



Zajęcia dodatkowe dla Uczniów Szkoły  
**Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny  
w Poznaniu**

Tytuł zajęć

**„ Geometria elementarna oraz algebra dla początkujących,  
z wykorzystaniem nowych technologii”**

Autor opracowania

**Irena Promińska**

Niniejszy skrypt/scenariusz powstał na potrzeby realizacji Projektu  
nr RPWP.08.01.04-30-0005/19 pn.:

*„ENIGMA – Wsparcie nauczania matematyki i informatyki  
w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych  
Metropolii Poznań”*

Poznań 2021

Tematy zajęć	Liczba godzin
<b>Skrypt 1.</b>	
<b>Zajęcia 1.</b> Wprowadzenie do programu GeoGebra.	<b>1</b>
<b>Moduł nr 1</b> <b>Geometria elementarna</b>	
<b>Skrypt 2.</b>	
<b>Zajęcia 1.</b> Konstrukcje prostej równoległej oraz prostopadłej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt, z wykorzystaniem podstawowych obiektów oraz narzędzi GeoGebry.	<b>1</b>
<b>Zajęcia 2.</b> Konstrukcje dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka, ze stosowaniem podstawowych obiektów oraz narzędzi GeoGebry. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Skrypt 3.</b>	
<b>Zajęcia 3.</b> Ilustracje twierdzeń: o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą oraz kątów w kole. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Skrypt 4.</b>	
<b>Zajęcia 4.</b> Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych (trójkąt równoboczny, kwadrat, sześciokąt foremny, dziesięciokąt foremny, pięciokąt foremny). Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Skrypt 5.</b>	
<b>Zajęcia 5.</b> Ilustracje odcinków i linii w trójkącie oraz twierdzeń o wysokościach, środkowych boków w trójkącie. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Zajęcia 6.</b> Ilustracje twierdzeń o dwusiecznych kątów wewnętrznych oraz symetralnych boków w trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt i okrąg opisany na trójkącie. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Moduł nr 2</b> <b>Algebra</b>	
<b>Skrypt 6.</b>	
<b>Zajęcia 7.</b> Zapoznanie z ustawieniem parametrów układu współrzędnych. Utworzenie apletu przedstawiającego wykresy kilku funkcji ( $y = x$ , $y =  x $ , $y = \frac{1}{x}$ , $y = x^2$ , $y = x^3$ , $y = \sqrt{x}$ , $y = 2^x$ , $y = \log_2 x$ ). Łamana, która jest wykresem funkcji. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>

Tematy zajęć	Liczba godzin
<b>Zajęcia 8.</b> Funkcja liniowa, funkcja kwadratowa – utworzenie apletów. Odczytywanie własności funkcji oraz rozwiązywanie zadań ze stosowaniem zbudowanych apletów.	<b>2</b>
<b>Zajęcia 9.</b> Proporcjonalność odwrotna, funkcja homograficzna – utworzenie apletów. Odczytywanie własności funkcji oraz rozwiązywanie zadań ze stosowaniem skonstruowanych apletów.	<b>2</b>
<b>Skrypt 7.</b>	
<b>Zajęcia 10.</b> Przesunięcie równoległe wykresu funkcji (łamana, funkcja liniowa, funkcja kwadratowa) o wektor. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Zajęcia 11.</b> Przesunięcie równoległe wykresu proporcjonalności odwrotnej oraz funkcji wykładniczej o wektor. Przekształcenia wykresu funkcji liniowej w symetrii względem osi układu współrzędnych oraz w symetrii względem początku tego układu. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Zajęcia 12.</b> Przekształcenia symetryczne wykresu funkcji kwadratowej. Utworzenie apletu przedstawiającego wykres funkcji $y =  f(x) $ , gdzie $f$ jest funkcją z listy funkcji. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem skonstruowanych apletów.	<b>2</b>
<b>Skrypt 8.</b>	
<b>Zajęcia 13.</b> Interpretacja układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Interpretacja geometryczna nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>2</b>
<b>Zajęcia 14.</b> Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi – tworzenie apletów. Rozwiązywanie zadań ze stosowaniem utworzonych apletów.	<b>1</b>
<b>Zajęcia 14.</b> Tworzenie własnych apletów.	<b>1</b>
<b>Zajęcia 15.</b> Tworzenie własnych apletów oraz ich prezentacja.	<b>2</b>
<b>łącznie liczba godzin</b>	<b>30</b>



GeoGebra

**Math Calculators**

# Skrypt 1.

- Wstęp
- Wprowadzenie do GeoGebry



## Wstęp

I. GeoGebra jest bezpłatnym oprogramowaniem do nauczania matematyki, które może być wykorzystywane na każdym poziomie edukacji (także do samodzielnego uczenia się). Mocnymi stronami tego oprogramowania są:

- dostępność w języku polskim,
- możliwość zainstalowania na różnych systemach operacyjnych (np. Windows, Linux, ...) i używania na komputerach czy smartfonach,
- dynamiczne konstrukcje geometryczne, rysowanie wykresów, obliczanie długości odcinków, miar kątów, możliwości arkusza kalkulacyjnego, przedstawianie obiektów w postaci graficznej, algebraicznej lub w komórkach arkusza kalkulacyjnego,
- łączenie różnych działów matematyki,
- wspomaganie twórczego myślenia oraz rozwijanie kreatywnej postawy uczniów,
- zwiększanie atrakcyjności zajęć.

II. Obecnie są dostępne dwie wersje GeoGebry: Geogebra klasyczna (wersja 5; nie będzie rozwijana, lecz wykryte błędy będą poprawiane) oraz Geogebra Math Calculators (wersja 6; wersja dostępna na komputery, tablety, smartfony oraz różne systemy operacyjne).

Wersja webowa (online, uniwersalna) jest dostępna na stronie:

<https://www.geogebra.org/apps>

Wersja instalacyjna (offline, na różne systemy i urządzenia) jest dostępna na stronie:

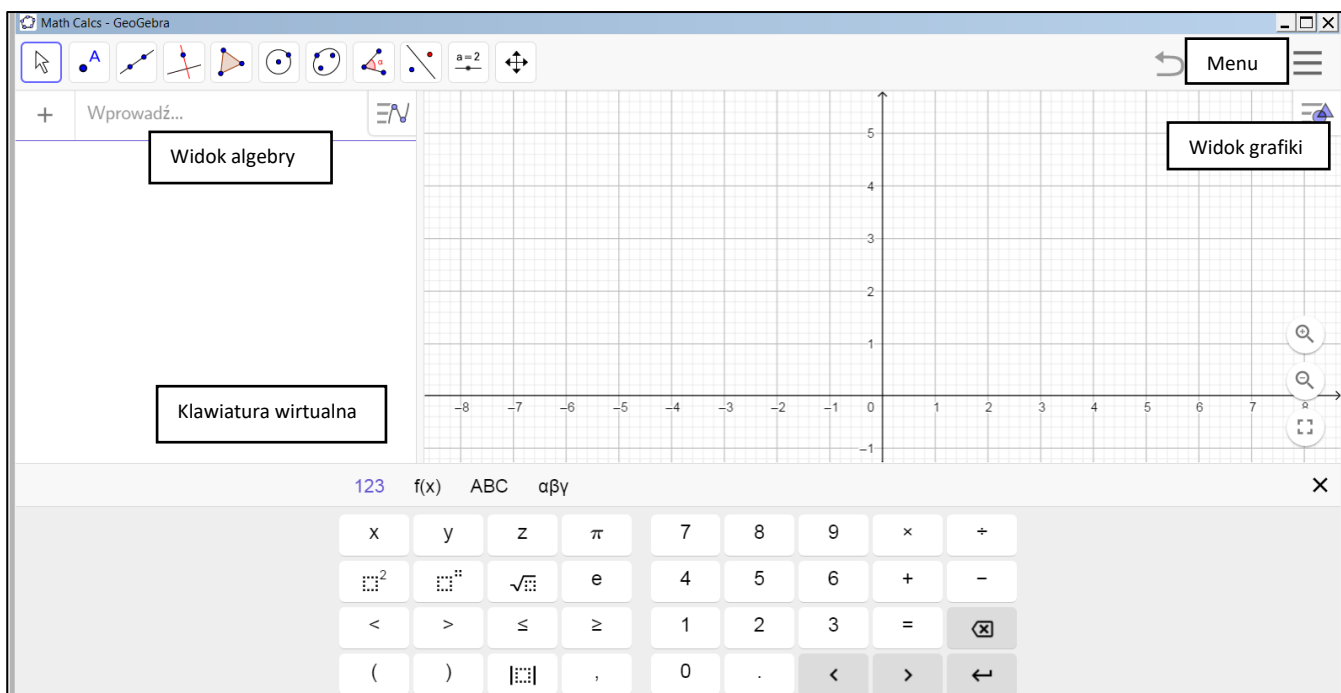
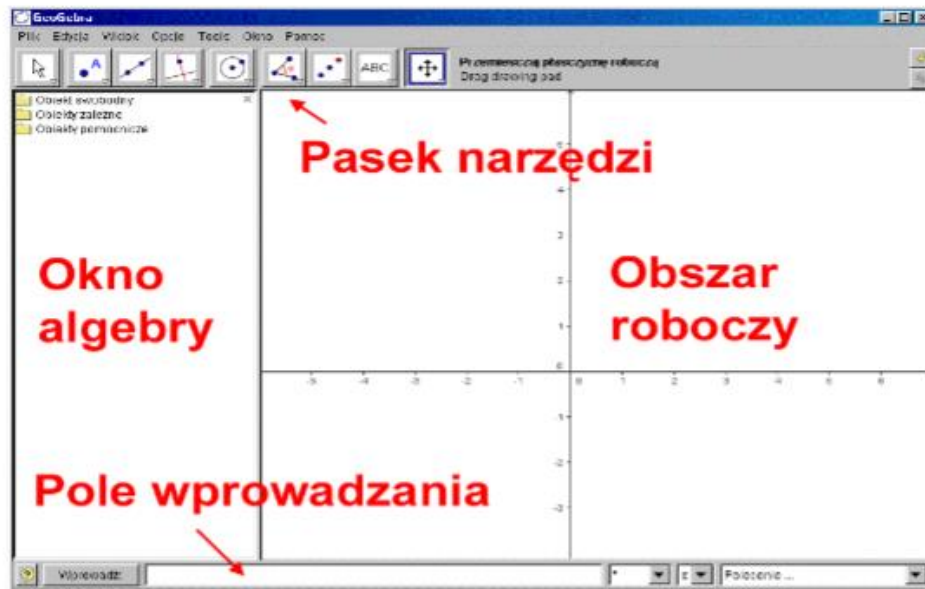
<https://www.geogebra.org/download>

