy, że rozumowanie Arystotelesa jest poprawne, ponieważ ma charakter rozumowania niezawodnego.

Wypowiedź Arystotelesa można zredagować w następujący sposób.

Jeśli logika nie jest potrzebna, to i tak jest potrzebna (dla poprawnego uzasadnienia tego, że nie jest potrzebna). Zatem logika jest potrzebna.

Niech p oznacza zdanie „*Logika jest potrzebna*”, a symbol $\sim p$ oznacza zaprzeczenie tego zdania, to znaczy zdanie „*Logika nie jest potrzebna*”. W tym przypadku mamy do czynienia z następującym schematem wnioskowania (z jedną przesłanką)

$$\frac{(\sim p) \Rightarrow p}{p}$$

Schemat ten będzie schematem niezawodnym wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie

$$((\sim p) \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

jest tautologią rachunku zdań. Dowód tego faktu można przedstawić wykorzystując tak zwaną metodę zero-jedynkową w wersji standardowej (lub wariancie skróconym).

Wersja standardowa

$w(p)$	$w(\sim p)$	$w((\sim p) \Rightarrow p)$	$w[((\sim p) \Rightarrow p) \Rightarrow p]$
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**

Ostatnia kolumna pokazuje, że rozpatrywane zdanie (właściwie schemat zdaniowy) jest tautologia rachunku zdań, zatem rozumowanie Arystotelesa jest oparte na rozumowaniu niezawodnym, czyli jest poprawne.

Wersja skrócona

$(\sim p$	$\Rightarrow$	$p)$	$\Rightarrow$	p
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

28. W środowisku studentów (od średniowiecza) popularnością cieszy się następujący ciąg zdań.

Kto pije, ten śpi. Kto śpi, nie grzeszy. Kto nie grzeszy, jest święty. Zatem, kto pije, jest święty.

Wykażemy, że podany wniosek jest logicznie uzasadniony, wskazując odpowiednie rozumowanie niezawodne. Przyjmijmy następujące oznaczenia. Symbol p_1 oznacza zdanie „Ktoś pije", symbol p_2 oznacza zdanie „Ktoś śpi", symbol p_3 oznacza zdanie „Ktoś grzeszy", a symbol p_4 oznacza zdanie „Ktoś jest święty". Przy takich oznaczeniach powstają cztery implikacje:

$p_1 \Rightarrow p_2$ „Kto pije, ten śpi"
$p_2 \Rightarrow (\sim p_3)$ „Kto śpi, ten nie grzeszy"
$(\sim p_3) \Rightarrow p_4$ „Kto nie grzeszy, ten jest święty"
$p_1 \Rightarrow p_4$ „Kto pije, jest święty"

Mamy do czynienia z następującym schematem wnioskowania

$$\frac{p_1 \Rightarrow p_2,\ p_2 \Rightarrow (\sim p_3),\ (\sim p_3) \Rightarrow p_4}{p_1 \Rightarrow p_4}$$

Uzasadnimy, że jest to przykład schematu niezawodnego. W tym przypadku należy stwierdzić, że implikacja

$$[(p_1 \Rightarrow p_2) \land (p_2 \Rightarrow (\sim p_3)) \land ((\sim p_3) \Rightarrow p_4)] \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_4)$$

jest tautologią rachunku zdań. Rzeczywiście mamy tu do czynienia z wariantem prawa przechodniości implikacji, czyli tautologią rachunku zdań. Oznacza to, że podany wniosek jest logicznie uzasadniony. Korzystając ze skróconego wariantu metody zero-jedynkowej można także wykazać, że powyższa implikacja jest tautologią rachunku zdań.

29. Według legendy, decyzję o spaleniu księgozbioru słynnej Biblioteki Aleksandryjskiej[13], kalif Omar miał uzasadnić w następujący sposób.

Jeśli księgi z tej biblioteki zawierają to samo, co jest w Koranie, to są niepotrzebne, a jeśli są niepotrzebne, dlatego należy je spalić. Jeśli natomiast nie zgadzają się z treścią Koranu, to są szkodliwe, a jeśli są szkodliwe, dlatego należy je spalić. Skoro księgi z tej biblioteki są niepotrzebne lub szkodliwe, więc należy je spalić.

Można pokazać, że wniosek o spaleniu biblioteki jest konsekwencją wszystkich wcześniejszych przesłanek, ponieważ mamy do czynienia z rozumowaniem niezawodnym.

Moduł nr 2. (4 godziny lekcyjne)
2.1 Dowód nie wprost dla implikacji wykorzystujący prawo kontrapozycji
2.2 Dowód nie wprost dla implikacji wykorzystujący prawo negacji implikacji

2.1 Dowód nie wprost dla implikacji wykorzystujący prawo kontrapozycji

Dowody wykorzystujące prawo kontrapozycji opierają się na następującym prawie rachunku zdań

[13] Jak podają źródła historyczne, większą część starożytnego księgozbioru zniszczyli legioniści Cezara w 48 r. p.n.e., natomiast resztę księgozbioru kazał zniszczyć cesarz Teodozjusz I, na mocy edyktu z 389 r.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$$

Innymi słowy stwierdzamy, że implikacje $(p \Rightarrow q)$, $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ są równoważne:

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$$

Analizowaliśmy je przy okazji omawiania kwadratu logicznego dla implikacji (por. Przykład **22**). Okazuje się, że w pewnych przypadkach łatwiej dowodzić wprost prawdziwość transpozycji implikacji, niż prawdziwość samej implikacji. Obrazowo, jeśli chcemy udowodnić prawdziwość implikacji metodą nie wprost, zakładamy, że fałszywa jest teza i dowodzimy (wprost), że fałszywe jest założenie.

Przykład
30.
Udowodnimy, że jeśli liczba $5x + 6$ jest liczbą niewymierną, to liczba x jest liczbą niewymierną. Istotnie, transpozycją powyższej implikacji jest implikacja: jeśli liczba x jest liczbą wymierną, to liczba $5x + 6$ jest liczbą wymierną. Mamy w tym przypadku następujący ciąg kroków dowodowych:

1. liczba x jest liczbą wymierną
2. liczbę x można przedstawić w postaci $x = \frac{l}{m}$, gdzie l, m oznaczają pewne liczby całkowite, oraz $m \neq 0$
3. liczbę $5x$ można przedstawić w postaci $5x = \frac{5l}{m}$, gdzie l, m oznaczają pewne liczby całkowite, oraz $m \neq 0$
4. liczbę $5x + 6$ można przedstawić w postaci $5x + 6 = \frac{5l+6m}{m}$, gdzie l, m oznaczają pewne liczby całkowite, oraz $m \neq 0$
5. liczba $5x + 6$ jest liczbą wymierną, ponieważ $5l + 6m$, m oznaczają pewne liczby całkowite, oraz $m \neq 0$

W ten sposób udowodniliśmy prawdziwość transpozycji danej implikacji, a zatem i samą implikację

■

2.2 Dowód nie wprost dla implikacji wykorzystujący prawo negacji implikacji

Dowody wykorzystujące prawo negacji implikacji opierają się na następującym prawie rachunku zdań

$$[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$$

które wskazuje na to, że implikacje $\sim(p \Rightarrow q)$, $p \wedge (\sim q)$ są równoważne:

$$[\sim(p \Rightarrow q)] \equiv [p \wedge (\sim q)]$$

W tym przypadku, jeśli chcemy udowodnić prawdziwość implikacji, rozpatrujemy jej negację i staramy się wykazać, że jest ona fałszywa. W tym celu do założenia (p) dołączamy dodatkowe założenie ($\sim q$) i staramy się uzyskać sprzeczność albo z założeniem (p), albo ze znanym faktem matematycznym.

