Fundusze Europejskie Program Regionalny | Rzeczpospolita Polska | Samorząd Województwa Wielkopolskiego | Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły

Liceum św. Marii Magdaleny w Poznaniu

Tytuł zajęć

„Przygotowywanie meczów matematycznych”

Autor opracowania

Piotr Berda

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.: „ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań”

Poznań 2021

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

L.p.	Temat	Liczba godzin
1.	Czym są mecze matematyczne? Zasada mnożenia	1
2.	Zasada włączeń i wyłączeń	1
3.	Liczby pierwsze	1
4.	Cechy podzielności	2
5.	Kongruencje	2
6.	Równania i wzory skróconego mnożenia	1
7.	Równania diofantyczne	2
8.	Nierówności	3
9.	Mecz matematyczny	2
	Łączna liczba godzin	15

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

1 Czym są mecze matematyczne?

Motywacją do stworzenia tego koła zainteresowań były Wielkopolskie Mecze Matematyczne, które przez kilka lat przyciągały uwagę gimnazjalistów i licealistów z całego powiatu. Jako drużyna Liceum św. Marii Magdaleny gościliśmy u siebie dla przykładu VIII LO w Poznaniu, VI LO w Poznaniu, Technikum Komunikacji w Poznaniu, I LO w Gnieźnie, II LO w Wolsztynie. Za każdym razem organizacja meczu matematycznego była miłą odmianą dla całego środowiska szkolnego i umożliwiała poznanie uczniów i nauczycieli z innych szkół o podobnych zainteresowaniach. Wszystkie mecze były później długo wspominane przez uczestników.

Mecze matematyczne są bardzo ciekawym rodzajem aktywności matematycznej, w której uczniowie skutecznie uczą się matematyki, rozwijają swoją argumentację oraz umiejętność poprawnej i zwięzłej prezentacji swoich rozwiązań. Wśród największych zalet meczów matematycznych można wymienić:

- rozwijajanie umiejętności matematycznych
- ćwicznie pracy w grupie
- ćwiczenie umiejętności prezentowania rozwiązań zadań przed większą grupą osób
- rozwijanie pozytywnej rywalizacji między uczniami
- dobrą zabawę (wielu uczniów, mimo czasem niesprzyjającego wyniku meczu, bardzo pozytywnie wypowiadało się na temat takiej aktywności matematycznej).

Celem zajęć, oprócz nabycia pewnych aspektów wiedzy konkursowej, jest oczywiście przeprowadzenie meczu matematycznego, jako podsumowania całych zajęć. Forma tego meczu będzie zależna od liczby uczestników zajęć w danym dniu.

1.1 Regulamin meczu matematycznego

Drużyny mają 60 minut na opracowanie rozwiązań dziesięciu zadań. Po tej części zaczyna się rozgrywka (właściwa część meczu). Jury przydziela drużynom etykiety A i B drogą losowania. Przed rozpoczęciem rozgrywki kapitanowie potwierdzają znajomość regulaminu meczu (ewentualnie jury wyjaśnia wątpliwości). W czasie rozwiązywania zadań uczniowie nie mogą się kontaktować z nikim z zewnątrz. Należy dopilnować, aby uczestnicy meczu wyłączyli telefony komórkowe. Dozwolone jest jedynie używanie kalkulatorów prostych i tzw. maturalnych tablic matematycznych. Jury może wejść do sal, aby skontrolować przebieg przygotowań.

Podczas rozgrywki drużyny zadają sobie na przemian zadania. Drużyna, której zadano zadanie, może je przyjąć lub odbić. Jeżeli zadanie zostanie odbite, rozwiązuje je drużyna, która je zadała. Rozwiązanie zadania przedstawia na tablicy wybrany członek drużyny, nie kontaktując się z pozostałymi zawodnikami. Przedstawiający rozwiązanie może korzystać z notatek. Dobrze, aby cały zapis rozwiązania pozostał na tablicy. Każdy zawodnik może prezentować rozwiązanie co najwyżej jednego zadania.

Po zakończeniu prezentacji rozwiązania i ewentualnym jej uzupełnieniu przez kapitana drużyny (lub przez wskazaną przez niego osobę), głos może zabrać kapitan drużyny przeciwnej (lub wskazana przez niego osoba). Może zgłaszać uwagi, zastrzeżenia, komentarze, prosić prezentującego rozwiązanie o dodatkowe wyjaśnienia, przedstawić uproszczenie rozwiązania itp. Dodatkowe pytania mogą też zadawać jurorzy.

Po zakończeniu dyskusji jurorzy oceniają tylko oryginalne rozwiązanie (tzn. nie biorą pod uwagę komentarzy kapitana) w skali 0-10 (liczbami całkowitymi). Punkty odejmuje się za wszystkie luki w rozumowaniu. Oceniana jest formalna poprawność, sposób rozwiązania oraz język prezentacji. Jeśli

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

rozwiązanie jest poprawne, ale żmudne, zawiłe i daje się istotnie uprościć – stanowi to podstawę do odjęcia punktów.

Zadanie uznane za nierozwiązane ocenia się w skali 0-5, a rozwiązane – w skali 6-10. W wypadku braku jednomyślności jury oceną przyznaną drużynie za rozwiązanie zadania jest średnia arytmetyczna ocen członków jury zaokrąglona do najbliższej połowy punktu (w górę). W przypadku zadania nieodbitego, ocenionego przez Jury na 6-8 punktów, drużyna przeciwna otrzymuje dodatkowe 2 punkty, jeśli zgłosiła w swoich uwagach istotne zastrzeżenia (lub przedstawiła istotnie krótszy lub łatwiejszy sposób rozwiązania). Jeśli usterki wskazał wcześniej kapitan drużyny rozwiązującej zadanie, to przeciwnicy nie mają możliwości przejęcia punktów „za uwagi".

Drużyna, która rozwiązywała zadanie wskazane przez przeciwników, otrzymuje tyle punktów, ile wynosiła ocena jej rozwiązania (punktacja 0-10). W przypadku zadania odbitego liczba n punktów przyznanych za rozwiązanie wynika ze wzoru $n = 2(p - 5)$, gdzie p jest oceną rozwiązania zadania.

2 Elementy kombinatoryki

2.1 Reguła mnożenia

Załóżmy, że w szafie mamy 4 różne swetry oraz 6 różnych par spodni. Zastanówmy się, na ile sposobów możemy się ubrać. Dla każdego swetra mamy 6 możliwości doboru spodni. Liczba wszystkich możliwości jest zatem równa

$$6 + 6 + 6 + 6 = 4 \cdot 6 = 24.$$

W powyższych rozważaniach wykorzystaliśmy tzw. regułę mnożenia.

Twierdzenie. *Przypuśćmy, że wynik pewnego działania zależy od kolejno podejmowanych decyzji. Jeżeli przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, drugiej n_2 możliwości itd., a ostatniej n_k możliwości, to łączna liczba wyników, które możemy otrzymać jest równa*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Ćwiczenie 1. W sali lekcyjnej znajdują się 4 dwuosobowe ławki. Na ile sposobów możemy przydzielić 6 uczniom: 2 dziewczynkom i 4 chłopakom miejsca w tej sali, jeżeli

(a) nie ma żadnych dodatkowych warunków dotyczących usadzenia uczniów?

(b) dziewczynki mają siedzieć w jednej ławce?

(c) dziewczynki mają nie siedzieć w jednej ławce?

(d) każda dziewczynka ma siedzieć z chłopcem i nikt ma nie siedzieć sam?