III. Założenie konta na stronie GeoGebry



## Wprowadzenie do GeoGebra

### I. Interfejs użytkownika



## II. Polecenia zawarte w Menu:

- Plik (tworzenie nowego pliku, zapisywanie, otwieranie istniejącego, udostępnianie, drukowanie)
- Edycja (cofnij, ponów, kopiuuj, wklej, zaznacz wszystko)
- Widok (wybór widoków (zaznaczenie/odznaczenie), wyświetlanie Protokołu konstrukcji, Paska nawigacji)
- Opcje (rozmiar czcionki, sposób etykietowania obiektów)
- Narzędzia (tworzenie nowych narzędzi, modyfikowanie paska narzędzi)
- Logowanie do platformy GeoGebra Materials

III. Menu Widoku Grafiki pozwala ukryć lub wyświetlić osie układu współrzędnych, dokonać wyboru rodzaju siatki bądź jej braku, skalować ekran. Zestaw narzędzi (dostępnych na pasku narzędzi) zmienia się w zależności od widoku, który jest otwarty i aktywny. Są one pogrupowane tematycznie. Klikając myszą, narzędzie aktywuje się. To narzędzie jest zaznaczone granatową ramką, a pomoc do niego jest wyświetlana na szarym tle w dolnej części okna.

## IV. Klawiatura wirtualna składa się z czterech paneli:

- liczby i symbole matematyczne
- funkcje: trygonometryczne, logarytmiczne, wykładnicze oraz pochodne, całki
- litery i symbole, operatory logiczne i matematyczne
- litery greckie

Przycisk ●●● rozwija listę wszystkich funkcji matematycznych oraz listę poleceń, które są dostępne w programie.

## V. Zapisywanie plików GeoGebry

- W „chmurze”: Menu → Plik → Zapisz; plik jest domyślnie zapisany jako prywatny. Plik można udostępnić innym użytkownikom. Można tego dokonać poprzez zmianę dostępności pliku na Udostępniony (poprzez link) bądź Publiczny (plik dostępny dla wszystkich).
- Na własnym dysku lub nośniku: Menu → Zapisz jako (nazwa oraz rozszerzenie .ggb).

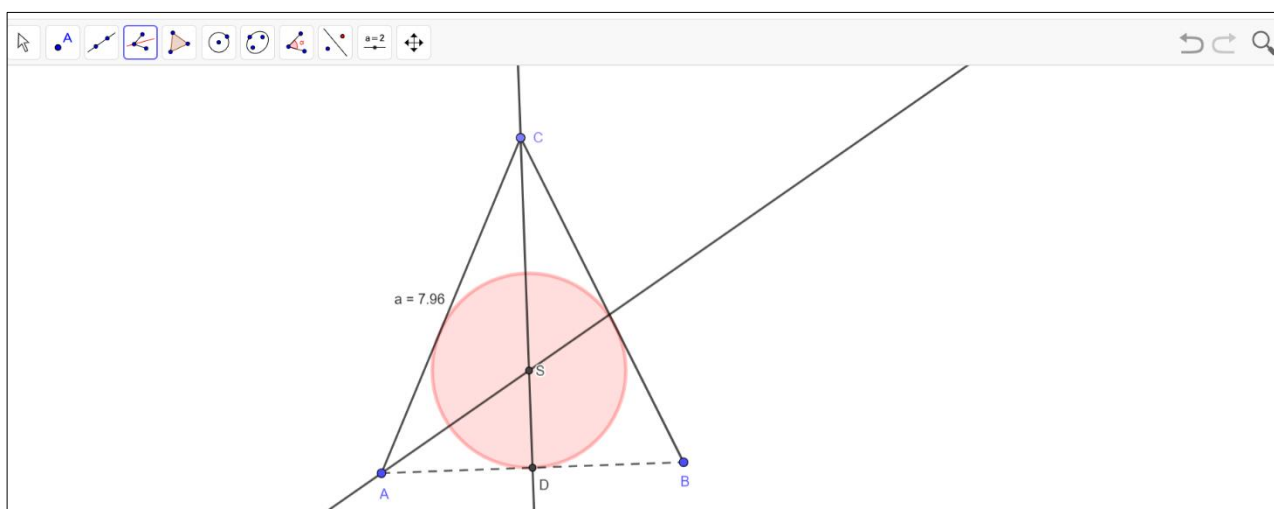


## VI. Przykład

### Trójkąt równoramienny $ABC$ , okrąg wpisany w ten trójkąt

#### Instrukcja:

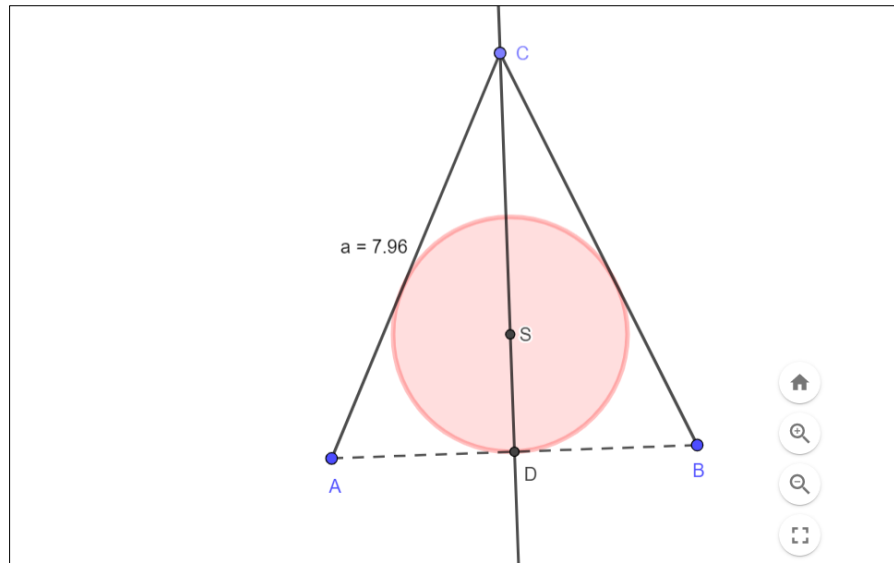
1. Uruchom program GeoGebra.
2. Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.
3. Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty
4. Wstaw odcinek  $AB$
5. Wstaw symetralną odcinka  $AB$
6. Wskaż dowolny punkt  $C$ , który należy do symetralnej odcinka  $AB$
7. Wstaw odcinek  $AC$  oraz odcinek  $BC$  (powstał trójkąt równoramienny  $ABC$ ).
8. Zaznacz punkt przecięcia odcinka  $AB$  oraz symetralnej odcinka  $AB$ . Nazwij go  $D$ .
9. Wstaw dwusieczną kąta  $CAB$ .
10. Zaznacz punkt przecięcia symetralnej odcinka  $AB$  oraz dwusiecznej kąta  $CAB$ . Nazwij go  $E$ .
11. Wstaw okrąg o środku w punkcie  $E$ , przechodzący przez punkt  $D$ .
12. Sformatuj obiekty zgodnie ze wskazówkami:
  - a) Ustaw styl odcinka  $AB$  na linię przerywaną, grubość 4.
  - b) Zmień nazwę odcinka  $AC$  na  $a$  (prawy klawisz myszy) i ustaw styl etykiety Nazwa i wartość.
  - c) Ustaw kolor linii okręgu na czerwony, grubość linii okręgu na 8, przezroczystość koła na 25%.
  - d) Zmień nazwę środka okręgu na  $S$ .







e) Ukryj prostą AS.



Na powyższym rysunku po prawej stronie (na dole) znajdują się trzy przyciski, które są przydatne przy wykonywaniu konstrukcji:



Przybliż



Oddal



Pełny Ekran



GeoGebra

**Math Calculators**

# Skrypt 2.

- Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt (leżący poza daną prostą)
- Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt (leżący poza daną prostą)
- Konstrukcja dwusiecznej kąta
- Konstrukcja symetralnej odcinka
- Zadania



**Uwaga:** W menu Widok warto uruchomić Protokół konstrukcji (ułatwia kontrolę nad wykonywaną pracą) oraz we właściwościach Widoku Grafiki w zakładce Podstawowe – Pasek nawigacji (umożliwia odtworzenie kolejnych etapów konstrukcji).