Przykład
31.
Udowodnimy, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + xy + y^2 \geq 0$. Rozpatrzmy negację danej implikacji, to znaczy przyjmijmy, że x, y są liczbami rzeczywistymi oraz prawdziwa jest zależność $x^2 + xy + y^2 < 0$. Otrzymujemy następujący ciąg nierówności:

1. $x^2 + xy + y^2 < 0$
2. $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}y + y^2 < 0$
3. $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 < 0$
4. $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 < 0$

Z drugiej strony, jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ (suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest liczbą nieujemną). Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że negacja rozpatrywanej implikacji jest fałszywa, więc sama implikacja musi być prawdziwa.

■

Moduł nr 3. (4 godziny lekcyjne)
3.1 Równoważność jako koniunkcja implikacji
3.2 Warunek konieczny i wystarczający (dostateczny)
3.3 Dowodzenie twierdzeń mających formę równoważności

3.1 Równoważność jako koniunkcja implikacji

Jeśli p, q oznaczają zmienne zdaniowe, to prawem rachunku zdań jest formuła

$$\varphi := (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \tag{3.1}$$

Pokazuje to poniższa matryca wartości logicznych

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \Leftrightarrow q)$	$w(p \Rightarrow q)$	$w(q \Rightarrow p)$	$w[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$	$w(\varphi)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Ogólniej, jeśli α, β oznaczają formuły (*KRZ*), to prawem rachunku zdań jest formuła

$$\varphi := (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow [(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)] \tag{3.2}$$

Ćwiczenie

Zastosuj skrócony wariant metody zero-jedynkowej, aby udowodnij prawdziwość zależności (3.2).

W obu przypadkach mamy do czynienia z prawem rozkładu równoważności (lub prawem eliminacji równoważności).

Z praktycznego punktu widzenia

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

3.2 Warunek konieczny i wystarczający (dostateczny)

Z logicznego punktu widzenia, każda równoważność, to nic innego jak koniunkcja implikacji prostej i implikacji do niej odwrotnej. Pamiętamy, że w przypadku implikacji $p \Rightarrow q$ poprzednik p nazwaliśmy warunkiem dostatecznym dla q, a następnik q, określiliśmy jako warunek konieczny dla p. Z tego powodu, w równoważności $p \Leftrightarrow q$, p jest jednocześnie warunkiem koniecznym i dostatecznym dla q i na odwrót, q jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla p.

3.3 Dowodzenie twierdzeń mających formę równoważności

Dowody twierdzeń, które mają postać równoważności $\alpha \Leftrightarrow \beta$, gdzie α, β oznaczają pewne formuły, przebiegają w następujących etapach

Etap pierwszy: udowodnić prawdziwość implikacji $\alpha \Rightarrow \beta$ stosując dowolną technikę.

Etap drugi: udowodnić prawdziwość implikacji $\beta \Rightarrow \alpha$ stosując dowolną technikę.

Przykład

32.

Podamy dowód następującego twierdzenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s

$$(r \cdot s = 0) \Leftrightarrow (r = 0 \vee s = 0) \tag{3.3}$$

Mamy tu do czynienia z koniunkcją dwóch twierdzeń

Twierdzenie pierwsze:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja

$$(r \cdot s = 0) \Rightarrow (r = 0 \vee s = 0) \tag{3.4}$$

Powyższą implikację można wypowiedzieć w następujący sposób: jeśli iloczyn liczb rzeczywistych r, s jest równy zero, to co najmniej jedna z tych liczb jest równa zero.

Twierdzenie drugie:
Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja

$$(r = 0 \vee s = 0) \Rightarrow (r \cdot s = 0) \tag{3.5}$$

Powyższą implikację można wypowiedzieć w następujący sposób: jeśli co najmniej jedna z liczb (rzeczywistych) r, s jest równa zero, to iloczyn tych liczb jest równy zero.

Aby udowodnić pierwsze twierdzenie, weźmy pod uwagę jego negację, to znaczy rozpatrzmy zdanie:
Istnieją liczby rzeczywiste r, s takie, że

$$(r \cdot s = 0) \wedge (r \neq 0 \wedge s \neq 0) \tag{3.6}$$

Aby otrzymać formułę (3.6) z formuły (3.4) zastosowaliśmy prawo de Morgana dla zdania poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym (por. punkt **4.3**) oraz formułę dla negacji implikacji. Zastosujemy teraz następujący ciąg argumentacji:

1. $r, s \in \mathbb{R}, r \cdot s = 0, r \neq 0, s \neq 0$
2. $r \cdot s \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s} = 0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s}$
3. $r \cdot \frac{1}{r} \cdot s \cdot \frac{1}{s} = 0$
4. $1 \cdot 1 = 0$
5. $1 = 0$

Ostatnia zależność jest zdaniem fałszywym, więc negacja pierwszego twierdzenia jest zdaniem fałszywym, a więc twierdzenie pierwsze jest prawdziwe.

■

Udowodnimy prawdziwość drugiego twierdzenia. Mamy teraz krócej:

1. $(r = 0) \Rightarrow (r \cdot s = 0 \cdot s = 0)$
2. $(s = 0) \Rightarrow (r \cdot s = r \cdot 0 = 0)$
3. $(r = 0 \vee s = 0) \Rightarrow (r \cdot s = 0)$

■

Moduł nr 4. (4 godziny lekcyjne)
4.1 Budowa zdań logicznych w (*KRK*). Forma zdaniowa jednej zmiennej i wielu zmiennych
4.2 Typy form zdaniowych jednej zmiennej
4.3 Kwantyfikator. Forma zdaniowa poprzedzona kwantyfikatorem
4.4 Prawa de Morgana dla zdań z kwantyfikatorami. Dowody twierdzeń, w których występują kwantyfikatory.
4.5 Kontrprzykład
4.6 Dowód efektywny
4.7 Dowód nieefektywny

4.1 Budowa zdań logicznych w (*KRK*). Forma zdaniowa jednej zmiennej i wielu zmiennych

W klasycznym rachunku kwantyfikatorów (*KRK*) zdania budujemy za pomocą tak zwanych *form zdaniowych* (możemy traktować je jak uogólnienia zdań logicznych) oraz specjalnych znaków, które nazywamy *kwantyfikatorami*. Proces ten określamy mianem kwantyfikacji formy zdaniowej. Z samej formy zdaniowej możemy również zbudować zdanie logiczne. Będzie tak wówczas, gdy za zmienną występującą w tej formie podstawimy nazwę elementu z zakresu zmienności tej zmiennej. W szczególności możemy zdefiniować implikację odpowiednich form zdaniowych oraz zdanie logiczne będące implikacją w (*KRK*).

Definicja 4.1 (zmienna, zakres zmienności zmiennej)
1. *Zmienną* nazywamy każdy symbol literowy, który można zastąpić nazwą konkretnego obiektu.
2. *Zakresem zmienności zmiennej* nazywamy zbiór tych i tylko tych obiektów, których nazwy zastępują zmienną.

Definicja 4.2 (forma zdaniowa jednej zmiennej)

Niech M oznacza ustalony zbiór niepusty. *Formą zdaniową jednej zmiennej* nazywamy zdanie oznajmujące (w sensie gramatycznym) zawierające tą zmienną, które staje się zdaniem logicznym po zastąpieniu symbolu zmiennej nazwą dowolnego elementu zbioru M. Zbiór M nazywamy zakresem zmienności zmiennej.