Rozwiązanie 1. (a) Pierwszej osobie można przydzielić jedno z ośmiu miejsc, drugiej — jedno z siedmiu itd., a ostatniej — jedno z 3 pozostałych wolnych miejsc. Korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3 = 20160.$$

(b) Wybieramy najpierw ławkę, w której usiądą dziewczynki. Możemy ją wybrać na 4 sposoby. W ławce dziewczynki mogą usiąść na 2 różne sposoby. Chłopcy z kolei mogą wybrać miejsca na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ różne sposoby. Wynik zatem to

$$4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2880.$$

(c) Od wszystkich możliwych sposobów usadzenia odejmujemy usadzenia, które zliczyliśmy w podpunkcie (b). Mamy zatem $20160 - 2880 = 17280$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

(d) Dziewczynka wybiera jedno z ośmiu miejsc, a obok niej wybieramy na 4 sposoby chłopca. Kolejna dziewczynka i siedzący obok niej chłopiec mogą usiąść na $6 \cdot 3$ sposobów. Pozostało 2 chłopców. Pierwszy z nich wybiera jedno z wolnych 4 miejsc. Drugi chłopiec nie ma wyboru — musi usiąść na miejscu obok niego. Wynik to

$$8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 = 2304$$

Ćwiczenie 2. Znaki alfabetu Braille'a to układ wypukłych kropek wybranych z podstawowego układu 6 kropek. Ile różnych znaków można utworzyć w tym systemie?

Rozwiązanie 2. Tworząc znak alfabetu Braille'a, decydujemy o każdej kropce, czy będzie wypukła czy nie. Dla każdej z 6 kropek mamy więc 2 możliwości, więc wynik to

$$2^6 = 64.$$

Ćwiczenie 3. Znaki alfabetu Morse'a są zbudowane z ustawionych obok siebie kropek lub kresek. Łącznie kropek lub kresek w każdym znaku może być od 1 do 4. Ile znaków można w ten sposób utworzyć?

Rozwiązanie 3. Zliczamy osobno znaki składające się z jednej kropki lub kreski, z dwóch kropek lub kresek, trzech i tak dalej.

Dla jednego znaku mamy dwie możliwości: kropkę lub kreskę.

Dla dwóch znaków otrzymujemy $2 \cdot 2 = 4$.

Dla trzech znaków otrzymujemy $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Dla czterech znaków otrzymujemy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Po zsumowaniu wszystkich przypadków otrzymujemy $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Ćwiczenie 4. Liczbę nazywamy palindronomiczną, gdy ten sam efekt otrzymamy czytając tę liczbę od lewej i od prawej strony (np. 5225, 123454321). Oblicz, ile jest palindronomicznych liczb:

(a) pięciocyfrowych.

(b) sześciocyfrowych i złożonych tylko z cyfr 1, 2 i 3.

(c) siedmiocyfrowych i złożonych tylko z cyfr 0, 1, 2 i 3.

Rozwiązanie 4. (a) W liczbie pięciocyfrowej możemy wybrać tylko pierwszą cyfrę (na 9 sposobów), drugą cyfrę (na 10 sposobów) i trzecią cyfrę (na 10 sposobów). Pozostałe cyfry są wyznaczone przez cyfry wybrane już wcześniej. Wynik to $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

(b) Tym razem wybieramy tylko pierwsze trzy cyfry. Każdą z tych cyfr wybieramy na 3 sposoby. Mamy zatem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ różnych liczb palindronomicznych spełniających warunki zadania.

(c) Wybieramy pierwsze cztery cyfry. Pierwszą z nich wybieramy na 3 sposoby, a każdą kolejną na 4 sposoby. Odpowiedź to zatem $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$.

Ćwiczenie 5. Z dowolnej liczby jednakowych, białych lub czarnych, papierowych kwadratów o boku 1 układamy duży kwadrat o boku 4. Ile możemy otrzymać:

(a) wszystkich wzorów?

(b) wzorów o pionowej osi symetrii?

(c) wzorów o pionowej i poziomej osi symetrii?

(d) wzorów o ukośnej osi symetrii — poprowadzonej od lewej góry do prawego dołu?

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie Program Regionalny · Rzeczpospolita Polska · Samorząd Województwa Wielkopolskiego · Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Rozwiązanie 5. (a) Dla każdego z 16 kwadratów mamy 2 możliwości. Stąd liczba wzorów to 2^{16}.

(b) Skoro wzór ma mieć pionową oś symetrii, wybieramy tylko elementy na lewo od tej osi (wtedy te na prawo będą już jednoznacznie wyznaczone). Mamy więc 8 kwadratów, czyli 2^8 możliwości.

(c) Podobnie jak w podpunkcie (b), mamy tylko 4 kwadraty, których kolor możemy wybrać (pozostałe dwanaście kwadratów będzie jednoznacznie wyznaczone w zależności od tych czterech). Mamy więc 2^4 możliwości.

(d) Na ukośnej osi symetrii mamy 4 kwadraty - każdy z nich może być w dowolnym kolorze. Wybieramy jeszcze kolor dla kwadratów znajdujących się pod przekątną — 6. Łącznie mamy zatem do wyboru 10 kwadratów. Wynik to 2^{10}.

Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej zachodzi wzór $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rozwiązanie 6. Załóżmy, że chcemy policzyć, ile uścisków dłoni wymieni ze sobą $n + 1$ osób na pewnym spotkaniu. Aby otrzymać lewą stronę równości, rozumujemy następująco: pierwsza osoba musi się przywitać z każdą z pozostałych n osób, druga już z $n - 1$ osobami, trzecia z $n - 2$ itd. Przedostatnia osoba przywita się już tylko z jedną osobą, a ostatnia — z nikim (bo wszyscy się już z nią przywitali). Stąd liczba powitań to $1 + 2 + 3 + ... + n$.

Aby otrzymać prawą stronę, wybieramy dowolną z $n+1$ osób. Może się ona przywitać z dowolną z pozostałych n osób. Liczba przywitań to zatem $n(n + 1)$, ale w ten sposób każde przywitanie liczymy dwukrotnie (np. osoba 1 wita się z osobą 2, a następnie liczymy sytuację, gdy 2 wita się z 1). Wynik więc dzielimy przez 2. Stąd, lewa i prawa strona równości pozwalają na zliczanie tych samych obiektów. Zatem, lewa strona musi być równa prawej.

Ćwiczenie 7. Wykorzystaj udowodniony powyżej wzór do wykazania, że $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.

Rozwiązanie 7. Lewą stronę przedstawiamy w poniższej postaci:

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) &= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + ... + (2n - 1) =\\ &= 2(1 + 2 + 3 + ... + n) - 1 - 1 - 1 - ... - 1 =\\ &= n(n + 1) - n = n^2.\end{aligned}$$

2.2 Zasada włączeń i wyłączeń

Do rozwiązywania wielu zadań związanych ze zliczaniem elementów można użyć tzw. zasady włączeń i wyłączeń, która podaje regułę na obliczanie liczby elementów należących do sumy zbiorów (czyli np. $|A \cup B|$).

Dla dwóch zbiorów A i B wzór wygląda następująco:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

a dla trzech zbiorów A, B i C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Spróbuj podać analogiczny wzór dla czterech zbiorów A, B, C i D.

Ćwiczenie 8. Każdy uczeń w klasie gra w siatkówkę lub w koszykówkę. W siatkówkę gra 25 uczniów, w koszykówkę gra 20 uczniów, a w obie gry jednocześnie gra 15 uczniów. Ilu uczniów jest w tej klasie?