## I. Konstrukcje z wykorzystaniem podstawowych obiektów (punkt, prosta, okrąg)

### 1. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt

#### Instrukcja:

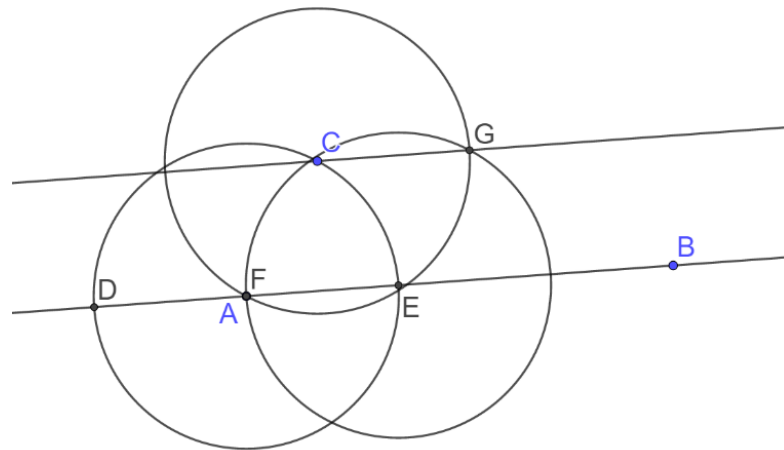
Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

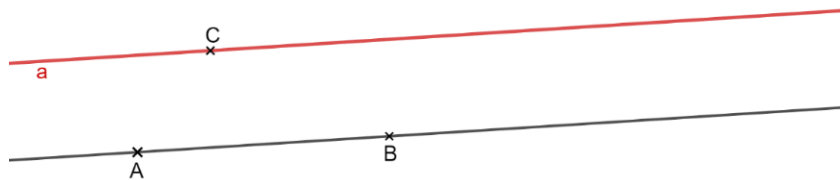
Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw prostą AB.
2. Wstaw punkt C.
3. Wstaw okrąg o środku w punkcie A i promieniu równym  $|AC|$ .
4. Zaznacz punkty przecięcia prostej AB i okręgu o środku w punkcie A. Nazwij je D oraz E.
5. Wstaw okrąg o środku w punkcie E i promieniu równym  $|AC|$ .
6. Wstaw okrąg o środku w punkcie C i promieniu równym  $|AC|$ .
7. Zaznacz punkty przecięcia okręgu o środku w punkcie E z okręgiem o środku C. Nazwij je F, G.
8. Wstaw prostą CG.
9. Uzasadnij poprawność konstrukcji.
10. Sformatuj obiekty:
  - a) Kliknij prawym przyciskiem myszy w punkty: D, E, F, G i odznacz Pokaż obiekt.
  - b) Ustaw grubość prostej AB na 8. Zmień styl punktów A i B, kolor czarny.
  - c) Zmień nazwę prostej CG na a (kliknij prawym klawiszem i otwórz Właściwości → Pokaż etykietę: Nazwa (wpisz a)) oraz ustaw grubość linii na 10, kolor czerwony. Zmień styl punktu C, kolor czarny.



d) Ukryj okręgi.



## 2. Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt niebędący na danej prostej

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebra.

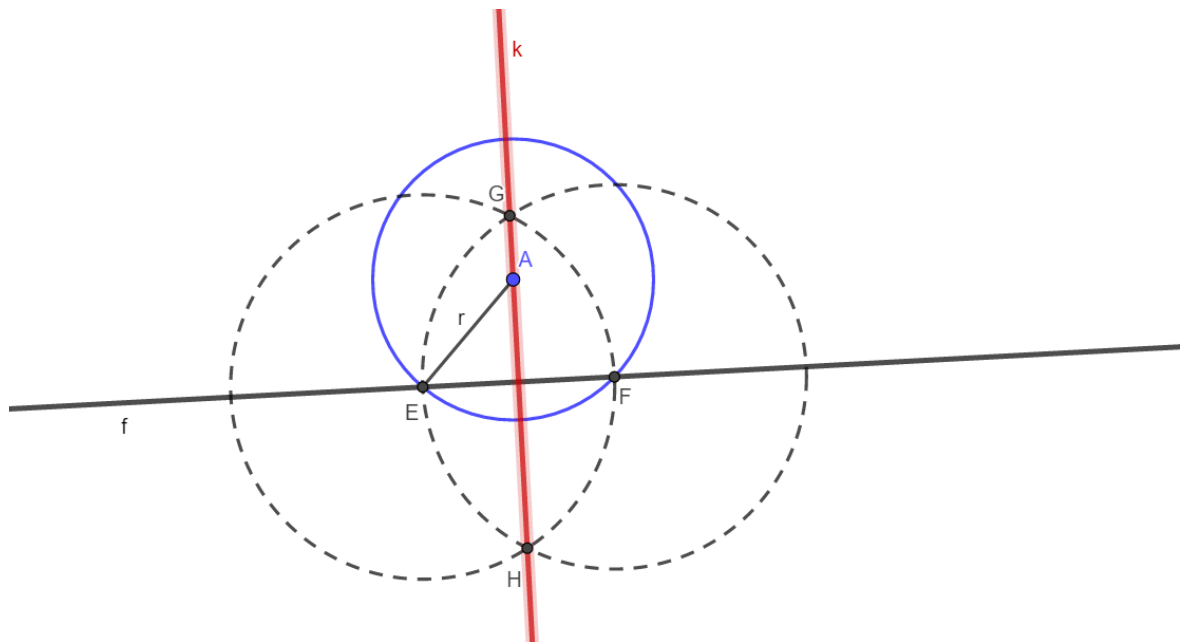
Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw punkt A.
2. Wstaw prostą BC. Zmień jej nazwę na f (prawy klawisz myszy i ustaw etykietę Nazwa). Kliknij prawym przyciskiem myszy w punkty B, C i odznacz Pokaż obiekt. Ustaw grubość prostej f na 8.



3. Wstaw okrąg o środku w punkcie A i takim promieniu AD (punkt D leży na prostej f), by przeciął prostą f w dwóch punktach. Nazwij je E oraz F. Ustaw grubość linii okręgu na 5, kolor niebieski. Zmień nazwę odcinka AD na r (prawy klawisz myszy i ustaw etykietę Nazwa). Ukryj punkt D.
4. Wstaw dwa okręgi o środku w punkcie E oraz o środku w punkcie F i promieniu równym  $|EF|$ . Ustaw styl linii okręgów na linię przerywaną, grubość 5.
5. Zaznacz punkty przecięcia okręgów o środkach w punktach E oraz F. Nazwij je G, H.
6. Wstaw prostą przechodzącą przez punkty A i G. Zmień nazwę prostej AG na k (prawy klawisz myszy i ustaw etykietę Nazwa). Ustaw grubość linii na 8, kolor czerwony.
7. Uzasadnij poprawność konstrukcji.



### 3. Konstrukcja dwusiecznej kąta

#### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

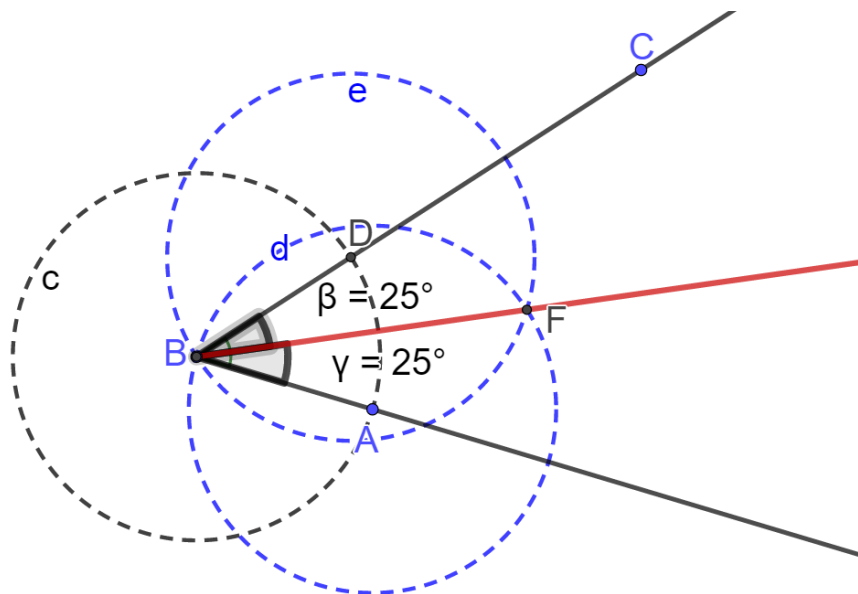


Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Zaokrąglenie → 0 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw kąt ABC ( $|\sphericalangle ABC| = \alpha$ ) i we własnościach podstawowych ustaw etykietę Kąt pomiędzy:  $0^\circ$  i  $360^\circ$ . Ustaw grubość ramion kąta na 8, kolor czarny. Odznacz Pokaż etykietę.
2. Wstaw okrąg o środku w punkcie B i promieniu AB. Ustaw styl linii okręgu na przerywany, grubość na 5, kolor czarny. Kliknij prawym przyciskiem myszy w linię okręgu i włącz etykietę Pokaż etykietę. Okrąg ma nazwę c.
3. Zaznacz punkt przecięcia okręgu c z ramieniem BC. Nazwij go D.
4. Wstaw dwa okręgi o promieniu równym  $|AB|$ : jeden o środku w punkcie A, a drugi – w punkcie D. Ustaw styl linii okręgów na przerywany, grubość na 5, kolor zielony. Włącz etykietę Pokaż etykietę (prawy klawisz myszy). Nazwy okręgów: d, e.
5. Zaznacz punkty przecięcia okręgów d, e w punktach E, F. Punkt B = E, więc ukryj punkt E (prawy przycisk myszy i odznacz Pokaż obiekt).
6. Wstaw półprostą BF i ustaw jej styl na linię ciągłą, grubość na 10, kolor czerwony.
7. Wstaw kąty: FBD i ABD i we własnościach podstawowych ustaw Pokaż etykiety: Nazwa i wartość ( $\sphericalangle FBD = \beta$ ,  $\sphericalangle ABF = \gamma$ ), Kąt pomiędzy:  $0^\circ$  i  $180^\circ$ , Przezroczystość prostej 70, Wielkość 65 dla kąta  $\beta$  i 100 dla kąta  $\gamma$ .
8. Uzasadnij poprawność konstrukcji.