Powyższa definicja pokazuje w jaki sposób formy zdaniowe jednej zmiennej przekształcają się w zdania logiczne. Okaże się wkrótce, że tak zwana *kwantyfikacja form zdaniowych* pozwala również przekształcić je w zdania logiczne.

Definicja 4.3 (oznaczenie formy zdaniowej jednej zmiennej)

Jeśli M oznacza ustalony zbiór niepusty, to zapis

$$\varphi(x), \qquad x \in \mathrm{M}$$

oznacza, że rozpatrujemy pewną formę zdaniową $\varphi(x)$ zmiennej x, której zakresem zmienności jest zbiór M.

Przykłady

33. Wyrażenie $x = x,\ x \in \mathbb{R}$ oznacza formę zdaniową zmiennej x, której zakresem zmienności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
34. Zależność $y \neq y,\ y \in \mathbb{R}$ określa formę zdaniową zmiennej y, której zakresem zmienności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
35. Zapis $t < t,\ t \in \mathbb{R}$ opisuje formę zdaniową zmiennej t, której zakresem zmienności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
36. Wyrażenie $s \geq s,\ s \in \mathbb{R}$ traktujemy jak formę zdaniową zmiennej s, której zakresem zmienności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
37. Równanie $2x + 11 = 0,\ x \in \mathbb{N}$ jest formą zdaniową zmiennej x, której zakresem zmienności jest zbiór wszystkich liczb naturalnych. Ogólniej, *każde równanie algebraiczne z jedną niewiadomą i określoną dziedziną niewiadomej* (czyli dziedziną równania) *jest przykładem formy zdaniowej jednej zmiennej. W tym przypadku zmienną nazywamy niewiadomą.*

38. Nierówność $3y^2 - 4y + 5 \leq 6,\ \ y \in \mathbb{Z}$ jest przykładem formy zdaniowej zmiennej y, której zakresem zmienności jest zbiór wszystkich liczb całkowitych. Ogólniej, *każda nierówność algebraiczna z jedną niewiadomą i określoną dziedziną niewiadomej* (to znaczy dziedziną nierówności) *jest przykładem formy zdaniowej jednej zmiennej*. Tak jak dla równań, *zmienną nazywamy niewiadomą*.

Definicja 4.4 (określenie symbolu $\varphi(m)$)
Jeśli dana jest forma zdaniowa $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ oraz m jest elementem zbioru M, to $\varphi(m)$ oznacza zdanie logiczne powstałe z danej formy zdaniowej po zastąpieniu w niej symbolu zmiennej nazwą elementu m.

Przykłady
39. Dla nierówności $\varphi(y) := 3y^2 - 4y + 5 \leq 6,\ \ y \in \mathbb{Z}$, zdanie $\varphi(0)$, czyli zdanie „$5 \leq 6$” jest zdaniem prawdziwym.
40. Dla równania $\varphi(y) := 2x + 11 = 0,\ x \in \mathbb{N}$, zdanie $\varphi(2)$, to znaczy zdanie „$15 = 0$” jest zdaniem fałszywym.

Fundamentalne znaczenie form zdaniowych jednej zmiennej polega na tym, że dostarczają one schematu definiowania pewnych zbiorów. Dokładniej takich zbiorów, które składają się wyłącznie z elementów ustalonego zbioru, które spełniają podaną formę zdaniową, to znaczy podzbiór wszystkich elementów zbioru M, dla których zdanie powstałe z formy zdaniowej jest zdaniem prawdziwym.

Definicja 4.5 (zbiór spełniania formy zdaniowej)
Zbiorem spełniania formy zdaniowej $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy zbiór S_φ taki, że

$$S_\varphi = \{\, m \in M:\ w(\varphi(m)) = \mathbf{1} \,\}$$

lub krócej

$$S_\varphi = \{\, m \in M:\ \varphi(m) \,\}$$

Zbiór S_φ składa się z tych i tylko tych elementów zbioru M, dla których wartość logiczna zdania $\varphi(m)$ jest równa **1**, to znaczy elementów zbioru M, dla których zdanie $\varphi(m)$ jest zdaniem prawdziwym. O każdym takim elemencie m mówimy, że spełnia daną formę zdaniową. Jeśli natomiast dla pewnego elementu m zbioru M, $w(\varphi(m)) = \mathbf{0}$, to powiemy, że nie spełnia on danej formy zdaniowej.

Przykłady
41. Każda liczba rzeczywista spełnia formę zdaniową $x = x,\ x \in \mathbb{R}$.
42. Nie istnieje liczba rzeczywista, która spełnia formę zdaniową $y \neq y,\ y \in \mathbb{R}$.
43. Liczba całkowita 1 spełnia formę zdaniową $3y^2 - 4y + 5 \leq 6,\ y \in \mathbb{Z}$, ale liczba całkowita (-1) nie spełnia danej formy zdaniowej.

Definicja 4.6 (forma tożsamościowa, forma sprzeczna)
Dana jest forma zdaniowa $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$.

1. Jeśli $S_\varphi = \mathrm{M}$, to mówimy, że dana forma zdaniowa jest tożsamościowa w zbiorze M lub że jest prawdziwa w zbiorze M.
2. Jeśli $S_\varphi = \emptyset$, to mówimy, że dana forma zdaniowa jest sprzeczna w zbiorze M lub że jest fałszywa w zbiorze M.

Przykłady
44. Forma zdaniowa $s \geq s,\ s \in \mathbb{R}$ jest tożsamościowa (prawdziwa) w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.
45. Forma zdaniowa $t < t,\ t \in \mathbb{R}$ jest sprzeczna (fałszywa) w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.
46. Forma zdaniowa $3y^2 - 4y + 5 \leq 6,\ y \in \mathbb{Z}$ nie jest ani prawdziwa, ani fałszywa w zbiorze wszystkich liczb całkowitych.

Definicja 4.7 (formy zdaniowe równoważne)
Formy zdaniowe $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy równoważnymi w zbiorze M wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory spełniania S_φ, S_ψ tych form zdaniowych są identyczne. Zapis
$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \qquad x \in \mathrm{M}$$
oznacza, że rozpatrywane formy zdaniowe są równoważne w zbiorze M.

Na podstawie powyższych ustaleń

Dla dowolnych form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$:
$$S_\varphi = S_\psi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in \mathrm{M} \tag{1}$$

Powyższa zależność ustala kryterium identyczności zbiorów, które definiują formy zdaniowe.

Twierdzenie 4.1
1. Dla każdej formy zdaniowej $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ $\varphi(x) \equiv \varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$.
2. Dla dowolnych form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest równoważność
$$\varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in \mathrm{M} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \psi(x) \equiv \varphi(x),\ x \in \mathrm{M}.$$
3. Dla dowolnych form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\omega(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest implikacja
jeśli $\varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x) \equiv \omega(x),\ x \in \mathrm{M}$, to $\varphi(x) \equiv \omega(x),\ x \in \mathrm{M}$.