Rozwiązanie 8. Korzystamy ze wzoru na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów:

$$|S \cup K| = |S| + |K| - |S \cap K|,$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

gdzie S oznacza zbiór uczniów grających w siatkówkę, a K — zbiór uczniów grających w koszykówkę. Wtedy $|S| = 25$, $|K| = 20$ i $|S \cap K| = 15$, a zatem

$$|S \cup K| = 25 + 20 - 15 = 30.$$

Ćwiczenie 9. W klasie liczącej 30 osób, 18 osób uczy się języka włoskiego, 15 uczy się języka hiszpańskiego, a 13 języka portugalskiego. Wśród nich 8 uczniów uczy się jednocześnie włoskiego i hiszpańskiego, 10 włoskiego i portugalskiego, 5 uczy się jednocześnie hiszpańskiego i portugalskiego, a 1 osoba uczy się wszystkich trzech języków. Ilu uczniów tej klasy nie uczy się żadnego z tych języków?

Rozwiązanie 9. Analogicznie jak poprzednio, niech:
W — zbiór uczniów uczących się włoskiego
H — zbiór uczniów uczących się hiszpańskiego
P — zbiór uczniów uczących się portugalskiego
Wtedy $|W| = 18$, $|H| = 15$, $|P| = 13$ i $|W \cap H| = 8$, $|W \cap P| = 10$, $|H \cap P| = 5$ oraz $|W \cap H \cap P| = 1$. Stąd

$$|W \cup H \cup P| = 18 + 15 + 13 - 8 - 10 - 5 + 1 = 24,$$

a zatem $30 - 24 = 6$ osób w tej klasie nie uczy się żadnego z tych języków.

Ćwiczenie 10. Ile liczb trzycyfrowych na ostatniej cyfrze ma piątkę, szóstkę lub siódemkę? Na podstawie tego zadania, zastanów się, kiedy $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.

Rozwiązanie 10. Oznaczmy następujące zbiory:
A — zbiór liczb trzycyfrowych kończących się piątką
B — zbiór liczb trzycyfrowych kończących się szóstką
C — zbiór liczb trzycyfrowych kończących się siódemką
Mamy wtedy $|A| = 9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ (pierwszą cyfrę wybieramy na 9 sposobów, drugą na 10, ostatnia cyfra musi być piątką). Podobnie $|B| = |C| = 9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$
Każda para powyższych zbiorów ma pustą część wspólną. Stąd

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| = 90 + 90 + 90 = 270.$$

Wynika stąd, że aby zachodziła równość $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$, żadne dwa ze zbiorów A, B i C nie mogą mieć części wspólnej.

Ćwiczenie 11. Ile liczb dwucyfrowych ma w swoim zapisie dziesiętnym co najmniej 1 ósemkę?

Rozwiązanie 11. Wprowadźmy oznaczenia:
A— zbiór liczb dwucyfrowych z ósemką na cyfrze dziesiątek
B— zbiór liczb dwucyfrowych z ósemką na cyfrze jedności
Aby rozwiązać zadanie, szukamy liczby elementów zbioru $A \cup B$. Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń mamy:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Obliczamy:

$$|A| = 1 \cdot 10 = 10,$$

ponieważ cyfrę dziesiątek możemy wybrać na 1 sposób (musi być nią ósemka), a cyfrą jedności może być dowolna cyfra.

$$|B| = 9 \cdot 1 = 9,$$

ponieważ cyfrę dziesiątek możemy wybrać na 9 sposobów (na pierwszym miejscu nie może być 0), a cyfrą jedności musi być ósemka (jedna możliwość). Ponadto

$$|A \cap B| = 1 \cdot 1 = 1,$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

bo mamy 1 możliwość na cyfrę dziesiątek i 1 możliwość na cyfrę jedności (szukaną liczbą jest oczywiście 88). Stąd

$$|A \cup B| = 10 + 9 - 1 = 18.$$

Ćwiczenie 12. Ile liczb trzycyfrowych ma w swoim zapisie dziesiętnym co najmniej 1 ósemkę?

Rozwiązanie 12. Podobnie jak poprzednio, wprowadźmy oznaczenia:
A— zbiór liczb trzycyfrowych z ósemką na cyfrze setek
B— zbiór liczb trzycyfrowych z ósemką na cyfrze dziesiątek
C— zbiór liczb trzycyfrowych z ósemką na cyfrze jedności
Aby rozwiązać zadanie, szukamy liczby elementów zbioru $A \cup B \cup C$. Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń mamy:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Obliczamy:

$$|A| = 1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$$

$$|B| = 9 \cdot 1 \cdot 10 = 90$$

$$|C| = 9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$$

$$|A \cap B| = 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10$$

$$|B \cap C| = 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$$

$$|C \cap A| = 1 \cdot 10 \cdot 1 = 10$$

$$|A \cap B \cap C| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

zatem

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 90 + 90 - 10 - 9 - 10 + 1 = 252.$$

Ćwiczenie 13. W pewnej restauracji mamy możliwość zamówienia 4 różnych przystawek (w tym kanapki z łososiem), 8 zup (w tym rosołu), 7 dań głównych (w tym pierogów) i 5 deserów (w tym gofrów). Ile różnych czterodaniowych posiłków można zjeść w tej restauracji, jeżeli zakładamy, że chcemy:

(a) zjeść rosół, pierogi lub gofry?

(b) zjeść rosół lub nie zjeść gofrów?

(c) zjeść kanapkę z łososiem i rosół lub rosół i pierogi?

Rozwiązanie 13. Przyjmijmy standardowe oznaczenia:
$|K|$— liczba czterodaniowych zestawów zawierających kanapkę z łososiem
$|R|$— liczba czterodaniowych zestawów zawierających rosół
$|P|$— liczba czterodaniowych zestawów zawierających pierogi
$|G|$— liczba czterodaniowych zestawów zawierających gofry

(a) Szukamy liczby elementów zbioru $R \cup P \cup G$. Z zasady włączeń i wyłączeń:

$$|R \cup P \cup G| = |R| + |P| + |G| - |R \cap P| - |P \cap G| - |G \cap R| + |R \cap P \cap G| =$$
$$= 140 + 160 + 224 - 20 - 32 - 28 + 4 = 448.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

(b) Szukamy liczby elementów zbioru $R \cup \sim G$. Mamy

$$|R \cup \sim G| = |R| + | \sim G| - |R \cap \sim G| = 140 + 1120 - 112 = 1148,$$

ponieważ $| \sim G| = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$ oraz $|R \cap \sim G| = 4 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4$.

(c) Szukamy liczby elementów zbioru $(K \cap R) \cup (R \cap P)$. Mamy oczywiście

$$|(K \cap R) \cup (R \cap P)| = |K \cap R| + |R \cap P| - |K \cap R \cap P| =$$
$$= 35 + 20 - 5 = 50.$$

3 Podzielność

3.1 Liczby pierwsze

Poniżej podajemy (chyba) najważniejsze twierdzenie dotyczące liczb pierwszych.

Twierdzenie. *Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.*

Dowód. Załóżmy, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, powiedzmy, że są to liczby $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Wtedy liczba

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$$

nie jest podzielna przez żadną z liczb $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, a zatem musi być liczbą pierwszą. Stąd założenie, że liczb pierwszych jest skończenie wiele doprowadziło nas do sprzeczności. Zatem musi ich być nieskończenie wiele. □

Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych, np:

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Za pomocą tego rozkładu można znaleźć liczbę dzielników każdej liczby naturalnej n.