## 4. Konstrukcja symetralnej odcinka

### Instrukcja:

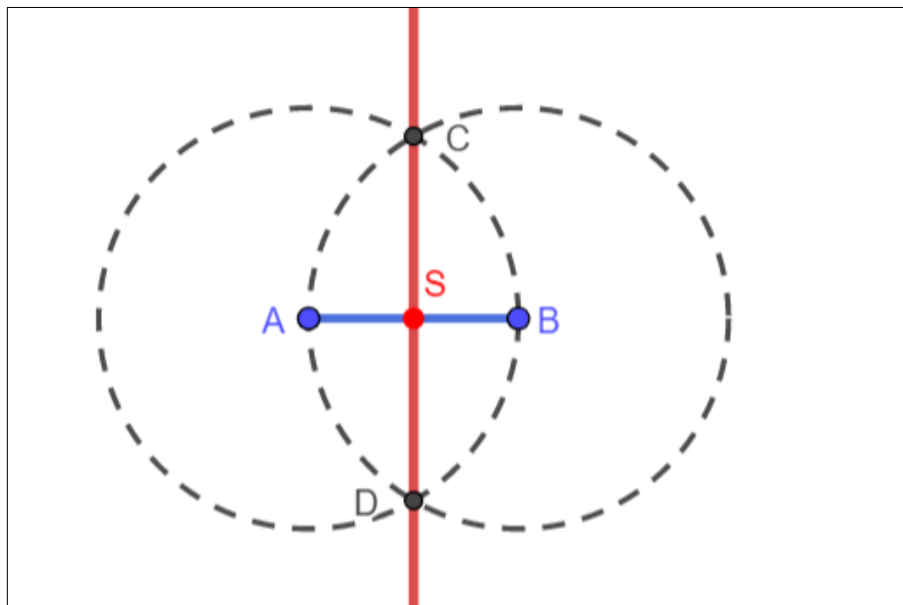
Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw odcinek AB i ustaw jego grubość na 8, kolor niebieski.
2. Wstaw dwa okręgi o środkach w punkcie A oraz w punkcie B i promieniu  $r = |AB|$ . Ustaw styl ich linii na przerywaną, grubość na 5, kolor czarny.
3. Zaznacz punkty przecięcia tych okręgów: punkt C, punkt D.
4. Wstaw prostą CD i ustaw jej styl na linię ciągłą, grubość na 10, kolor czerwony.
5. Wstaw punkt E przecięcia odcinka AB i prostej CD. Ustal styl punktu E, grubość na 5, kolor czerwony. Zmień nazwę punktu E na S (prawy klawisz myszy i ustaw etykietę Nazwa).
6. Uzasadnij poprawność konstrukcji.





## II. Konstrukcje z wykorzystaniem narzędzi GeoGebry

### 1. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt

#### Instrukcja:

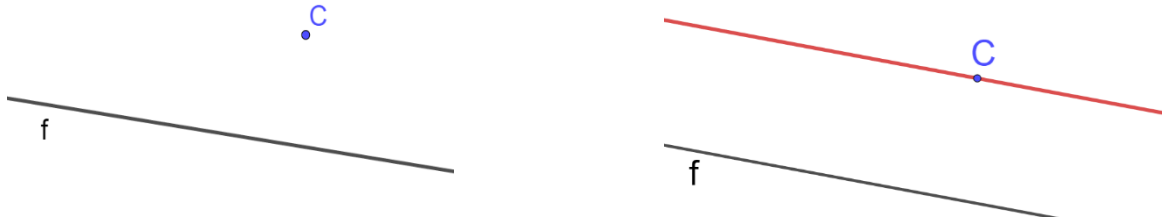
Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw prostą AB i ustaw jej grubość na 8, kolor czarny. Ukryj punkty A i B (prawy klawisz myszy i odznacz Pokaż obiekt). Zmień nazwę prostej (prawy klawisz myszy i włącz Pokaż etykietę): prosta f.
2. Wstaw punkt C.
3. Wstaw prostą równoległą do prostej f, przechodzącą przez punkt C.



### 2. Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt nieleżący na danej prostej

#### Instrukcja: (I sposób)

Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

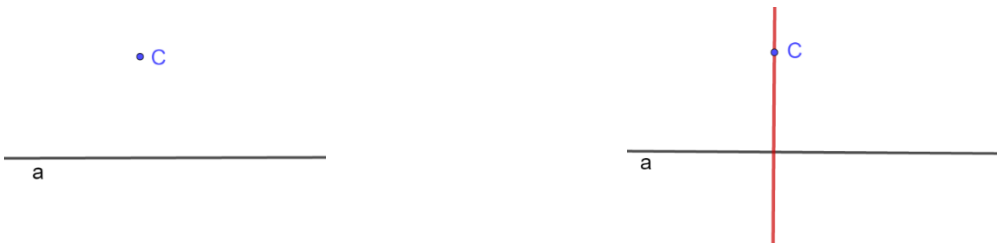
Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt





1. Wstaw prostą AB i ustaw jej grubość na 8, kolor czarny. Ukryj punkty A i B (prawy klawisz myszy i odznacz Pokaż obiekt). Zmień nazwę prostej (prawy klawisz myszy i otwórz Właściwości → Pokaż etykietę: Nazwa (wpisz a)).
2. Wstaw punkt C.
3. Wstaw prostą prostopadłą do prostej a, przechodzącą przez punkt C.



Instrukcja: (II sposób)

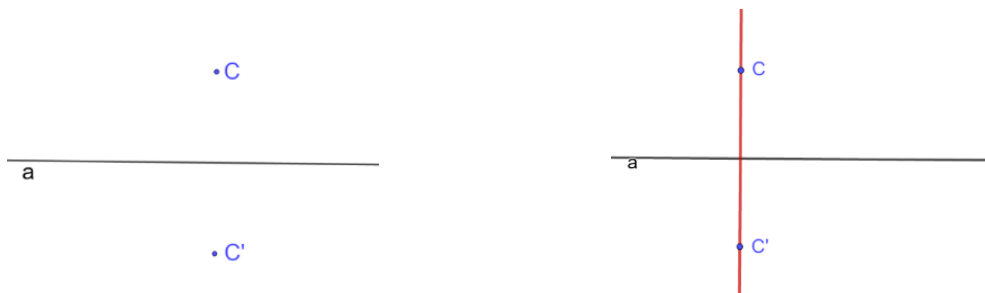
Uruchom program GeoGebra.

Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw prostą AB i ustaw jej grubość na 8, kolor czarny. Ukryj punkty A i B (prawy klawisz myszy i odznacz Pokaż obiekt). Zmień nazwę prostej (prawy klawisz myszy i otwórz Ustawienia → Pokaż etykietę: Nazwa (wpisz a)).
2. Wstaw punkt C i wyznacz jego obraz w symetrii względem osi a (punkt C').
3. Wstaw prostą CC'.
4. Uzasadnij poprawność konstrukcji.





### 3. Konstrukcja dwusiecznej kąta

#### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

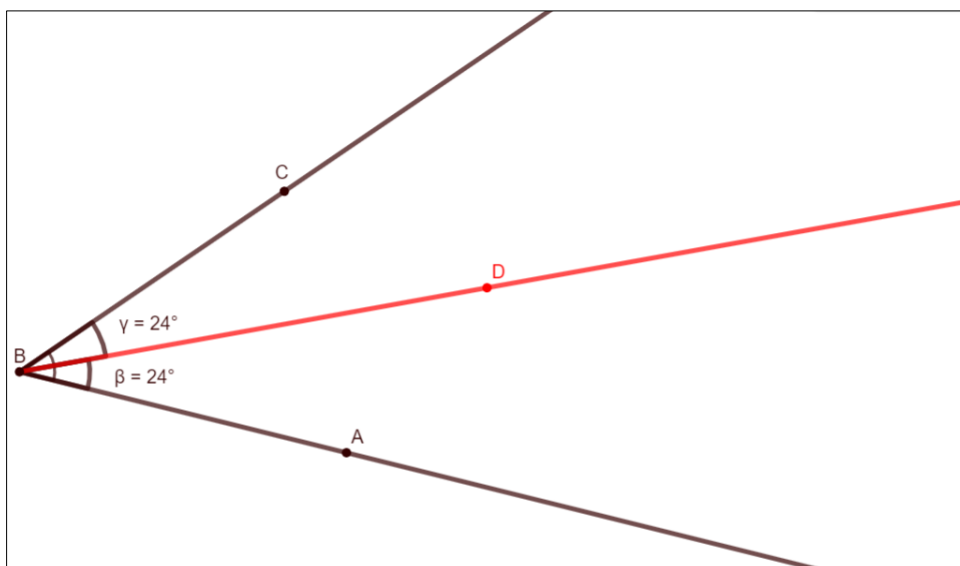
Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Zaokrąglenie → 0 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw kąt ABC ( $|\sphericalangle ABC| = \alpha$ ) i we własnościach podstawowych ustaw etykietę Kąt pomiędzy:  $0^\circ$  i  $360^\circ$ . Ustaw grubość ramion kąta na 8, kolor czarny. Odznacz Pokaż etykietę.
2. Wstaw dwusieczną kąta ABC i ustaw jej grubość na 8, kolor czerwony.
3. Wstaw kąty: ABD i DBC i we własnościach podstawowych ustaw Pokaż etykiety: Nazwa i wartość ( $\sphericalangle ABD = \beta$ ,  $\sphericalangle DBC = \gamma$ ), Kąt pomiędzy:  $0^\circ$  i  $180^\circ$ , Przezroczystość prostej 70, Wielkość 60 dla kąta  $\beta$  i 75 dla kąta  $\gamma$ .





## 4. Konstrukcja symetralnej odcinka

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

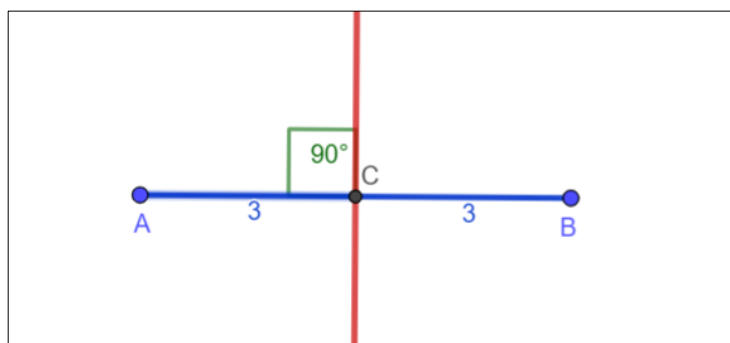
Wyłącz: Osie, Siatkę i Widok Algebry.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Zaokrąglenie → 0 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw odcinek AB. Ustaw grubość odcinka na 8, kolor niebieski.
2. Wstaw symetralną odcinka AB. Ustal jej styl linii na ciągłą, grubość na 8, kolor czerwony.
3. Wstaw kąt DCA i w jego własnościach podstawowych ustaw: Pokaż etykietę Wartość, styl: wielkość 60, grubość na 5. Ukryj punkt D (prawy klawisz myszy i odznacz Pokaż obiekt).
4. Wstaw odcinki AC i BC; kolor niebieski, grubość na 8 i w ich własnościach podstawowych ustaw: Pokaż etykietę Wartość.