<u>Uzasadnienie</u>
1. Jest oczywiste, że dla każdej formy zdaniowej $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ mamy $S_\varphi = S_\varphi$. Oznacza to, że $\varphi(x) \equiv \varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$.
2. Niech dane będą dowolne formy zdaniowe $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$. Z założenia oraz zależności (1)
$$\varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in \mathrm{M} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S_\varphi = S_\psi$$
Na podstawie własności symetryczności dla zbiorów identycznych
$$S_\varphi = S_\psi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S_\psi = S_\varphi$$
Ponownie na podstawie zależności (1)

$$S_\psi = S_\varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \psi(x) \equiv \varphi(x), x \in \mathrm{M}.$$

3. Niech dane będą dowolne formy zdaniowe $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\omega(x),\ x \in \mathrm{M}$. Na podstawie założenia oraz zależności (1)

$$\varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in \mathrm{M} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S_\varphi = S_\psi$$

$$\psi(x) \equiv \omega(x),\ x \in \mathrm{M} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S_\psi = S_\omega$$

Oznacza to, że $S_\varphi = S_\psi$ oraz $S_\psi = S_\omega$. Na podstawie własności przechodniości dla zbiorów identycznych prawdziwa jest implikacja

$$\text{jeśli } S_\varphi = S_\psi \text{ oraz } S_\psi = S_\omega, \text{ to } S_\varphi = S_\omega$$

Na podstawie reguły odrywania $S_\varphi = S_\omega$. W konsekwencji, zgodnie z zależnością (1)

$$S_\varphi = S_\omega \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \varphi(x) \equiv \omega(x),\ x \in \mathrm{M}$$

■

Powyższe twierdzenie ma odpowiednik w terminach zbiorów spełniania form zdaniowych. Nazwiemy je twierdzeniem dualnym (zastępujemy pojęcie równoważnych form zdaniowych pojęciem identyczności zbiorów spełniania form zdaniowych).

Twierdzenie 4.2 (twierdzenie dualne do Twierdzenia 4.1)
1. Dla każdej formy zdaniowej $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ $S_\varphi = S_\varphi$.
2. Dla dowolnych form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest następująca równoważność: $S_\varphi = S_\psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_\psi = S_\varphi$.
3. Dla dowolnych form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\omega(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest implikacja: jeśli $S_\varphi = S_\psi$ oraz $S_\psi = S_\omega$, to $S_\varphi = S_\omega$.

4.2 Typy form zdaniowych jednej zmiennej
4.2.1 Negacja formy zdaniowej
Definicja 4.8 (negacja formy zdaniowej)
1. Negacją formy zdaniowej $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy formę zdaniową, którą oznaczamy symbolem $\sim\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$.
2. Element $m \in \mathrm{M}$ spełnia formę zdaniową $\sim\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy.

$$w(\sim\varphi(m)) = \mathbf{1}.$$

3. Element $m \in \mathrm{M}$ nie spełnia formy zdaniowej $\sim\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } w(\sim\varphi(m)) = \mathbf{0}.$$

4. Zbiorem spełniania formy zdaniowej $\sim\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy zbiór

$$S_{\sim\varphi} = \{ m \in M:\ w(\sim\varphi(m)) = \mathbf{1} \}$$

lub krócej

$$S_{\sim\varphi} = \{ m \in M:\ \sim\varphi(m) \}$$

Poniższe twierdzenie określa schemat definiowania zbioru za pomocą negacji formy zdaniowej.

Twierdzenie 4.3 (związek między zbiorami $S_{\sim\varphi}$, S_φ)
Dla zbiorów spełniania $S_{\sim\varphi}$, S_φ form zdaniowych $\sim\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest zależność:

$$S_{\sim\varphi} = \mathrm{M} - S_\varphi$$

Uzasadnienie

Pokażemy, że zbiory $S_{\sim\varphi}$, $\mathrm{M} - S_\varphi$ mają identyczne elementy. Element m zbioru M należy do zbioru $S_{\sim\varphi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy m spełnia formę zdaniową $\sim\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$. Jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $w(\sim\varphi(m)) = \mathbf{1}$. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $w(\varphi(m)) = \mathbf{0}$. Ostatnia zależność ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy element m nie spełnia formy zdaniowej $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, a to oznacza, że element m należy do zbioru M i jednocześnie nie należy do zbioru S_φ, czyli m należy do zbioru $M - S_\varphi$. Pokazaliśmy, że zbiory $S_{\sim\varphi}$, $\mathrm{M} - S_\varphi$ mają identyczne elementy, a zatem są identyczne.

■

Twierdzenie 4.4

Dla zbiorów spełniania $S_\varphi, S_\psi, S_{\sim\varphi}, S_{\sim\psi}$ odpowiednich form zdaniowych jednej zmiennej x, której zakresem zmienności jest zbiór M prawdziwa jest równoważność:

$$S_{\sim\varphi} = S_{\sim\psi} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S_\varphi = S_\psi$$

4.2.2 Alternatywa dwóch form zdaniowych

Definicja 4.9 (alternatywa dwóch form zdaniowych)

1. Alternatywą form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy formę zdaniową, którą oznaczamy symbolem $\varphi(x) \vee \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$.
2. Element $m \in \mathrm{M}$ spełnia formę zdaniową $\varphi(x) \vee \varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$w(\varphi(m) \vee \psi(m)) = \mathbf{1}$$
3. Element $m \in \mathrm{M}$ nie spełnia formy zdaniowej $\varphi(x) \vee \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$w(\varphi(m) \vee \psi(m)) = \mathbf{0}$$
4. Zbiorem spełniania formy zdaniowej $\varphi(x) \vee \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy zbiór
$$S_{\varphi\vee\psi} = \{\, m \in M:\ w(\varphi(m) \vee \psi(m)) = \mathbf{1} \}$$

lub krócej

$$S_{\varphi\vee\psi} = \{\, m \in M:\ \varphi(m) \vee \psi(m) \,\}$$

Twierdzenie 4.5 (związek między zbiorami $S_{\varphi\vee\psi}$, S_φ, S_ψ)

Dla zbiorów spełniania form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\varphi(x) \vee \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest zależność: $S_{\varphi\vee\psi} = S_\varphi \cup S_\varphi$.

Uzasadnienie

Pokażemy, że zbiory $S_{\varphi\vee\psi}$, $S_\varphi \cup S_\varphi$ mają identyczne elementy. Element m zbioru M należy do zbioru $S_{\varphi\vee\psi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy m spełnia formę zdaniową $\varphi(x) \vee \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$. Jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $w(\varphi(m) \vee \psi(m)) = \mathbf{1}$. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $w(\varphi(m)) = \mathbf{1}$ lub $w(\psi(m)) = \mathbf{1}$. Ostatnia zależność ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy element m spełnia formę zdaniową $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ lub element m spełnia formę zdaniową $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, a to oznacza, że element m należy do zbioru S_φ lub element m należy do zbioru S_ψ, czyli m należy do zbioru $S_\varphi \cup S_\varphi$. Pokazaliśmy, że zbiory $S_{\varphi\vee\psi}$, $S_\varphi \cup S_\varphi$ mają identyczne elementy, a zatem są identyczne.

■

4.2.3 Koniunkcja dwóch form zdaniowych

Definicja 4.10 (koniunkcja dwóch form zdaniowych)

1. Koniunkcją form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy formę zdaniową, którą oznaczamy symbolem $\varphi(x) \wedge \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$.
2. Element $m \in \mathrm{M}$ spełnia formę zdaniową $\varphi(x) \wedge \varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$w\big(\varphi(m) \wedge \psi(m)\big) = \mathbf{1}$$
3. Element $m \in \mathrm{M}$ nie spełnia formy zdaniowej $\varphi(x) \wedge \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$w\big(\varphi(m) \wedge \psi(m)\big) = \mathbf{0}$$
4. Zbiorem spełniania formy zdaniowej $\varphi(x) \wedge \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ nazywamy zbiór
$$S_{\varphi\wedge\psi} = \big\{ m \in M:\ w\big(\varphi(m) \wedge \psi(m)\big) = \mathbf{1}\big\}$$
lub krócej
$$S_{\varphi\wedge\psi} = \{ m \in M:\ \varphi(m) \wedge \psi(m) \}$$

Twierdzenie 4.6 (związek między zbiorami $S_{\varphi\wedge\psi},\ S_\varphi,\ S_\psi$)

Dla zbiorów spełniania form zdaniowych $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, $\varphi(x) \wedge \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$ prawdziwa jest zależność: $S_{\varphi\wedge\psi} = S_\varphi \cap S_\varphi$.