Ćwiczenie 14. Udowodnij, że jeżeli liczba $n \in \mathbb{N}$ ma następujące przedstawienie w postaci rozkładu na czynniki pierwsze:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_k^{\alpha_k} \quad (p_1, p_2, ..., p_k \in \mathbb{P},\ \alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}_+),$$

to liczba jej naturalnych dzielników jest równa $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

Rozwiązanie 14. Rozpatrzmy czynnik pierwszy p_1. W rozkładzie pojawia się on α_1— krotnie, zatem w szukanym dzielniku może pojawić się 0 razy, raz, dwa razy, ... , α_1 razy. Mamy zatem $(\alpha_1 + 1)$ sposobów na wybór wykładnika liczby p_1 w naszym dzielniku. Analogicznie, na $(\alpha_2 + 1)$ wybieramy wykładnik dla liczby p_2; na $(\alpha_3 + 1)$ wybieramy wykładnik dla liczby p_3 itd. Korzystając z reguły mnożenia, łatwo stwierdzamy, że wszystkie k wykładników możemy wybrać na

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_k + 1)$$

różnych sposobów. A ponieważ każdy układ wykładników tworzy inny dzielnik liczby n, to liczba naturalna dzielników liczby n jest równa $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

Ćwiczenie 15. Wykorzystaj wzór udowodniony w poprzednim zadaniu do znalezienia liczby całkowitych dzielników liczby n.

Rozwiązanie 15. Każdy ze znalezionych dzielników może być dodatni lub ujemny. Stąd liczba całkowitych dzielników to $2 \cdot (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ćwiczenie 16. Wykorzystaj wzór udowodniony w zadaniu 1 do odpowiedzi na poniższe pytania:

(a) ile nieparzystych dzielników ma liczba $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^5$?

(b) ile dzielników podzielnych przez 5 ma liczba 8866442200? (wskazówka: 8866442200$= 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 233 \cdot 353$)

Rozwiązanie 16. (a) Skoro szukamy nieparzystych dzielników, to nie może w rozkładzie tego dzielnika pojawić się liczba 2. Wykładnik liczby możemy wybrać już na 5 sposobów (w rozkładzie może pojawić się 0, 1, 2, 3 lub 4 trójki). Postępując analogicznie dla piątki, siódemki i jedenastki, liczba nieparzystych dzielników będzie równa

$$5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 160$$

(b) Skoro dzielnik ma być podzielny przez 5, to w jego rozkładzie na czynniki pierwsze może się pojawić jedna lub dwie piątki (mamy 2 możliwości). Korzystając z udowodniego wzoru otrzymujemy szukaną liczbę dzielników:

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192.$$

Ćwiczenie 17. Wiadomo, że liczby p, q oraz r są liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnij, że liczba $p+q$ jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie 17. Zauważmy, że ponieważ podane w treści zadania liczby są pierwsze i większe od 2, stąd są nieparzyste. Zatem ich suma jest parzysta i większa od 2. Zatem jest liczbą złożoną.

Ćwiczenie 18. Wiadomo, że liczby p, q oraz r są liczbami pierwszymi większymi od 2. Ile naturalnych dzielników ma liczba pq? A ile liczba pqr?

Rozwiązanie 18. Liczba pq ma 4 dzielniki naturalne: p, q, pq oraz oczywiście 1. Dla liczby pqr dzielników jest 8 (warto zauważyć, że dzielników jest tyle, ile podzbiorów zbioru 3—elementowego).

Ćwiczenie 19. Wiadomo, że liczby p, q oraz r są liczbami pierwszymi większymi od 2. Wykaż, że równanie $pqr = 5(p+q+r)$ nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie 19. 3. Widzimy, że wyrażenie po prawej stronie równania jest podzielne przez 5. Wyrażenie po lewej stronie równości jest iloczynem trzech liczb pierwszych, a zatem będzie ono podzielne przez 5 tylko wtedy, gdy jedna z liczb p, q lub r będzie równa 5. Niech więc $p = 5$. Otrzymujemy równanie postaci:

$$5qr = 5(5+q+r)$$
$$qr = 5+q+r,$$

czyli

$$qr - q - r = 5.$$

Wykorzystamy teraz „sprytne” grupowanie wyrazów poprzez dodanie obustronne liczby 1:

$$qr - q - r + 1 = 6$$
$$q(r-1) - (r-1) = 6$$
$$(q-1)(r-1) = 6.$$

Ponieważ $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, zachodzić mogą jedynie poniższe przypadki:

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=6 \end{cases} \vee \begin{cases} p-1=6 \\ q-1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} p-1=2 \\ q-1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} p-1=3 \\ q-1=2 \end{cases},$$

stąd już łatwo otrzymujemy szukane liczby. Są to 2, 7 i 5 (zauważmy, że w dwóch ostatnich przypadkach jedna ze zmiennych nie jest liczbą pierwszą).

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie Program Regionalny | Rzeczpospolita Polska | Samorząd Województwa Wielkopolskiego | Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Ćwiczenie. Poniżej przedstawiono program w programie Python, który dla wprowadzonej liczby n wypisuje "True", jeżeli liczba jest pierwsza oraz "False", jeżeli liczba nie jest pierwsza.

```
1 def czy_pierwsza(n):
2     for i in range(2, n):
3         if n % i == 0:
4             return False
5     return True
```

Spróbuj wywnioskować, w jaki sposób działa ten algorytm (wskazówka: w 2. linijce jest zaprogramowana pętla, w której zmienna i przyjmuje wartości 2, 3, ..., n. W programie Python znak % oznacza resztę z dzielenia.

Ćwiczenie 20. Przedstawiony w powyższym zadaniu algorytm nie jest efektywny (tzn. nie jest to najszybszy algorytm rozwiązujący zadany problem). Zastanów się, czy pętla w linijce 2 na pewno musi przebiegać wszystkie liczby naturalne z zakresu $\langle 2, n\rangle$.

Rozwiązanie 20. Pętla nie musi przebiegać wszystkich liczb naturalnych z przedziału $\langle 2, n\rangle$, wystarczy, aby przebiegała liczby z zakresu $\langle 2, \sqrt{n}\rangle$. Jeżeli bowiem liczba ma dzielnik większy on $\sqrt{n}$, to musi mieć również dzielnik mniejszy od $\sqrt{n}$, który już znajduje się w podanym przedziale.

3.2 Cechy podzielności

Do dowodzenia podzielności wykorzystujemy oczywiście cechy podzielności. Warto zapamiętać, że wszystkie cechy podzielności, są równoważnościami, czyli, że zawierają spójnik logiczny "wtedy i tylko wtedy, gdy". Dla przykładu: „liczba jest podzielna przez 2 wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfrą jedności jest 0, 2, 4, 6 lub 8".

Aby udowodnić cechę podzielności, czyli równoważność, należy pamiętać, że

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p),$$

czyli, że należy udowodnić twierdzenie „w dwie strony" (implikację prostą oraz odwrotną).

Udowodnimy cechę podzielności przez 4 dla liczb trzycyfrowych.

Twierdzenie. *Liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr tej liczby jest podzielna przez 4.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech x będzie liczbą trzycyfrową podzielną przez 4. Oznacza to, że

$$x = 100a + 10b + c,$$

gdzie a, b, $c \in \{0, 1, 2, ..., \}$, $a \neq 1$ (dlaczego?).

Wtedy $4|100c$, bo $c \in \mathbb{Z}$, a zatem, żeby x było podzielne przez 4, czwórka musi być dzielnikem $10b+c$. Liczba $10b + c$ jest liczbą utworzoną z ostatnich dwóch cyfr liczby x, a zatem teza jest udowodniona.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że x jest liczbą, której ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Podobnie jak poprzednio, dowolną liczbę trzycyfrową zapiszemy w postaci

$$x = 100a + 10b + c,$$

a zatem x jest sumą dwóch liczb podzielnych przez 4 ($100a$ oraz $10b + c$). Musi więc być podzielny przez 4. $\square$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ćwiczenie. Udowodnij kilka wybranych cech podzielności, np. przez 2 lub 5 (to łatwiejsze) lub przez 3 i 9 (to będzie trudniejsze) dla liczb trzycyfrowych.