## Zadania

1. Skonstruuj prostą prostopadłą do danej prostej, przechodzącej przez punkt  $P$  leżący na tej prostej, z wykorzystaniem podstawowych obiektów (punkt, prosta, okrąg).
2. Uzasadnij, że każdy punkt dwusiecznej kąta jest równoodległy od ramion kąta.
3. Uzasadnij, że każdy punkt kąta wypukłego równoodległy od ramion kąta, leży na dwusiecznej tego kąta.
4. Wyznacz prostą równoodległą od dwóch prostych równoległych.
5. W jakim trójkącie jedna z symetralnych boku tego trójkąta zawiera jego wysokość?
6. W jakim trójkącie każda z symetralnych boku tego trójkąta zawiera jego wysokość?
7. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc że symetralna przeciwprostokątnej przechodzi przez wierzchołek kąta prostego.
8. W trójkącie  $ABC$  ( $|\sphericalangle C| = 90^\circ$ ) symetralna przeciwprostokątnej  $AB$  przecina dłuższą przyprostokątną  $AC$ . Oblicz długość boku  $AC$ , jeśli przeciwprostokątna ma długość 30 cm, a odcinek symetralnej boku  $AC$ , zawarty w tym trójkącie, ma długość 8 cm.



GeoGebra

**Math Calculators**

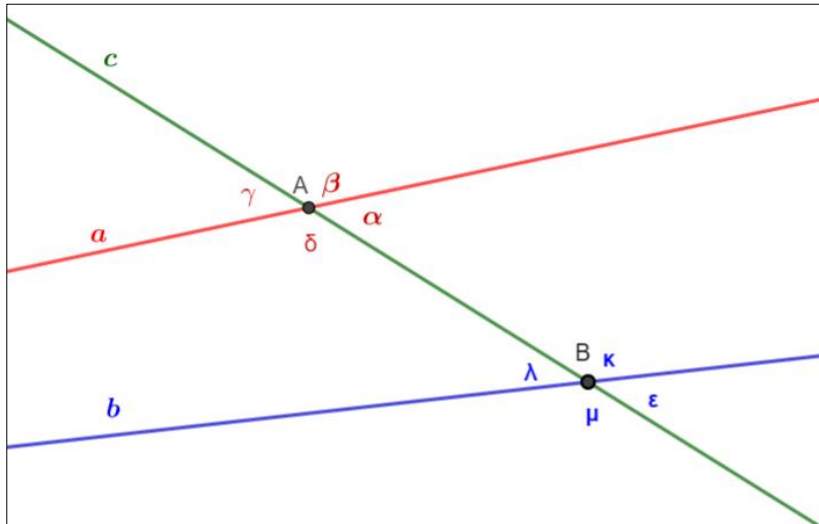
# Skrypt 3.

- Dwie proste przecięte trzecią prostą
- Kąty w kole
- Zadania



## I. Dwie proste przecięte trzecią prostą. Zadania

Dwie różne proste  $a$ ,  $b$  (równoległe bądź nierównoległe) przecięte trzecią prostą  $c$  odpowiednio w punktach  $A$ ,  $B$  tworzą po cztery kąty wypukłe.



Kąty odpowiadające:  $\alpha$  i  $\epsilon$ ,  $\beta$  i  $\kappa$ ,  $\delta$  i  $\mu$ ,  $\gamma$  i  $\lambda$

Kąty naprzemianległe:  $\beta$  i  $\mu$ ,  $\gamma$  i  $\epsilon$  (zewnątrzne),  $\alpha$  i  $\lambda$ ,  $\delta$  i  $\kappa$  (wewnętrzne)

### Twierdzenie

Jeżeli dwie proste równoległe są przecięte trzecią prostą, to kąty naprzemianległe zewnętrzne (naprzemianległe wewnętrzne i odpowiadające) są równe.

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

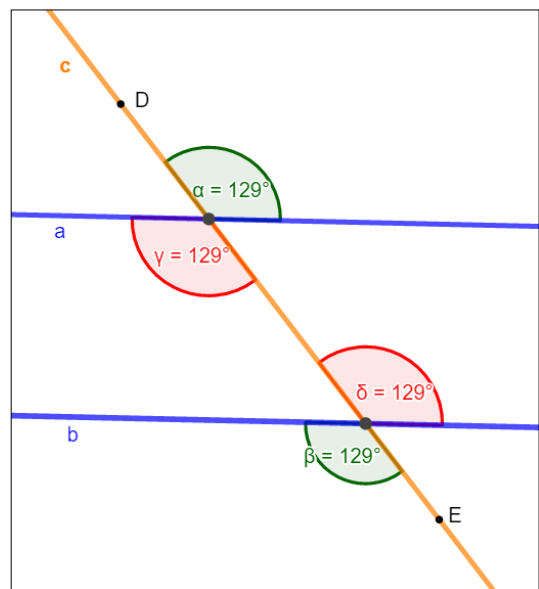
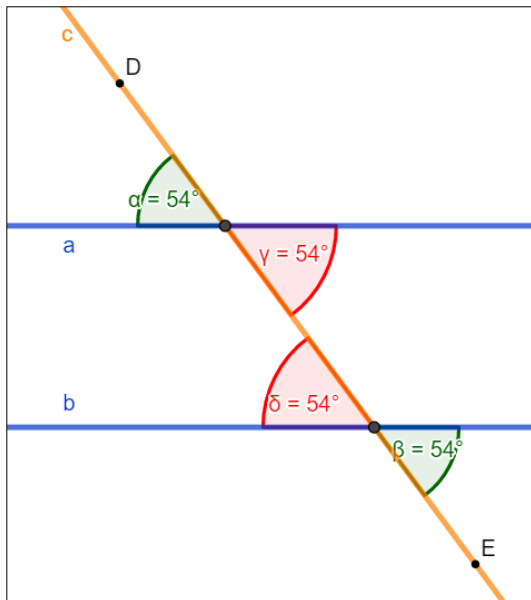
Ustawienia → Zaokrąglenia: 0 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw prostą  $AB$  (prosta  $a$ ) oraz prostą do niej równoległą (prosta  $b$ ), przechodzącą przez punkt  $C$  ( $C \notin a$ ). W ustawieniach prostych ustal ich kolor i styl.



- Wstaw prostą DE (prosta c), przecinającą proste a, b. Ustal jej kolor i styl.
- Wyznacz punkty przecięcia prostych: a i c (punkt G), b i c (punkt F). Ustal ich kolor i styl.
- Wstaw punkt H, należący do prostej b.
- Utwórz kąty:  $\sphericalangle DGA$ ,  $\sphericalangle EFH$ ,  $\sphericalangle FGB$ ,  $\sphericalangle GFC$ . W ustawieniach Podstawowe ustaw etykietę: Nazwa i Wartość oraz Kąt pomiędzy:  $0^\circ$  i  $180^\circ$ . Ustal kolor, Wielkość (70), Wypełnienie (Standard) dla każdego kąta.
- Ukryj: punkty A, B, C, H, nazwy punktów F i G.



**Kąty naprzemianległe zewnętrzne**

$\alpha$  i  $\beta$

**Kąty naprzemianległe wewnętrzne**

$\gamma$  i  $\delta$

**Kąty odpowiadające**

$\alpha$  i  $\delta$     $\beta$  i  $\gamma$



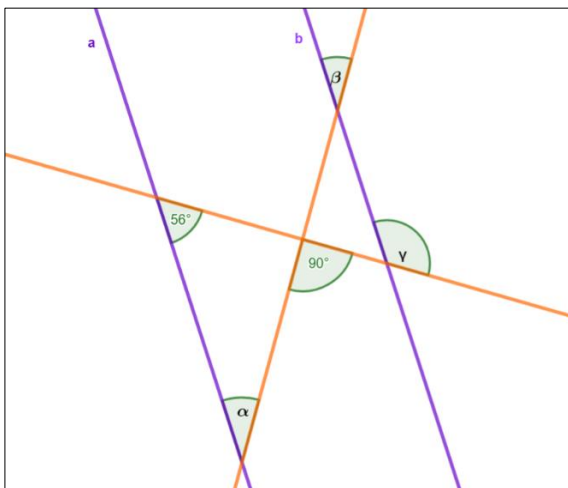
## Twierdzenie odwrotne

Jeżeli kąty naprzemianległe zewnętrzne (bądź naprzemianległe wewnętrzne, bądź odpowiadające) są równe, to dwie proste przecięte trzecią prostą są równoległe.

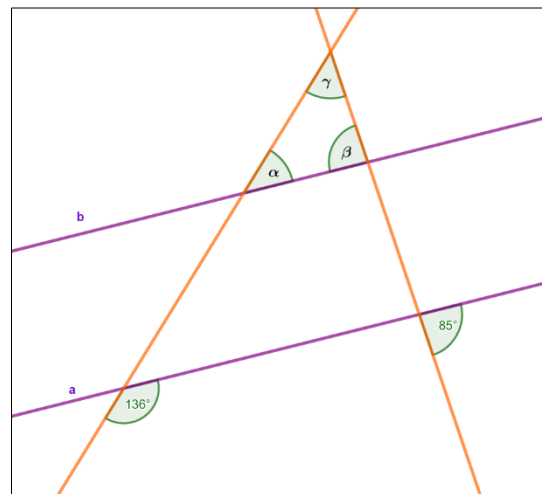
## Zadania

1. Na poniższych rysunkach proste  $a$ ,  $b$  są równoległe. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz miary kątów:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

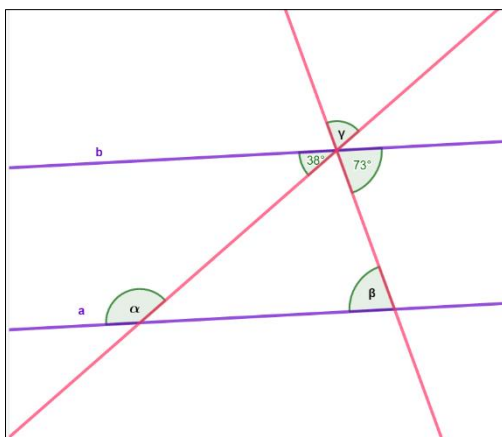
a)