Uzasadnienie

Pokażemy, że zbiory $S_{\varphi\wedge\psi},\ S_\varphi \cap S_\varphi$ mają identyczne elementy. Element m zbioru M należy do zbioru $S_{\varphi\wedge\psi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy m spełnia formę zdaniową $\varphi(x) \wedge \psi(x),\ x \in \mathrm{M}$. Jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $w\big(\varphi(m) \wedge \psi(m)\big) = \mathbf{1}$. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $w\big(\varphi(m)\big) = \mathbf{1}$ i jednoczesnie $w\big(\psi(m)\big) = \mathbf{1}$. Ostatnia zależność ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy element m spełnia formę zdaniową $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ i jednocześnie element m spełnia formę zdaniową $\psi(x),\ x \in \mathrm{M}$, a to oznacza, że element m należy do zbioru S_φ i jednocześnie element m należy do zbioru S_ψ, czyli m należy do zbioru $S_\varphi \cap S_\varphi$. Pokazaliśmy, że zbiory $S_{\varphi\wedge\psi},\ S_\varphi \cap S_\varphi$ mają identyczne elementy, a zatem są identyczne.

■

4.3 Kwantyfikator[14]. Forma zdaniowa poprzedzona kwantyfikatorem

Niech $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ oznacza formę zdaniową zmiennej, której zakresem zmienności jest niepusty zbiór M.

1. Układ symboli
$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$
zastępuje zdanie logiczne: „Dla każdego x należącego do zbioru M jest $\varphi(x)$."

2. Układ symboli
$$\exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$
zastępuje zdanie logiczne: „Istnieje (co najmniej jedno) x należące do zbioru M takie, że $\varphi(x)$."

Komentarz

1. Symbol $\forall$ nazywamy kwantyfikatorem ogólnym[15] (dużym, uniwersalnym).

[14] Nazwa kwantyfikator pochodzi od logika amerykańskiego C. S. Peirce'a.

[15] W tak zwanej notacji polskiej kwantyfikator ten zapisujemy jako $\bigwedge$.

2. Symbol $\exists$ nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym[16] (małym lub egzystencjalnym).
3. Kwantyfikatory wiążą zmienną występującą w formie zdaniowej do zakresu jej zmienności. W tym przypadku formę zdaniową nazywamy zasięgiem danego kwantyfikatora. Taką zmienną nazywamy zmienną związaną. Zmienna występująca w formie zdaniowej, która to forma nie jest poprzedzona kwantyfikatorem traktowana jest jako zmienna wolna. Tak więc zmienna x w każdym wrażeniu

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)],\ \exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

ma inny charakter niż zmienna x w formie zdaniowej $\varphi(x)$.
4. Podstawienie w formie zdaniowej $\varphi(x)$, za zmienną x nazwy konkretnego elementu ze zbioru M będącego zakresem zmienności tej zmiennej przekształca tę formę zdaniową w zdanie logiczne (prawdziwe lub fałszywe). Z drugiej strony, to samo podstawienie w każdym wyrażeniu

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)],\ \exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

doprowadzi do powstania wyrażeń pozbawionych sensu

$$\forall m \in \mathrm{M}[\varphi(m)],$$
$$\exists m \in \mathrm{M}[\varphi(m)]$$

Przykłady
47. Zdanie: „Dla każdej liczby rzeczywistej jej kwadrat jest liczbą nieujemną.” można zapisać w postaci

$$\forall x \in \mathbb{R}[x^2 \geq 0]$$

jednak ciąg symboli $\forall 1 \in \mathbb{R}[1^2 \geq 0]$ jest pozbawiony sensu.
48. Zdanie: „Dla każdej liczby rzeczywistej jej kwadrat jest liczbą ujemną.” można zapisać w postaci

$$\forall x \in \mathbb{R}[x^2 < 0]$$

49. Zdanie: „Istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest liczbą nieujemną.” zapiszemy następująco

$$\exists x \in \mathbb{R}[x^2 \geq 0]$$

50. Zdanie: „Istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest liczbą ujemną.” zapiszemy następująco

$$\exists x \in \mathbb{R}[x^2 < 0]$$

Kluczowa jest odpowiedź na następujące pytanie: kiedy zdanie logiczne poprzedzone kwantyfikatorem jest prawdziwe, a kiedy jest fałszywe?

Definicja 4.11
Niech $\varphi(x),\ x \in \mathrm{M}$ oznacza formę zdaniową zmiennej x, której zakresem zmienności jest niepusty zbiór M.
1. Zdanie

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru M spełnia daną formę zdaniową, to znaczy (por. Definicja 4.6) $S_\varphi = \mathrm{M}$.

[16] W tak zwanej notacji polskiej kwantyfikator ten zapisujemy jako $\bigvee$.

2. Zdanie

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy nie każdy element zbioru M spełnia daną formę zdaniową, to znaczy nie są identyczne zbiory S_φ oraz M.

3. Zdanie

$$\exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jeden element zbioru M, który spełnia daną formę zdaniową, to znaczy zbiór S_φ nie jest zbiorem pustym.

4. Zdanie

$$\exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje element zbioru M, który spełnia daną formę zdaniową, to znaczy zbiór S_φ jest zbiorem pustym.

4.4 Prawa de Morgana dla zdań z kwantyfikatorami. Dowody twierdzeń, w których występują kwantyfikatory.

Prawa de Morgana dla zdań zbudowanych z kwantyfikatorów i form zdaniowych dotyczą budowy negacji tego typu zdań. Należy zanegować zdania postaci

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)], \exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

Pierwsze prawo de Morgana (dla zdania poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym)

$$[\sim\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]] \Leftrightarrow [\exists x \in M[\sim\varphi(x)]]$$

Drugie prawo de Morgana (dla zdania poprzedzonego kwantyfikatorem szczegółowym)

$$[\sim\exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]] \Leftrightarrow [\forall x \in M[\sim\varphi(x)]]$$

Zdania zbudowane z kwantyfikatorów są zdaniami logicznymi. Dowód prawdziwości lub fałszywości zdań tego typu może opierać się na wykorzystaniu Definicji 4.11. Zauważmy też, że prawa de Morgana dają nowe możliwości dowodów. Jeśli należy pokazać, że zdanie typu

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

jest zdaniem fałszywym, wystarczy wskazać element m zbioru M, że zdanie $\varphi(m)$ jest zdaniem fałszywym. Taki element nazywamy kontrprzykładem na stwierdzenie

$$\forall x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

(por. punkt **4.5**). Opisaną powyżej metodę dowodu nazywamy dowodem przez podanie kontrprzykładu. Jeśli należy pokazać, że zdanie typu

$$\exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

jest zdaniem prawdziwym i wskazujemy element m zbioru M, dla którego zdanie $\varphi(m)$ jest zdaniem prawdziwym, to taki sposób argumentacji nazywamy konstruktywnym dowodem istnienia lub konstruktywnym dowodem prawdziwości zdania

$$\exists x \in \mathrm{M}[\varphi(x)]$$

Dowód, w którym nie wskazujemy konkretnego elementu element m zbioru M, dla którego zdanie $\varphi(m)$ jest zdaniem prawdziwym nazywamy dowodem niekonstruktywnym.

4.5 Kontrprzykład

Matematyk pruski Christian Goldbach przedstawił w roku 1742 następująca hipotezę:

Każda liczba parzysta większa od dwóch jest sumą dwóch liczb pierwszych.