Znajomość cech podzielności wykorzystać do rozwiązywania zadań związanych konkursowych. Pierwsze z podanych zadań może rozwiązać także uczeń uczący się matematyki na poziomie podstawowym. Wystarczy jedynie, żeby znał wzory skróconego mnożenia przypomniane poniżej.

Wzory skróconego mnożenia:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — wzór na kwadrat sumy
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — wzór na kwadrat różnicy
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ — wzór na kwadrat różnicy

Ćwiczenie 21. Przy dzieleniu liczb a, b i c przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty 1, 2 i 3. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb daje resztę 4 z dzielenia przez 5.

Rozwiązanie 21. Z założeń otrzymujemy, że

$$a = 5k + 1$$

$$b = 5l + 2$$

$$c = 5m + 3$$

dla pewnych liczb całkowitych k, l, $m \in \mathbb{Z}$. Po podstawieniu:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (5k+1)^2 + (5l+2)^2 + (5m+3)^2 = 5(5k^2 + 5l^2 + 5m^2 + 2k + 4l + 6m + 2) + 4,$$

a ponieważ $5k^2 + 5l^2 + 5m^2 + 2k + 4l + 6m + 2 \in \mathbb{Z}$, zatem teza jest prawdziwa.

Poniżej podajemy przykłady kilku innych prostych zadań oraz kilku bardziej złożonych.

Ćwiczenie 22. Liczby naturalne spełniają równość $56a = 65b$. Wykaż, że liczba $a + b$ jest złożona.

Rozwiązanie 22. Zauważmy, że

$$56(a+b) = 56a + 56b = 65b + 56b = 121b.$$

Stąd, ponieważ, $NWD(56, 121) = 1$, to $a + b$ jest podzielne przez 121.

Ćwiczenie 23. Wykaż, że jeżeli a jest liczbą naturalną, to $a^3 - a$ jest podzielne przez 6.

Rozwiązanie 23. Wykorzystamy rozkład wyrażenia $a^3 - a$ na czynniki:

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1),$$

co oznacza, że $a^3 - a$ jest iloczynem trzech kolejnych liczba całkowitych. Wśród tych trzech kolejnych liczb całkowitych musi być jedna podzielna przez 3 i co najmniej jedna podzielna przez 2. Stąd wynika teza.

Ćwiczenie 24. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.

Rozwiązanie 24. W rozwiązaniu wykorzystamy rozkład wyrażenia na czynniki:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Ponieważ $n^2 - 2n + 2 < n^2 + 2n + 2$, to aby $n^4 + 4$ była liczbą pierwszą, musi zajść, że $n^2 - 2n + 2 = 1$, czyli $n = 1$. Wtedy $n^4 + 4 = 5$, czyli 1 jest szukaną wartością n. Dla pozostałych liczb naturalnych wyrażenie $n^4 + 4$ jest iloczynem dwóch liczb naturalnych większych od 1, a zatem jest liczbą złożoną.

W powyższym rozwiązaniu zastosowaliśmy szczególny przypadek tzw. tożsamości Sophie-Germain. Wygląda ona nastepująco:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2).$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ćwiczenie 25. Wykaż, że liczba $2^{2002} + 5^{2000}$ jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie 25. Skorzystamy z tożsamości Sophie-Germain:

$$\begin{aligned}5^{2000} + 2^{2002} &= (5^{1000})^2 + 4 \cdot (2^{1000})^2 = \\ &= (5^{1000} - 5^{500} \cdot 2^{501} + 2^{1001})(5^{1000} + 5^{500} \cdot 2^{501} + 2^{1001})\end{aligned}$$

i łatwo zauważamy, że oba czynniki są większe od 1.

3.3 Kongruencje

Do rozwiązywania zadań dotyczących podzielności oraz reszt z dzielenia możemy użyć kongruencji.

Definicja. Mówimy, że

$$a \equiv b \mod n,$$

co czytamy "a przystaje do b modulo n", jeżeli $n|(a-b)$.

Dla przykładu, $3 \equiv 3 \mod 6$, $7 \equiv 3 \mod 2$, $-8 \equiv -18 \mod 10$.

Ćwiczenie. Udowodnij, że relacja przystawania do siebie modulo n jest relacją:

1. zwrotną, czyli $a \equiv a \mod n$,
2. symetryczną, czyli $a \equiv b \mod n \Leftrightarrow b \equiv a \mod n$,
3. przechodnia, czyli z faktu, że $a \equiv b \mod n$ oraz $b \equiv c \mod n$ wynika, że $a \equiv c \mod n$.

Przy rozwiązywaniu zadań będziemy bardzo często korzystać z działań, które możemy wykonywać na kongruencjach. Są to dodawanie, odejmowanie i mnożenie obustronnie kongruencji tego samego typu.

Twierdzenie. *Jeżeli* $a \equiv b \mod n$ *oraz* $c \equiv d \mod n$, *to*

1. $a + c \equiv b + d \mod n$

2. $a - c \equiv b - d \mod n$

3. $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod n$

Dowód. Udowodnimy ostatnią własność. Jak łatwo sprawdzić, $n|[(a-b)c + b(c-d)]$. Mamy:

$$(a-b)c + b(c-d) = ac - bc + bc - bd = ac - bd,$$

a zatem również $n|(ac - bd)$, czyli $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod n$. □

Wniosek. *Jeżeli* $a \equiv b \mod n$, *to* $a^k \equiv b^k \mod n$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$.

Warto powiedzieć uczniom, że kongruencji w ogólności nie możemy dzielić stronami. Prawdziwe jest bowiem jedynie następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeżeli* $NWD(c, k, a, b) = 1$, *to z faktu, że* $a \equiv b \mod k$ *wynika, że*

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \mod k$$

Rozwiążemy teraz kilka zadań wykorzystując własności kongruencji. Zauważmy, że zazwyczaj zadania wykorzystujące kongruencje rozwiązuje się poprzez znalezienie liczby przystającej do 1 lub -1 modulo n.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ćwiczenie 26. Wykaż, że ostatnią cyfrą liczby 7^{256} jest 1.

Rozwiązanie 26. Znajdźmy jakąś potęgę liczby 7, która kończy się jedynką. Jak łatwo sprawdzić, $7^4 = 2401$, a więc

$$7^4 \equiv 1 \mod 10$$

i potęgując stronami:

$$(7^4)^{64} \equiv 1^{64} \mod 10$$

$$7^{256} \equiv 1 \mod 10,$$

czyli ostatnią cyfrą 7^{256} jest 1.

Ćwiczenie 27. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 34^{10} bez użycia kalkulatora.

Rozwiązanie 27. Aby znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby, posłużymy się kongruencją modulo 100. Trzeba znaleźć kongruencję, która da się łatwo potęgować. Niestety, $34^2 \equiv 56 \mod 100$, ale znacznie lepiej wygląda kongruencja $34^3 \equiv 4 \mod 100$. Stąd

$$34^9 \equiv 4^3 \mod 100,$$

a więc

$$34^{10} \equiv 4^3 \cdot 34 \equiv 2176 \equiv 76 \mod 100,$$

zatem ostatnie dwie cyfry liczby $34^{10}$to 7 i 6.

Ćwiczenie 28. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 3^{100} przez 28.

Rozwiązanie 28. Podobnie jak poprzednio, szukamy potęgi liczby 3, która będzie przystawać do 28 modulo 1 lub -1. Mamy

$$3^3 \equiv -1 \mod 28$$

i potęgując stronami

$$3^{99} \equiv (-1)^{33} \equiv -1 \mod 28,$$

a zatem

$$3^{100} \equiv -3 \mod 28,$$

więc $3^{100} + 3 = 28k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Aby znaleźć resztę z dzielenia, zapisujemy

$$3^{100} = 28k - 3 = 28(k-1) + 28 - 3 = 28(k-1) + 25,$$

a ponieważ $(k-1) \in \mathbb{Z}$, to szukaną resztą z dzielenia jest 25.