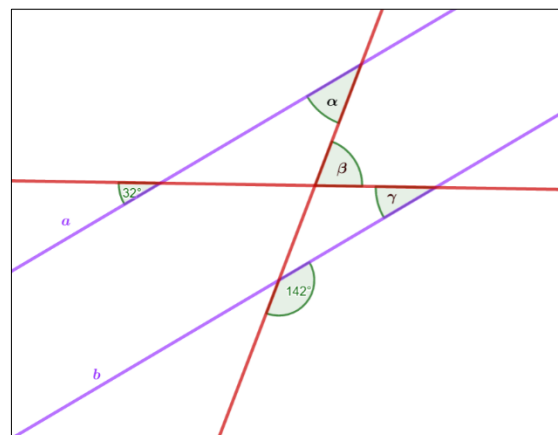
b)



c)

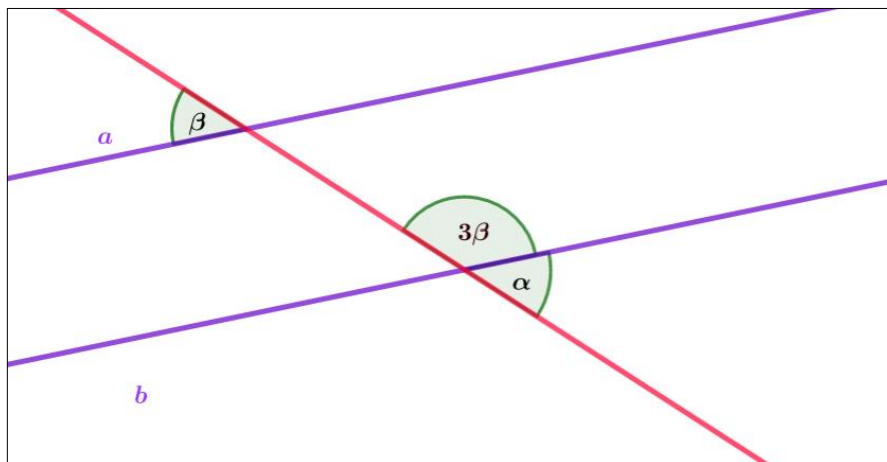


d)



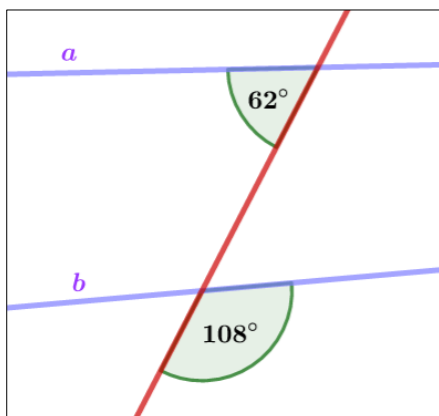


2. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz miary kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ . Proste  $a$ ,  $b$  są równoległe.

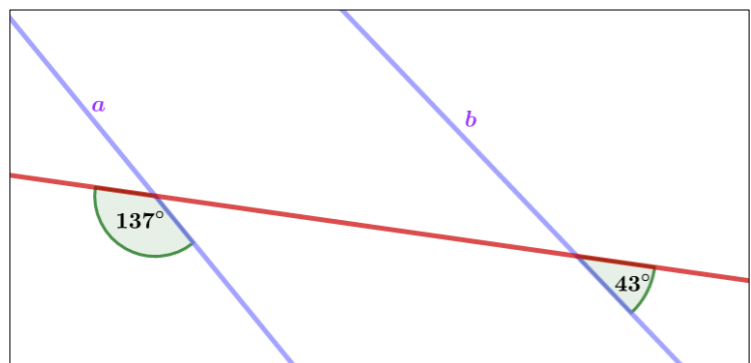


3. Sprawdź, czy proste  $a$ ,  $b$  są równoległe. Odpowiedź uzasadnij.

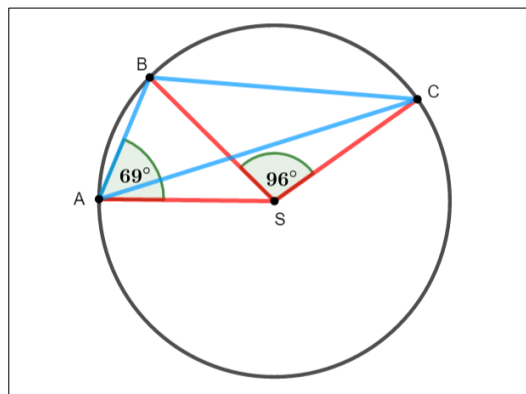
a)



b)



4. Sprawdź, czy odcinki  $AS$  oraz  $BC$  są równoległe. Odpowiedź uzasadnij.



## II. Kąty w kole. Zadania

### Twierdzenie

Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

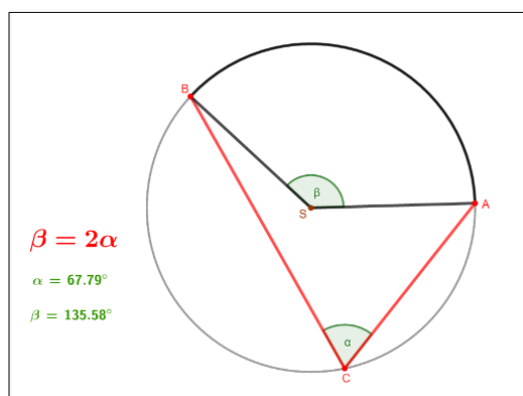
Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Zaokrąglenia: 2 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw okrąg o środku S i promieniu 6 oraz punkty A, B należące do tego okręgu. Dla punktów A, B, S ustaw kolor czerwony, wielkość punktu – 4.
2. Wstaw łuk okręgu (S, B, A) (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Ustal jego kolor (szary) i styl (grubość linii - 5).
3. Na łuku (S, B, A) wstaw punkt C (kolor czerwony, wielkość punktu - 4).
4. Wstaw łuk okręgu (S, A, B) i ustal jego kolor (czarny) i styl (grubość linii - 8).
5. Wstaw odcinki SA, SB (kolor czarny, grubość linii - 8) oraz odcinki CA, CB (kolor czerwony, grubość linii - 8).
6. Utwórz kąty:  $\sphericalangle ASB$ ,  $\sphericalangle ACB$  i w ustawieniach Podstawowe ustaw etykietę: Nazwa, kolor, Wielkość (70) dla każdego kąta.
7. Wstaw Tekst: " $\alpha = 75.98^\circ$ ", " $\beta = 151.96^\circ$ " (kolor zielony, Tekst – Mały, czcionka pogrubiona), przeciągając z Widoku Algebry. Włącz etykietę Osadź Obiekt.
8. Wstaw Tekst: " $\beta = 2\alpha$ ". Tekst: Średnia, czcionka pogrubiona, włączona formuła LaTeX. Włącz etykietę Osadź Obiekt.



## Twierdzenie

Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są równe.

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

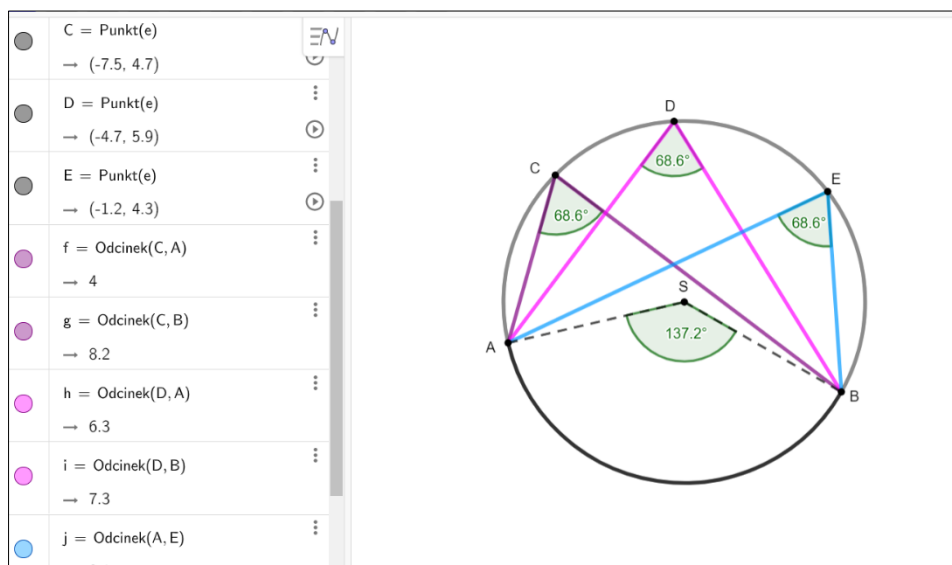
Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

1. Wstaw okrąg o środku w punkcie S, przechodzący przez punkt B oraz punkt A, który należy do tego okręgu. Punkty S, A, B: kolor czarny, wielkość punktu – 4.
2. Wstaw łuk okręgu (S, A, B) i ustal jego kolor (czarny) i styl (grubość linii - 8).
3. Wstaw łuk okręgu (S, B, A). Ustal jego kolor (szary) i styl (grubość linii - 8).
4. Wstaw punkty C, D, E (kolor czarny, wielkość punktu - 4), należące do łuku (S, B, A) – kolor szary, grubość linii – 8.
5. Wstaw odcinki: CA i CB (kolor fioletowy, grubość linii - 8), DA i DB (kolor różowy, grubość linii - 8), AE i EB (kolor niebieski, grubość linii - 8).
6. Wstaw kąty:  $\sphericalangle ACB$ ,  $\sphericalangle ADB$ ,  $\sphericalangle AEB$  i w ustawieniach Podstawowe ustaw etykietę: Wartość, Wielkość (60) dla każdego kąta.
7. Wstaw odcinki AS i BS (kolor czarny, styl – linia przerywana, grubość linii - 5) oraz  $\sphericalangle ASB$  (ustaw etykietę: Wartość, wielkość - 60).