Do dzisiaj nie wiadomo, czy zdanie to jest prawdziwe, czy fałszywe (choć jest oczywiste, że zdanie to jest albo prawdziwe, albo fałszywe). Aby obalić tę hipotezę wystarczyłoby podać kontrprzykład, czyli w tym przypadku wskazać taką liczbę parzystą, która nie jest sumą dwóch liczb pierwszych.

Pierre de Fermat analizował liczby postaci

$$F_n = 2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}$$

(współcześnie liczby te nazywamy liczbami Fermata). Fermat wiedział, że

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3\ , F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17, F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

ponadto

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537$$

Fermat zauważył, że wszystkie powyższe liczby są liczbami pierwszymi[17] i (w połowie XVII wieku) postawił hipotezę, że dla każdej liczby naturalnej *n*, liczba F_n jest liczbą pierwszą. Jednak w 1732 roku Leonard Euler wykazał, że liczba

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

jest liczbą złożoną (nie jest liczbą pierwszą), mianowicie, liczba 641 jest jednym z jej dzielników[18]. Tym samym Euler dostarczył kontrprzykładu na to, że hipoteza Fermata nie jest prawdziwa.

Nazwijmy liczby $E_n = n^2 + n + 41, n \in \mathbb{N}$ liczbami Eulera. Można obliczyć, że

$$E_0 = 41, E_1 = 43, E_2 = 47, E_3 = 53, E_4 = 61, E_5 = 71, E_6 = 83, E_7 = 97, E_8 = 113$$

Dodatkowo, wszystkie te liczby są liczbami pierwszymi. Można pokusić się o postawienie hipotezy: dla każdej liczby naturalnej *n*, liczba E_n jest liczbą pierwszą. Sensownym argumentem na to, by przyjąć prawdziwość tej hipotezy jest to, że wszystkie liczby Eulera $E_0, E_1, \dots, E_{39}$ są liczbami pierwszymi. Jednak liczba

$$E_{40} = 40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 80 + 1 = 41^2$$

nie jest liczbą pierwszą. Liczba E_{40} jest kontrprzykładem, który obala postawioną wcześniej hipotezę.

4.6 Dowód efektywny

Jest to metoda dowodzenia twierdzeń, która nie wykorzystuje twierdzeń równoważnych aksjomatowi wyboru (por. punkt **4.7**). Przykłady dowodów efektywnych z teoretycznego punktu widzenia naszkicowano w punkcie **4.4**. Pewne przykłady praktyczne omówiono w punkcie **4.5**.

4.7 Dowód nieefektywny

Jest to metoda dowodzenia twierdzeń, która opiera się na zaawansowanych wynikach należących do podstaw matematyki, na przykład, w której korzysta się z lematu Kuratowskiego-Zorna, czyli twierdzeniu równoważnemu aksjomatowi wyboru, jednemu z aksjomatów teorii zbiorów.

---

[17] Liczbę naturalną *p* nazywamy liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy *p* jest liczbą większą niż jeden oraz jedynymi dzielnikami naturalnymi liczby *p* są liczby 1 oraz *p*.

[18] Ściślej, $4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$.

Moduł nr 5. (4 godziny lekcyjne)

Strategia konstruowania dowodów na przykładach zadań maturalnych z algebry oraz geometrii.

Wiele zadań maturalnych wymaga podania dowodu pewnych własności przysługującym liczbom rzeczywistym lub uzasadnienia pewnych własności geometrycznych, które posiadają obiekty geometryczne, w szczególności figury płaszczyzny. Pomostem łączącym liczby i geometrię płaszczyzny są z pewnością tak zwane średnie liczbowe. Z formalnego punktu widzenia definiujemy je jako pewne liczby rzeczywiste. Z drugiej strony, można wskazać ich odpowiednią interpretację geometryczną. Do tego celu nadaje się wyjątkowo trapez, ściślej, długości odpowiednich odcinków, których końce należą do boków nierównoległych trapezu.

W tym module wprowadzimy pojęcia średniej harmonicznej, średniej geometrycznej, średniej arytmetycznej oraz średniej kwadratowej dla dwóch dodatnich liczb rzeczywistych. Udowodnimy podstawowe twierdzenie wiążące te średnie. Następnie wskażemy interpretację geometryczną tych średnich w trapezie.

Średnie liczbowe

Niech r, s oznaczają dowolnie ustalone liczby rzeczywiste dodatnie[19]. Dla liczb r oraz s określamy: średnią harmoniczną $S_h(r,s)$, średnią geometryczną $S_g(r,s)$, średnią arytmetyczną $S_a(r,s)$, oraz średnią kwadratową $S_k(r,s)$, w następujący sposób[20]:

$$S_h(r,s) = \frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}} = \frac{2rs}{r+s}, \qquad S_g(r,s) = \sqrt{r \cdot s}, \qquad S_a(r,s) = \frac{r+s}{2}, \qquad S_k(r,s) = \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}.$$

Średnią harmoniczną $S_h(r,s)$ interpretujemy, jak odwrotność średniej arytmetycznej odwrotności liczb r, s. Pozostałe średnie mają czytelniejszą formę. Łatwo sprawdzić, że jeśli liczby dodatnie r, s są równe, to także wszystkie średnie są równe. Każda z nich jest wtedy równa r (lub s). Przyjmijmy zatem, że $0 < r < s$. Uzasadnimy podstawowy związek między wprowadzonymi średnimi, a następnie pokażemy geometryczne interpretacje tych wielkości.

Twierdzenie 5.1

Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s prawdziwa jest implikacja

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } r < S_h(r,s) < S_g(r,s) < S_a(r,s) < S_k(r,s) < s.$$

Dowód

W dowodzie wyróżnimy pięć etapów. Odpowiadają im dowody następujących pięciu nierówności:

Etap pierwszy: dowód implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } r < S_h(r,s)$$

Etap drugi: dowód implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } S_h(r,s) < S_g(r,s)$$

Etap trzeci: dowód implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } S_g(r,s) < S_a(r,s)$$

---

[19] Liczby r, s mogą być równe.

[20] Średnia arytmetyczna i średnia kwadratowa mogą być określone dla dowolnych liczb rzeczywistych.

Etap czwarty: dowód implikacji

jeśli $0 < r < s$, to $S_a(r,s) < S_k(r,s)$

Etap piąty: dowód implikacji

jeśli $0 < r < s$, to $S_k(r,s) < s$.

A. Dowód implikacji

jeśli $0 < r < s$, to $r < S_h(r,s)$

Pamiętamy, że $S_h(r,s) = \frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}} = \frac{2rs}{r+s}$. Zastosujemy metodę badania znaku odpowiedniej różnicy. Oto odpowiednie kroki:

1. $r,s \in \mathbb{R}^+$
2. $0 < r < s$
3. $\frac{2rs}{r+s} - r = \frac{r(s-r)}{r+s}$
4. $\frac{r(s-r)}{r+s} > 0$
5. $\frac{2rs}{r+s} - r > 0$
6. $\frac{2rs}{r+s} > r$
7. $r < S_h(r,s)$

■

B. Dowód implikacji

jeśli $0 < r < s$, to $S_h(r,s) < S_g(r,s)$

Jest ona równoważna implikacji

jeśli $0 < r < s$, to $\frac{2rs}{r+s} < \sqrt{r \cdot s}$

Wykorzystamy ponownie metodę badania znaku odpowiedniej różnicy. Stosowne kroki, to:

1. $r,s \in \mathbb{R}^+$
2. $0 < r < s$
3. $\sqrt{r \cdot s} - \frac{2rs}{r+s} = \sqrt{r \cdot s}\left(1 - \frac{2\sqrt{r \cdot s}}{r+s}\right)$
4. $\sqrt{r \cdot s}\left(1 - \frac{2\sqrt{r \cdot s}}{r+s}\right) = \frac{\sqrt{r \cdot s}}{r+s}\left(r + s - 2\sqrt{r \cdot s}\right)$
5. $\frac{\sqrt{r \cdot s}}{r+s}\left(r + s - 2\sqrt{r \cdot s}\right) = \frac{\sqrt{r \cdot s}}{r+s}\left(\sqrt{s} - \sqrt{r}\right)^2$
6. $\frac{\sqrt{r \cdot s}}{r+s}\left(\sqrt{s} - \sqrt{r}\right)^2 > 0$
7. $\sqrt{r \cdot s} - \frac{2rs}{r+s} > 0$
8. $\sqrt{r \cdot s} > \frac{2rs}{r+s}$
9. $S_h(r,s) < S_g(r,s)$

■

C. Dowód implikacji

jeśli $0 < r < s$, to $S_g(r,s) < S_a(r,s)$

Jest ona równoważna implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } \sqrt{r \cdot s} < \frac{r+s}{2}$$

Zastosujemy metodę analogiczną do tej, którą wykorzystaliśmy w punktach A oraz B.

1. $r, s \in \mathbb{R}^+$
2. $0 < r < s$
3. $\frac{r+s}{2} - \sqrt{r \cdot s} = \frac{r+s-\sqrt{r \cdot s}}{2}$
4. $\frac{r+s-\sqrt{r \cdot s}}{2} = \frac{\left(\sqrt{r}+\sqrt{s}\right)^2}{2}$
5. $\frac{\left(\sqrt{r}+\sqrt{s}\right)^2}{2} > 0$
6. $\frac{r+s}{2} - \sqrt{r \cdot s} > 0$
7. $\frac{r+s}{2} > \sqrt{r \cdot s}$
8. $S_g(r, s) < S_a(r, s)$

■

D. Dowód implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } S_a(r, s) < S_k(r, s)$$

Tym razem należy pokazać prawdziwość implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } \frac{r+s}{2} < \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}$$

A oto i odpowiednie kroki dowodu:

1. $r, s \in \mathbb{R}^+$
2. $0 < r < s$
3. $\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} - \frac{r+s}{2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} - \frac{r+s}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}\right)}{\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}}$
4. $\frac{\left(\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} - \frac{r+s}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}\right)}{\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}} = \frac{\frac{r^2+s^2}{2} - \left(\frac{r+s}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}}$
5. $\frac{\frac{r^2+s^2}{2} - \left(\frac{r+s}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}} = \frac{\left(\frac{r-s}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}}$
6. $\frac{\left(\frac{r-s}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} + \frac{r+s}{2}} > 0$
7. $\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} - \frac{r+s}{2} > 0$
8. $S_a(r, s) < S_k(r, s)$

■

E. Dowód implikacji

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } S_k(r, s) < s$$

Pokażemy, że

$$\text{jeśli } 0 < r < s, \text{ to } \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} < s$$

Kroki dowodowe:

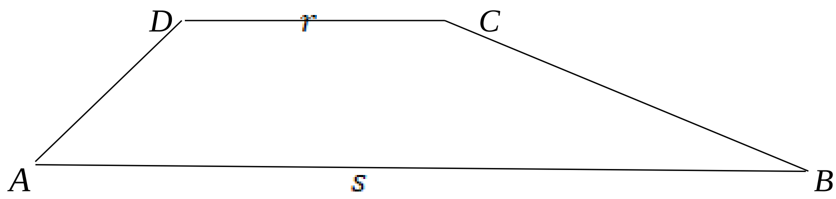
1. $r, s \in \mathbb{R}^+$
2. $0 < r < s$
3. $s - \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} = \frac{\left(s - \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}\right)}{s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}}$
4. $\frac{\left(s - \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}\right)}{s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}} = \frac{s^2 - \frac{r^2+s^2}{2}}{s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}}$
5. $\frac{s^2 - \frac{r^2+s^2}{2}}{s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}} = \frac{\frac{s^2-r^2}{2}}{s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}}$
6. $\frac{\frac{s^2-r^2}{2}}{s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}} = \frac{(s-r)(s+r)}{2\left(s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}\right)}$
7. $\frac{(s-r)(s+r)}{2\left(s + \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}\right)} > 0$
8. $s - \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} > 0$
9. $\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} < s$

■

Wszystkie przedstawione uzasadnienia występujących w twierdzeniu nierówności opierały się na tej samej idei: pokazać, że odpowiednia różnica jest liczbą dodatnią. Oczywiście, nie są to jedyne warianty dowodu zależności między podanymi średnimi. Inne sposoby wykorzystują podstawowe zależności między liczbami rzeczywistymi (na przykład monotoniczność elementarnych funkcji w odpowiednich przedziałach, mamy tu na myśli monotoniczność takich funkcji jak *funkcji kwadratowej*, *funkcji pierwiastek stopnia n*, funkcji nazywanej *proporcjonalnością odwrotną*). Ogólniej, można zdefiniować wprowadzone średnie dla dowolnego skończonego zestawu dodatnich liczb rzeczywistych i udowodnić twierdzenie ogólniejsze. W takim ujęciu nasze twierdzenie stanie się „jedynie" przypadkiem szczególnym.

Interpretacje średnich w trapezie

Rozpatrujemy trapez *ABCD* o równoległych podstawach $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Przyjmujemy, że krótsza podstawa $\overline{CD}$ ma długość *r*, $|\overline{CD}| = r$, dłuższa podstawa $\overline{AB}$ ma długość *s*, $|\overline{AB}| = s$, zatem $r < s$.



Jest oczywiste, że dla każdej liczby rzeczywistej t takiej, że $r < t < s$ istnieje odcinek powiedzmy $\overline{EF}$, równoległy do podstaw trapezu, którego długość jest równa t, to znaczy $|\overline{EF}| = t$. Oznacza to, że każda z liczb: średnia harmoniczna $S_h(r,s)$, średnia geometryczna $S_g(r,s)$, średnia arytmetyczna $S_a(r,s)$ oraz średnia kwadratowa $S_k(r,s)$ może być interpretowana jako długość pewnego odcinka trapezu *ABCD*, równoległego do jego podstaw i którego końce należą do nierównoległych boków tego trapezu.

Będziemy powoływać się na oznaczenia występujące w powyższym rysunku.

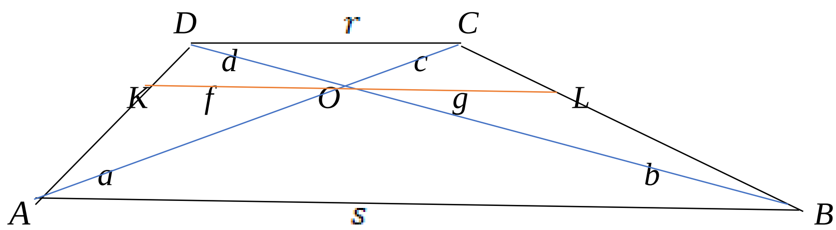
Średnia harmoniczna w trapezie

Twierdzenie 5.2

Odcinek $\overline{KL}$ równoległy do podstaw trapezu *ABCD* o danych długościach r, s, $r < s$, który przechodzi przez punkt *O* – punkt przecięcia przekątnych trapezu ma długość równą średniej harmonicznej długości podstaw, to znaczy $|\overline{KL}| = \frac{2rs}{r+s}$.