Ćwiczenie 29. Wykaż, że

(a) $13 | 5^{36} - 1$

(b) $13 | 2^{70} + 3^{70}$.

Rozwiązanie 29. (a) Szukamy potęgi liczby 5, która przystaje do 13 modulo 1 lub -1. Mamy

$$5^2 \equiv -1 \mod 13,$$

czyli

$$(5^2)^{18} \equiv (-1)^{18} \equiv 1 \mod 13,$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

a stąd

$$5^{36} - 1 \equiv 0 \mod 13,$$

zatem teza jest prawdziwa.

(b) Podobnie jak poprzednio znajdziemy jakąś specjalną własność łączącą 13 z liczbami 2 i 3. Widać, że

$$2^6 \equiv -1 \mod 13.$$

Zatem

$$(2^6)^{11} \equiv -1 \mod 13,$$

a ponieważ

$$2^4 \equiv 3 \mod 13,$$

to mnożąc dwie ostatnie kongruencje stronami otrzymujemy

$$2^{70} \equiv -3 \mod 13 \tag{1}$$

Analogicznie postępujemy z potęgą trójki:

$$3^3 \equiv 1 \mod 13$$

$$(3^3)^{23} \equiv 1^{23} \mod 13,$$

czyli

$$3^{69} \equiv 1 \mod 13.$$

Po przemnożeniu przez kongruencję:

$$3 \equiv 3 \mod 13$$

otrzymujemy

$$3^{70} \equiv 3 \mod 13. \tag{2}$$

Dodając stronami kongruencje (1) i (2) otrzymujemy, że

$$2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \mod 13,$$

co dowodzi tezy.

Ćwiczenie 30. Wykaż, że jeżeli liczby $x, y, z \in \mathbb{Z}$ spełniają równanie $x^2 + y^2 = z^2$, to

(a) co najmniej jedna z liczba x i y jest podzielna przez 3.

(b) co najmniej jedna z liczba x i y jest podzielna przez 4.

(c) co najmniej jedna z liczba x,y i z jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie 30. (a) Zauważmy, że

- jeżeli $n \equiv 0 \mod 3$, to $n^2 \equiv 0 \mod 3$
- jeżeli $n \equiv 1 \mod 3$, to $n^2 \equiv 1 \mod 3$
- jeżeli $n \equiv 2 \mod 3$, to $n^2 \equiv 1 \mod 3$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Stąd wynika, że n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0 lub 1. Jeżeli założymy, że żadna z liczb x oraz y nie jest podzielna przez 3, to

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \mod 13,$$

co jest sprzeczne, bo kwadrat liczby całkowitej nie może przystawać do 2 modulo 3.

(b) Posłużymy się kongruencją modulo 8. Wtedy

- jeżeli $n \equiv 0 \mod 8$, to $n^2 \equiv 0 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 1 \mod 8$, to $n^2 \equiv 1 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 2 \mod 8$, to $n^2 \equiv 4 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 3 \mod 8$, to $n^2 \equiv 1 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 4 \mod 8$, to $n^2 \equiv 0 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 5 \mod 8$, to $n^2 \equiv 1 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 6 \mod 8$, to $n^2 \equiv 4 \mod 8$
- jeżeli $n \equiv 7 \mod 8$, to $n^2 \equiv 1 \mod 8$

Jeżeli założymy, że żadna z liczb x, y nie jest podzielna przez 4, to ich kwadraty dają resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 8. Suma kwadratów tych liczb daje zatem resztę 2, 5 lub 0 przy dzieleniu przez 8. Skoro to suma kwadratów też ma być kwadratem, zatem zachodzi ostatni przypadek. Wtedy każda z liczb x, y musi być podzielna przez 2 i niepodzielna przez 4. Zatem $x = 2u$ i $y = 2w$, gdzie u i w są nieparzyste. Wtedy również z jest parzyste: $z = 2t$. Mamy:

$$(2u)^2 + (2w)^2 = (2t)^2$$

$$u^2 + w^2 = t^2,$$

jednak liczby u i w są nieparzyste, czyli ich kwadraty przystają do 1 modulo 8. Stąd $t^2 \equiv 2 \mod 8$, co, jak pokazaliśmy wcześniej, nie jest możliwe.

(c) Postępując podobnie jak poprzednio pokazujemy, że kwadraty liczb całkowitych przystają do 0, 1 lub 4 modulo 5. Jeżeli zatem żadna z liczb x, y nie jest podzielna przez 5, to suma ich kwadratów może przystawać do 2 (co nie jest możliwe, skoro z^2 jest kwadratem), 3 (tak samo) lub 0. Stąd z jest podzielne przez 5.

4 Równania i nierówności

W poprzednim zadaniu zajęliśmy się rozwiązywaniem pewnego równania w zbiorze liczb całkowitych. W tym rozdziale rozszerzymy to zagadnienie.

4.1 Równania i wzory skróconego mnożenia

W tym opracowaniu skupimy się na rozwiązywaniu równań z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia oraz na równaniach diofantycznych, czyli takich, które rozwiązuje się jedynie w zbiorze liczb całkowitych.

Ćwiczenie 31. Wykaż, że:

(a) jeżeli $a^2 + b^2 = 2ab$, to $a = b$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

(b) jeżeli $a, b > 0$ oraz $a^2 - b^2 = 0$, to $a = b$.

(c) jeżeli $a, b > 0$ oraz $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = 0$, to $a = b$.

Rozwiązanie 31. (a) Przenosimy $2ab$ na drugą stronę i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$
$$(a-b)^2 = 0.$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, to będzie on równy 0 tylko wtedy, gdy $a - b = 0$, czyli $a = b$.

(b) Użyjemy wzoru skróconego mnożenia na równości z założenia:

$$a^2 - b^2 = 0$$
$$(a-b)(a+b) = 0$$
$$a - b = 0 \ \vee \ a + b = 0$$
$$a = b \ \vee \ a = -b.$$

Zauważmy, że ponieważ $a, b > 0$, to nie może zajść przypadek $a = -b$. Musi zatem zachodzić $a = b$.

(c) Spróbujemy pogrupować wyrazy na równości z założenia:

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) = 0$$
$$(a-b)(a^2 - b^2) = 0$$
$$(a-b)(a-b)(a+b) = 0$$
$$(a-b)^2(a+b) = 0.$$

A zatem

$$a - b = 0 \ \vee \ a + b = 0$$
$$a = b \ \vee \ a = -b$$

i znowu drugi z przypadków zajść nie może, skoro a i b są liczbami dodatnimi.

Ćwiczenie 32. Uzasadnij, że jeżeli długości boków trójkąta spełniają zależność

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

to trójkąt jest równoboczny.

Rozwiązanie 32. Wyrażenia po prawej stronie równości: ab, bc i ca znajdują się we wzorach skróconego mnożenia pomnożone przez 2. Pomnóżmy więc tę równość obustronnie:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Przenosimy wszystko na stronę lewą:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0,$$

a następnie sprytnie grupujemy wyrazy:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) = 0$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0.$$

Kwadraty liczb nieujemnych są nieujemne, zatem, żeby ich suma była równa 0, muszą zajść równości

$$a - b = 0 \ \wedge \ b - c = 0 \ \wedge \ c - a = 0,$$

a stąd $a = b = c$, czyli trójkąt jest równoboczny.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

4.2 Równania diofantyczne

Przypomnijmy, że równaniami diofantycznymi nazywamy równania, które rozwiązujemy w zbiorze liczb całkowitych lub naturalnych. Nazwa tego typu równań pochodzi od greckiego matematyka Diofantosa (III w.n.e.). W kolejnych ćwiczeniach będziemy szukali więc liczb całkowitych spełniających dane równanie lub dowodzili, że takie rozwiązanie istnieć nie może.