## Twierdzenie

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

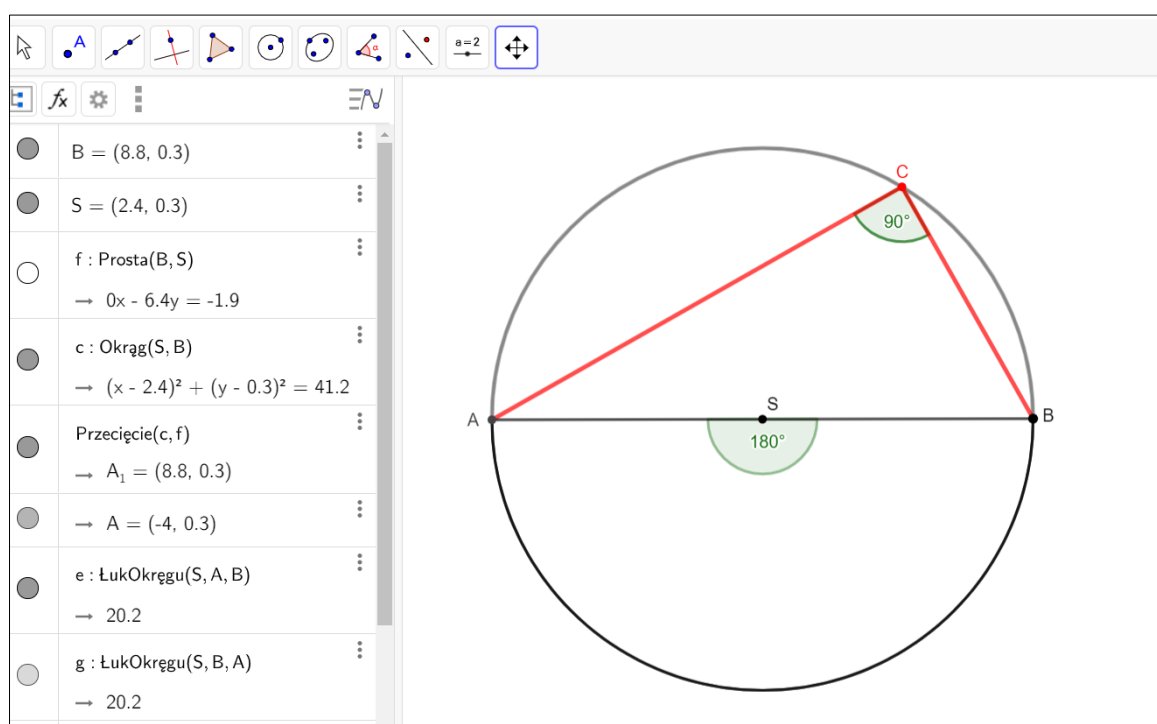
Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Punkt B	Wstaw punkt B	Punkt B
2.	Punkt S	Wstaw punkt S	Punkt S
3.	Prosta BS	Wstaw prostą BS	Prosta f
4.	Okrąg (S,B)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt B, którego środkiem jest punkt S	Okrąg c
5.	Przecięcie (f, c)	Wstaw punkty przecięcia prostej f i okręgu c; ukryj etykietę punktu A <sub>1</sub>	Punkt A
6.	Odcinek AB	Ukryj prostą f i wstaw odcinek AB	Odcinek d

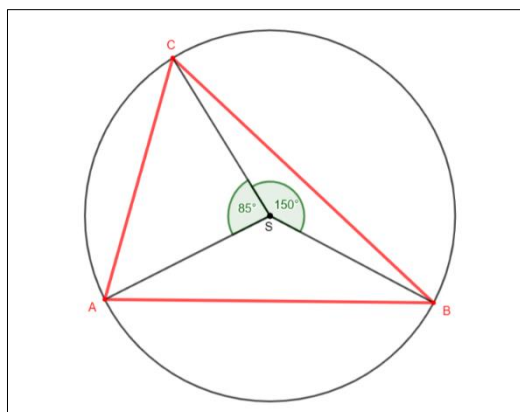


7.	Łuk (S,A,B)	Wstaw łuk okręgu (S,A,B)	Łuk e
8.	Łuk (S,B,A)	Wstaw łuk okręgu (S,B,A)	Łuk g
9.	Kąt ASB	Wstaw kąt ASB	$\alpha = 180^\circ$
10.	Punkt C	Wstaw punkt C należący do łuku g	Punkt C
11.	Odcinek AC	Wstaw odcinek AC	Odcinek h
12.	Odcinek CB	Wstaw odcinek CB	Odcinek i
13.	Kąt ACB	Wstaw kąt ACB	$\beta = 90^\circ$



## Zadania

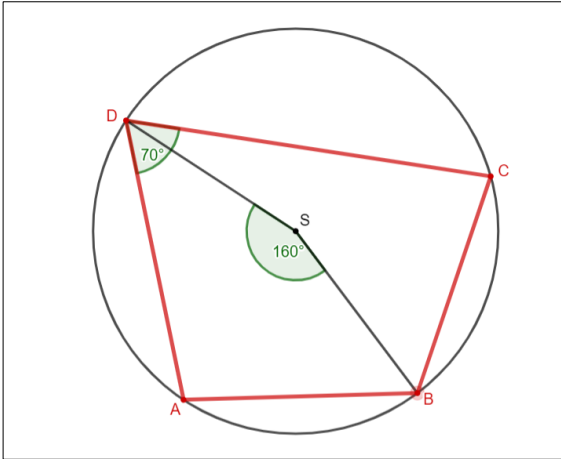
1. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC.



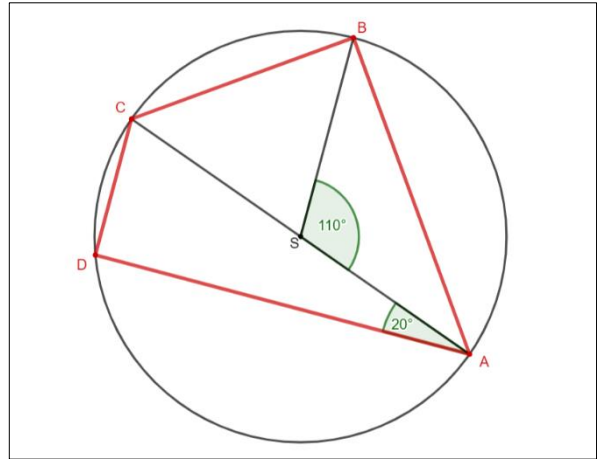


2. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta ABCD.

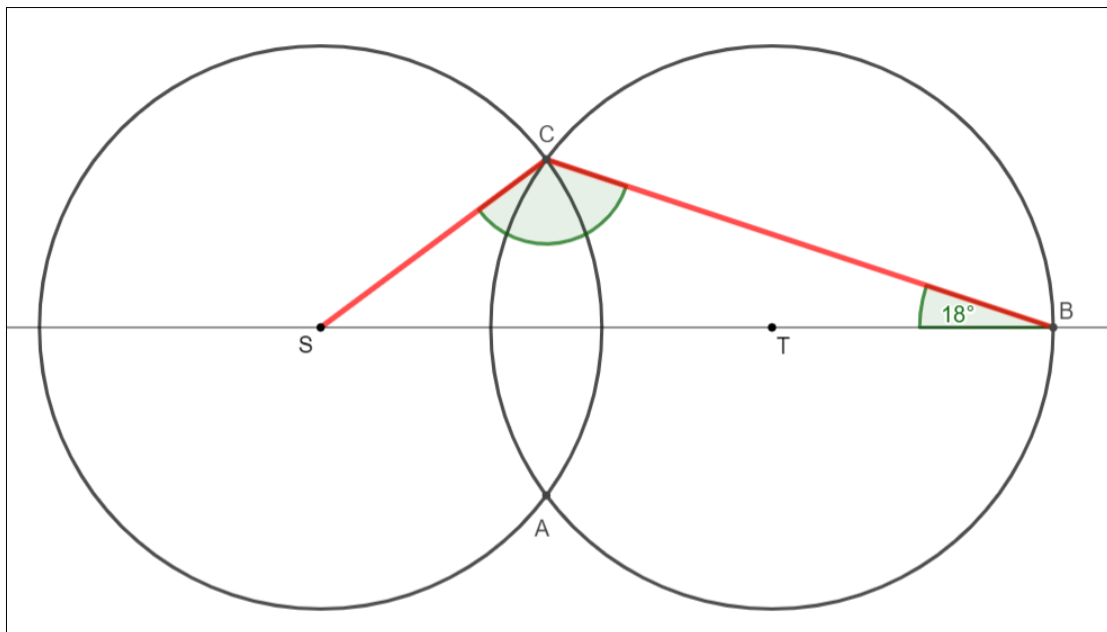
a)



b)



3. Dane są okręgi  $o(S; r)$  i  $o(T; r)$ , które przecinają się w punktach A oraz C. Oblicz miarę kąta SCB.





GeoGebra

**Math Calculators**

# Skrypt 4.

- Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych
- Zadania

## Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych. Zadania

1. Na płaszczyźnie dany jest odcinek o długości  $f$ . Zbuduj trójkąt równoboczny, którego wysokość jest równa danemu odcinkowi.