Dowód

Rysunek poglądowy



Oczywiście, $|\overline{KL}| = |\overline{KO}| + |\overline{OL}|$. Niech $|\overline{KO}| = f$, $|\overline{OL}| = g$, $|\overline{AO}| = a$, $|\overline{OC}| = c$, $|\overline{BO}| = b$, $|\overline{OD}| = d$. Wykorzystamy podobieństwo odpowiednich trójkątów (można również zastosować twierdzenie Talesa).

$\Delta AOK \sim \Delta ACD$ ⟵ (cecha *kk*) ⟶ $\Delta BOL \sim \Delta BDC$

$$\frac{a}{f} = \frac{a+c}{r} \qquad\qquad \frac{b}{g} = \frac{b+d}{r}$$

$$f = \frac{ar}{a+c} \qquad\qquad g = \frac{br}{b+d}$$

$$f + g = r\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d}\right) = r\left(\frac{1}{1+\frac{c}{a}} + \frac{1}{1+\frac{d}{b}}\right)$$

$\Delta ABO \sim \Delta CDO$ (cecha *kk*)

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{r}{s}$$

$$f + g = r\left(\frac{1}{1+\frac{c}{a}} + \frac{1}{1+\frac{d}{b}}\right) = r\left(\frac{1}{1+\frac{r}{s}} + \frac{1}{1+\frac{r}{s}}\right) = r\frac{2}{1+\frac{r}{s}} = \frac{2rs}{r+s}$$

■

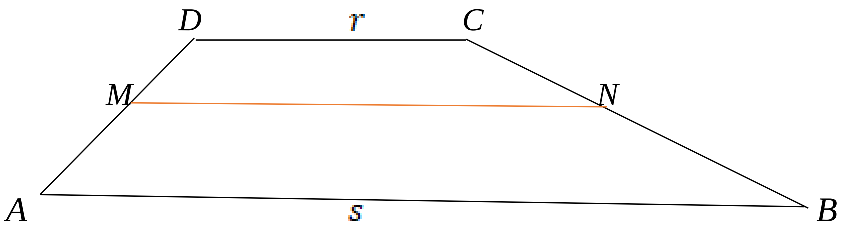
Średnia geometryczna w trapezie

Twierdzenie 5.3

Odcinek $\overline{MN}$ równoległy do podstaw trapezu *ABCD* o danych długościach r, s, gdzie $r < s$, mający tę własność, że trapezy *ABNM*, *MNCD* są podobne, to znaczy trapezy te mają odpowiednie katy wewnętrzne tej samej miary oraz prawdziwe są następujące proporcje długości boków tych trapezów (podstaw trapezów): $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{MN}|} = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{CD}|}$, ma długość równą średniej geometrycznej długości podstaw, to znaczy $|\overline{MN}| = \sqrt{r \cdot s}$.

Dowód

Rysunek poglądowy



Na podstawie założenia

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{MN}|} = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{CD}|}$$

Na podstawie przyjętych oznaczeń

$$\frac{s}{|\overline{MN}|} = \frac{|\overline{MN}|}{r}$$

W konsekwencji $|\overline{MN}| = \sqrt{r \cdot s}$.

■

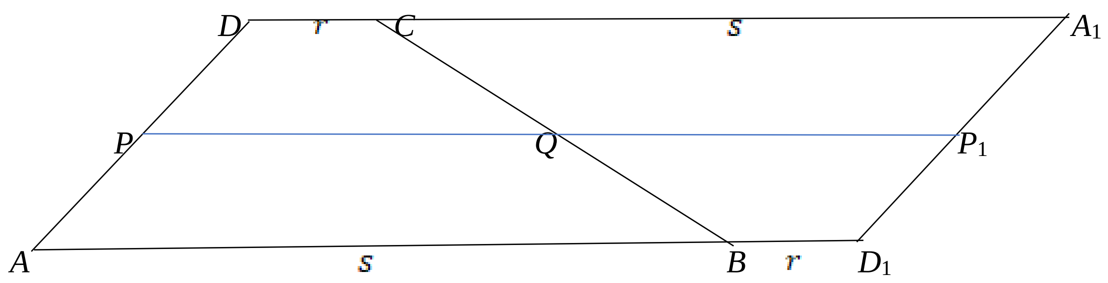
Średnia arytmetyczna w trapezie

Twierdzenie 5.4

Odcinek $\overline{PQ}$ równoległy do podstaw trapezu *ABCD* o danych długościach r, s, $r < s$, którego końcami są środki boków nierównoległych ma długość równą średniej arytmetycznej długości podstaw, to znaczy $|\overline{PQ}| = \frac{r+s}{2}$.

Dowód

Rysunek poglądowy



Po obrocie trapezu *ABCD* wokół punktu Q o kąt miary 180° otrzymamy równoległobok AD_1A_1D. Wynika stąd, że $|\overline{PQ}| = |\overline{QP_1}|$, $|\overline{PP_1}| = r + s$, $|\overline{PP_1}| = 2|\overline{PQ}|$, $|\overline{PQ}| = \frac{r+s}{2}$.

■

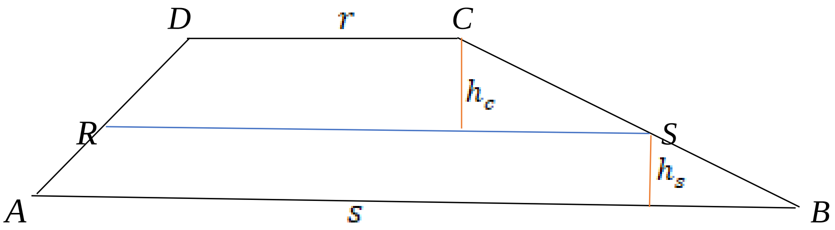
Średnia kwadratowa w trapezie

Twierdzenie 5.5

Odcinek $\overline{RS}$ równoległy do podstaw trapezu *ABCD* o danych długościach r, s, gdzie $r < s$, mający tę własność, że trapezy *ABSR*, *RSCD* mają równe pola, ma długość będącą średnią kwadratową długości podstaw, to znaczy $|\overline{RS}| = \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}$.

Dowód

Rysunek poglądowy



Niech *P* oznacza pole trapezu.

$$\frac{P}{2} = \frac{s+|\overline{RS}|}{2} h_s \qquad \frac{P}{2} = \frac{|\overline{RS}|+r}{2} h_c$$

$$h_s = \frac{P}{s+|\overline{RS}|} \qquad h_c = \frac{P}{|\overline{RS}|+r}$$

$$P = \frac{r+s}{2}(h_s + h_c) = \frac{r+s}{2}\left(\frac{P}{s+|\overline{RS}|} + \frac{P}{|\overline{RS}|+r}\right)$$

$$1 = \frac{r+s}{2}\left(\frac{1}{s+|\overline{RS}|} + \frac{1}{|\overline{RS}|+r}\right)$$

$$\frac{2}{r+s} = \frac{1}{s+|\overline{RS}|} + \frac{1}{|\overline{RS}|+r}$$

$$\frac{2}{r+s} = \frac{s+|\overline{RS}|+|\overline{RS}|+r}{(s+|\overline{RS}|)(|\overline{RS}|+r)}$$

$$\frac{2}{r+s} = \frac{s+r+2|\overline{RS}|}{(s+r)|\overline{RS}|+|\overline{RS}|^2+rs}$$

$$2(s+r)|\overline{RS}| + 2|\overline{RS}|^2 + 2rs = (r+s)^2 + 2(r+s)|\overline{RS}|$$

$$2|\overline{RS}|^2 + 2rs = (r+s)^2$$

$$2|\overline{RS}|^2 = r^2 + s^2$$

$$|\overline{RS}| = \sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}}.$$

■