Ćwiczenie 33. Rozwiąż podane równania w zbiorze liczb całkowitych:

(a) $(x-2)(y+3) = 2$

(b) $xy + x = 2y + 7$

Rozwiązanie 33. (a) Ponieważ $x, y \in \mathbb{Z}$, zatem $x-2, y+3 \in \mathbb{Z}$. Skoro iloczyn tych liczb ma być równy 2, to każda z tych liczb musi być całkowitym dzielnikiem liczby 2. Mamy więc następujące przypadki:

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y+3=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=2 \\ y+3=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=-1 \\ y+3=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=-2 \\ y+3=-1 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}.$$

(b) Spróbujemy odpowiednio pogrupować wyrażenia:

$$xy + x - 2y - 7 = 0$$

$$(x-2)y + x - 2 - 5 = 0$$

$$(x-2)(y+1) = 5,$$

więc podobnie jak poprzednio:

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y+1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=5 \\ y+1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=-1 \\ y+1=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=-5 \\ y+1=-1 \end{cases},$$

a stąd

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 34. Wykaż, że podane równanie nie mają rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych:

(a) $2x + 4y + 8z = 17$

(b) $x^2 + y^2 = 4z + 3$

(c) $x^2 + 1 = 3y^3$

(d) $x^2 + y^3 = 30$.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Rozwiązanie 34. (a) Widzimy, że lewą stronę równania łatwo można przedstawić w postaci $2(x + 2y + 4z)$. Liczba $x + 2y + 4z$ musi być liczbą całkowitą, a zatem lewa strona równania jest podzielna przez 2. Prawa strona jest jednak nieparzysta. Stąd sprzeczność.

(b) Liczba $4z + 3$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 4. Lewa strona jest natomiast sumą dwóch kwadratów. Pokażemy, że suma dwóch kwadratów nie może dawać reszty 3 z dzielenia przez 4.

W poniższej tabelce przedstawimy możliwe kombinacje reszt z dzielenia liczb x, y, kwadratów tych liczb oraz sumy tych kwadratów (informacje te można łatwo wykazać algebraicznie albo korzystając z własności kongruencji). Dla skrócenia tabeli, rozpatrzymy tylko przypadki, kiedy reszta z dzielenia x jest większa równa reszcie z dzielenia y (możemy tak zrobić, bo przypadek, gdy np. x daje resztę 3, a y resztę 2 będzie analogiczny do przypadku, gdy x daje resztę 2, a y resztę 3).

x	y	x^2	y^2	$x^2 + y^2$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	1	1	2
2	0	0	0	0
2	1	0	1	1
2	2	0	0	0
3	0	1	0	1
3	1	1	1	2
3	2	1	0	1
3	3	1	1	2

Jak widać z ostatniej kolumny, nie jest możliwe, żeby resztą z dzielenia liczby $x^2 + y^2$ była liczba 3. Stąd równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

(c) Analogicznie jak poprzednio, liczba x^2 nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3, stąd liczba $x^2 + 1$ nie jest podzielna przez 3, w przeciwieństwie do $3y^3$.

(d) Posłużymy się podobną metodą. Aby równanie

$$x^2 + 2y^3 = 30$$

miało rozwiązanie w liczbach całkowitych, to suma kwadratu i sześcianu musiałaby dawać resztę 3 z dzielenia przez 9. Łatwo sprawdzić, że kwadrat liczby całkowitej może przy dzieleniu przez 9 dawać resztę 0, 1, 4 lub 7. Sześcian z kolei, może dać jedynie resztę 0,1 lub 8, więc pomnożony przez 2 da nam reszty 0, 2 lub 7. Dodając poszczególne reszty, nie otrzymamy nigdy reszty równej 3. Stąd równanie jest sprzeczne.

Jeszcze inną metodą rozwiązywania równań diofantycznych jest metoda nieskończonego schodzenia. Jest to metoda przydatna do pokazywania, że równanie nie ma rozwiązania w zbiorze liczb naturalnych dodatnich, a jej działanie opiera się na dość oczywistym stwierdzeniu, że w każdym niepustym podzbiorze liczb naturalnych dodatnich istnieje element najmniejszy. Pokażemy jej działanie na poniższych przykładach.

Ćwiczenie 35. Rozwiąż równanie

(a) $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ w liczbach naturalnych dodatnich.

(b) $x^2 + y^2 = 3z^2$ w liczbach naturalnych dodatnich.

Rozwiązanie 35. (a) Niech czwórka (x, y, z, t) będzie rozwiązaniem naszego równania o najmniejszej możliwej wartości x. Możemy to założyć, bo każdy niepusty pozbiór zbioru liczb naturalnych posiada

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

element najmniejszy. Jeżeli czwórka (x, y, z, t) ma być rozwiązaniem naszego równania, to t musi być podzielne przez 2, czyli $t = 2t_1$. Stąd

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = 16t_1^4 / : 2$$

$$4x^4 + 2y^4 + z^4 = 8t_1^4,$$

a stąd z musi być podzielne przez 2, czyli $z = 2z_1$, gdzie $z_1 \in \mathbb{N}$. Mamy

$$4x^4 + 2y^4 + 16z_1^4 = 8t_1^4 / : 2$$

$$2x^4 + y^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4.$$

Stąd y jest podzielne przez 2, czyli $y = 2y_1$, gdzie $y_1 \in \mathbb{N}$. A zatem

$$2x^4 + 16y_1^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4 / : 2$$

$$x^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4,$$

więc $2|x$, czyli $x = 2x_1$. Ostatecznie,

$$16x_1^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4 / : 2$$

$$8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4,$$

a zatem czwórka liczb (x_1, y_1, z_1, t_1) też jest rozwiązaniem naszego wyjściowego równania, przy czym $x_1 < x$. Założyliśmy jednak, że nie ma rozwiązania o mniejszej wartości x. Mamy więc sprzeczność — równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych dodatnich.

(b) Niech (x, y, z) będzie trójką spełniającą równanie, o najmniejszej możliwej wartości z. Wtedy oczywiście $x^2 + y^2$ jest podzielne przez 3. Badając reszty z dzielenia kwadratów przez 3, otrzymujemy, że każda z liczb x, y musi być podzielna przez 3, czyli $x = 3x_1$ oraz $y = 3y_1$, gdzie $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Wtedy jednak

$$9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z^2 / : 3$$

$$3x_1^2 + 3y_1^2 = z^2,$$

czyli z musi być podzielne przez 3. Niech więc $z = z_1$ oraz

$$3x_1^2 + 3y_1^2 = 9z_1^2 / : 3$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2,$$

a zatem trójka (x_1, y_1, z_1) też jest rozwiązaniem oraz $z_1 < z$. Mamy więc sprzeczność — równanie nie ma rozwiązań w podanym zbiorze.

4.3 Nierówności

Nierówności będziemy rozwiązywać metodą przekształceń równoważnych, tzn. przekształcając je tak, żeby nie zmienić zbioru ich rozwiązań. Pamiętajmy, że zawsze:

- możemy dodać lub odjąć stronami tę samą liczbę;
- możemy pomnożyć obie strony przez liczbę dodatnią;
- możemy pomnożyć obie strony przez liczbę ujemną, pamiętamy wtedy jednak o zmianie znaku nierówności

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań" współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

- możemy podnieść nierówność obustronnie do kwadratu, o ile obie jej strony są tego samego znaku.

Ćwiczenie 36. Udowodnij nierówności:

(a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(b) $a^2 - ab + b^2 \geq ab$

(c) $\dfrac{a}{1 + a^2} \leq \dfrac{1}{2}$

(d) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

(e) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$

(f) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

Rozwiązanie 36. (a) Przenosimy wyrażenie $2ab$ na drugą stronę i zauważamy wzór skróconego mnożenia:

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

(c) Mnożymy nierówność obustronnie przez $2(1 + a^2)$. Nie zmieniamy znaku nierówności, bo

$$2(1 + a^2) > 0$$

dla dow. a.

$$2a \leq 1 + a^2$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

(d) Pomnóżmy nierówność obustronnie przez 2:

$$2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

$$(a + b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo kwadratów liczb rzeczywistej jest nieujemny, a więc ich suma jest również większa równa 0.

(f) Podobnie jak poprzednio, mnożymy nierówność przez 2.

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

Ćwiczenie 37. Udowodnij, że:

(a) jeżeli $a > 0$, to $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Fundusze Europejskie Program Regionalny
Rzeczpospolita Polska
SAMORZĄD WOJEWÓDZTWA WIELKOPOLSKIEGO
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

(b) jeżeli $a < 0$, to $a + \frac{1}{a} \leq -2$

(c) jeżeli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Rozwiązanie 37. (a) Nierówność mnożymy obustronnie przez a $(a > 0)$:

$$a^2 + 1 \geq 2a$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$(a-1)^2 \geq 0,$$

co jest prawdą, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

(b) Tak samo jak poprzednio, mnożymy nierówność przez a. Teraz jednak a jest ujemne, więc pamiętamy o zmianie znaku na przeciwny.

$$a^2 + 1 \geq -2a$$

$$a^2 + 2a + 1 \geq 0$$

$$(a+1)^2 \geq 0$$

Ostatnie nierówność jest prawdziwa, bo kwadrat liczby rzeczystej jest nieujemny.

(c) Mnożymy obustronnie przez ab $(ab > 0)$:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

co jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Do dowodzenia wielu nierówności można użyć tzw. nierówności między średnimi. Jeżeli $a, b > 0$ oraz:

- $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ oznacza średnią kwadratową liczb a i b;
- $\dfrac{a+b}{2}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb a i b;
- $\sqrt{ab}$ oznacza średnią geometryczną liczb a i b;
- $\dfrac{2ab}{a+b}$ oznacza średnią harmoniczną liczb a i b,

to prawdziwe okazuje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Dla a, $b > 0$:*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$$

Podane twierdzenie można uogólnić również na przypadek wielu niewaidomych.

Twierdzenie. *Dla $a_1, a_2, a_3, ..., a_n > 0$ zachodzą nierówności:*

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Ćwiczenie 38. Używając nierówności między średnimi, wykaż że:

(a) jeżeli a, $b > 0$, to $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$.

(b) jeżeli a, b, $c > 0$, to $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$.

(c) jeżeli a, b, $c > 0$, to $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

(d) jeżeli a, $b > 0$ i $a+b=1$, to $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b}) \geq 9$.

(e) jeżeli $a > 0$, to $a^{2021}+a^{2020}+a^{2019}+\ldots+\frac{1}{a^{2019}}+\frac{1}{a^{2020}}+\frac{1}{a^{2021}} \geq 4043$.

Rozwiązanie 38. (a) Wykonujemy mnożenie po lewej stronie:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 \geq 4$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$$

Zauważmy, że korzystając z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 1,$$

a zatem

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2,$$

co chcieliśmy udowodnić.

(b) Ponownie wykonujemy mnożenie:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq 9$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 6.$$

Analogicznie jak w podpunkcie (a) pokazujemy, że każde wyrażenie w nawiasach przyjmuje wartość większą lub równą 2. Stąd ich suma jest większa lub równa 6, co należało udowodnić.

(c) Wymnażamy i dzielimy przez $abc > 0$:

$$a^2b+ab^2+a^2c+abc+abc+b^2c+ac^2+bc^2 \geq 8$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a} \geq 8.$$

Stąd

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 6,$$

co udowodniliśmy już w poprzednim zadaniu.

(d) Wymnażamy lewą stronę nierówności:

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} \geq 9.$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

Odejmujemy obustronnie 1 i sprowadzamy ułamki po lewej do wspólnego mianownika:

$$\frac{a+b+1}{ab} \geq 8.$$

Korzystamy z faktu, że $a + b = 1$:

$$\frac{2}{ab} \geq 8,$$

a stąd

$$ab \leq \frac{1}{4}.$$

Udowodnimy zatem, że $ab \leq \frac{1}{4}$. Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{4} \geq ab,$$

więc teza zostaje udowodniona.

(e) Ze związku między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{a^{2021} + a^{2020} + a^{2019} + ... + \frac{1}{a^{2019}} + \frac{1}{a^{2020}} + \frac{1}{a^{2021}}}{4043} \geq \sqrt[4043]{a^{2021} \cdot a^{2020} \cdot a^{2019} \cdot ... \cdot \frac{1}{a^{2019}} \cdot \frac{1}{a^{2020}} \cdot \frac{1}{a^{2021}}} = 1,$$

a zatem

$$a^{2021} + a^{2020} + a^{2019} + ... + \frac{1}{a^{2019}} + \frac{1}{a^{2020}} + \frac{1}{a^{2021}} \geq 4043.$$

Ćwiczenie 39. Wykorzystując opisane powyżej metody, wykaż, że:

(a) Jeżeli $a, b, c > 0$, to $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

(b) Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, liczby $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ są dodatnie i sumujące się do 1, to $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

(c) Jeżeli $a, b > 0$, to $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

(d) Jeżeli $x > 0$, to $x + \frac{4}{x^2} \geq 3$.

(e) Jeżeli a, b, c i d są takimi liczbami rzeczywistymi, że $c - d = a - b$, to

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

Rozwiązanie 39. (a) Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$a^3c + b^3a + c^3b \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

$$a^3c + b^3a + c^3b - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$

$$a^3c + b^3a + c^3b - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2a^2bc + ab^2c + abc^2 \geq 0$$

$$a^3c - 2a^2bc + ab^2c + b^3a - 2ab^2c + abc^2 + c^3b - 2abc^2 + a^2bc \geq 0$$

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020

$$ac(a^2 - 2ab + b^2) + ab(b^2 - 2bc + c^2) + bc(c^2 - 2ac + a^2) \geq 0$$
$$ac(a-b)^2 + ab(b-c)^2 + bc(c-a)^2 \geq 0,$$

co kończy dowód, bo $a, b, c > 0$.

(b) Wykorzystujemy nierówność między średnią kwadratową i arytmetyczną n liczb. Wtedy

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n}$$
$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n} \geq \frac{1}{n^2}$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

(c) Przekształcamy tezę równoważnie poprzez grupowanie wyrazów:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$
$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$$
$$a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0$$
$$(a^2 - b^2)(a-b) \geq 0$$
$$(a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

co jest prawdą, bo $a, b > 0$.

(d) Wykorzystujemy zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{x + \frac{4}{x^2}}{3} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 1$$

i wystarczy pomnożyć przez 3, żeby otrzymać tezę.

(e) Przekształcamy lewą stronę nierówności:

$$\begin{aligned}(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) &= ab - ad - bc + cd + bd - cd - ab + ac \\ &= ac - ad - bc + bd = (a-b)(c-d).\end{aligned}$$

Ponieważ $c - d = a - b$, zatem $(a-b)(c-d) = (a-b)^2$. Stąd

$$(a-c)(b-d) = (a-b)^2 \geq 0,$$

co oczywiście jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Projekt „ENIGMA - Wsparcie nauczania matematyki i informatyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych Metropolii Poznań” współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Wielkopolskiego Regionalnego Programu Operacyjnego na lata 2014-2020