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Zaokrąglenia: 2 miejsca po przecinku

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

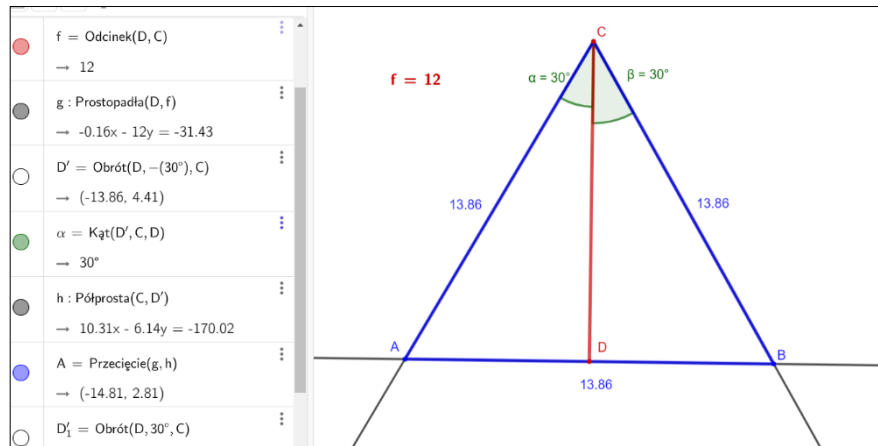
L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Odcinek (C,D)	Wstaw odcinek CD	Odcinek $f$
2.	Prostopadła (D,f)	Wstaw prostą prostopadłą do odcinka $f$ , przechodzącą przez punkt D	Prosta $g$
3.	Kąt (D,C,D')	Wstaw kąt o mierze $30^\circ$ , którego wierzchołkiem jest punkt C, a odcinek CD zawiera się w ramieniu tego kąta	Kąt $\alpha$
4.	Półprosta (C,D')	Wstaw półprostą o początku w punkcie C, przechodzącą przez punkt D'; ukryj punkt D'	Półprosta $h$
5.	Przecięcie (g,h)	Wstaw punkt przecięcia prostej $g$ z półprostą $h$	Punkt A
6.	Kąt (D',C,D)	Wstaw kąt o mierze $30^\circ$ (po drugiej stronie odcinka CD), którego wierzchołkiem jest punkt C, a odcinek CD zawiera się w ramieniu tego kąta	Kąt $\beta$
7.	Półprosta (C,D'₁)	Wstaw półprostą o początku w punkcie C, przechodzącą przez punkt D'₁; ukryj punkt D'₁	Półprosta $i$
8.	Przecięcie (g,i)	Wstaw punkt przecięcia prostej $g$ z półprostą $i$	Punkt B
9.	Odcinek (C,B)	Wstaw odcinek CB	Odcinek $j$
10.	Odcinek (A,B)	Wstaw odcinek AB	Odcinek $k$
11.	Odcinek (C,A)	Wstaw odcinek CA	Odcinek $l$
12.	Tekst	Wstaw tekst: Tekst1="f = 12"	$f = 12$

**Uwaga:** Ustaw kolor oraz styl: odcinków, punktów oraz tekstu.

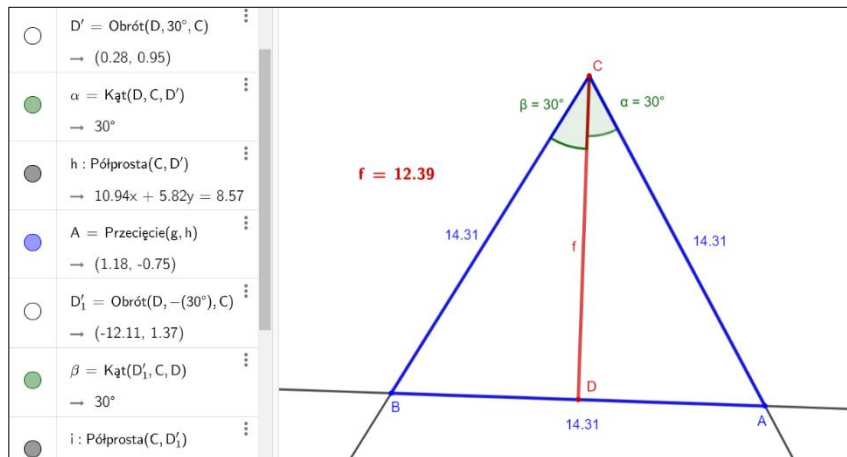




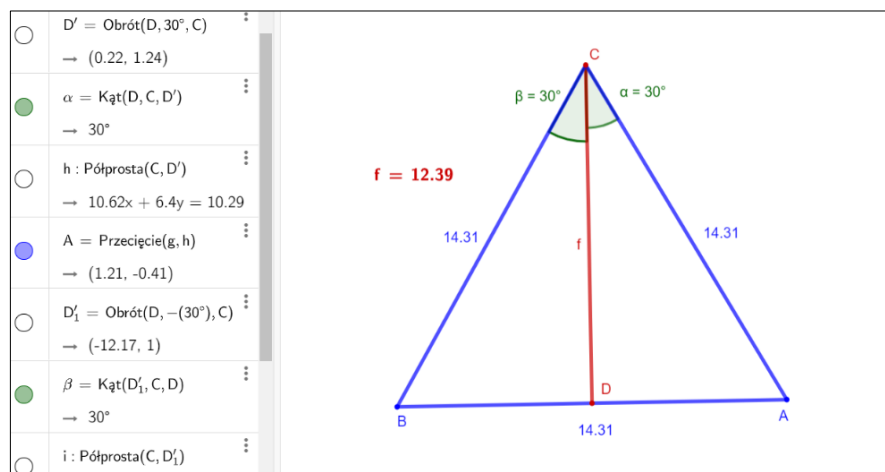
a)  $f = 12$



b)  $f$  – dowolne (dodatnie)



Konstrukcja trójkąta równobocznego po ukryciu prostej i dwóch półprostych.



2. Na płaszczyźnie dany jest odcinek. Skonstruuj taki kwadrat, by końce danego odcinka były wierzchołkami tego kwadratu.

Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

a) Zakładamy, że dane punkty to kolejne wierzchołki kwadratu (A, B).

L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Odcinek (A,B)	Wstaw odcinek AB	Odcinek f
2.	Prostopadła (A,f)	Wstaw prostą prostopadłą do odcinka f, przechodzącą przez punkt A	Prosta g
3.	Okrąg (A,B)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt B, którego środkiem jest punkt A	Okrąg c
4.	Przecięcie (c,g)	Wstaw punkty przecięcia okręgu c i prostej g	Punkty: D, D <sub>1</sub>
5.	Prostopadła (D,g)	Wstaw prostą prostopadłą do prostej g, przechodzącą przez punkt D	Prosta h
6.	Prostopadła (D <sub>1</sub> ,g)	Wstaw prostą prostopadłą do prostej g, przechodzącą przez punkt D <sub>1</sub>	Prosta i
7.	Prostopadła (B,f)	Wstaw prostą prostopadłą do odcinka f, przechodzącą przez punkt B	Prosta j
8.	Przecięcie (h,j)	Wstaw punkt przecięcia prostej h z prostą j	Punkt C
9.	Przecięcie (i,j)	Wstaw punkt przecięcia prostej i z prostą j	Punkt C <sub>1</sub>
10.	Wielokąt (A,B,C,D)	Wstaw wielokąt ABCD	Kwadrat ABCD
11.	Wielokąt (A,B,C <sub>1</sub> ,D <sub>1</sub> )	Wstaw wielokąt ABC <sub>1</sub> D <sub>1</sub>	Kwadrat ABC <sub>1</sub> D <sub>1</sub>

**Uwaga:** Ustaw kolor i styl boków kwadratu oraz jego wierzchołków.

- g : Prostopadła(A, f)  
→  $-9x = 42$
- c : Okrąg(A, B)  
→  $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 87$
- Przecięcie(c, g)  
→  $D_1 = (-5, -12)$
- $D = (-4, 6)$

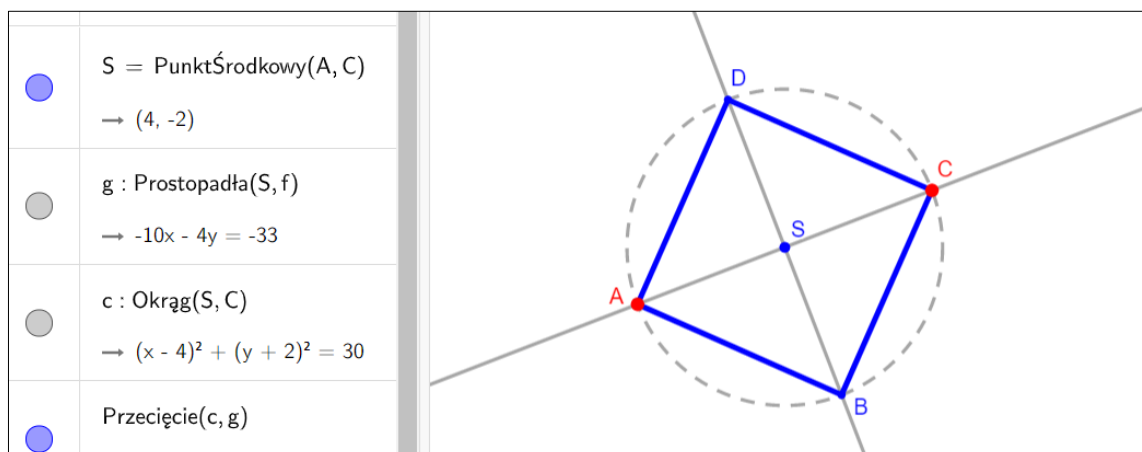
Konstrukcja po ukryciu prostych i okręgu.

- g : Prostopadła(A, f)  
→  $-9x = 42$
- c : Okrąg(A, B)  
→  $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 87$
- Przecięcie(c, g)  
→  $D_1 = (-5, -12)$
- $D = (-4, 6)$

**b)** Zakładamy, że dane punkty nie są kolejnymi wierzchołkami kwadratu (A, C).

L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Prosta (A,C)	Wstaw prostą przechodzącą przez punkty A, C	Prosta f
2.	Środek (A,C)	Wstaw środek odcinka AC	Punkt S
3.	Prostopadła (S,f)	Wstaw prostą prostopadłą do prostej f, przechodzącą przez punkt S	Prosta g
4.	Okrąg (S,C)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt C, którego środkiem jest punkt S	Okrąg c
5.	Przecięcie (c,g)	Wstaw punkty przecięcia okręgu c i prostej g	Punkty: B,D
6.	Wielokąt (A,B,C,D)	Wstaw wielokąt ABCD	Czworokąt $q_1$

**Uwaga:** Ustaw kolor i styl boków kwadratu oraz jego wierzchołków.



3. Dany jest odcinek PR. Skonstruuj sześciokąt foremny, w którym odległość przeciwległych jego boków jest równa długości odcinka PR.

Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebra. Wyłącz: Osie, Siatkę.

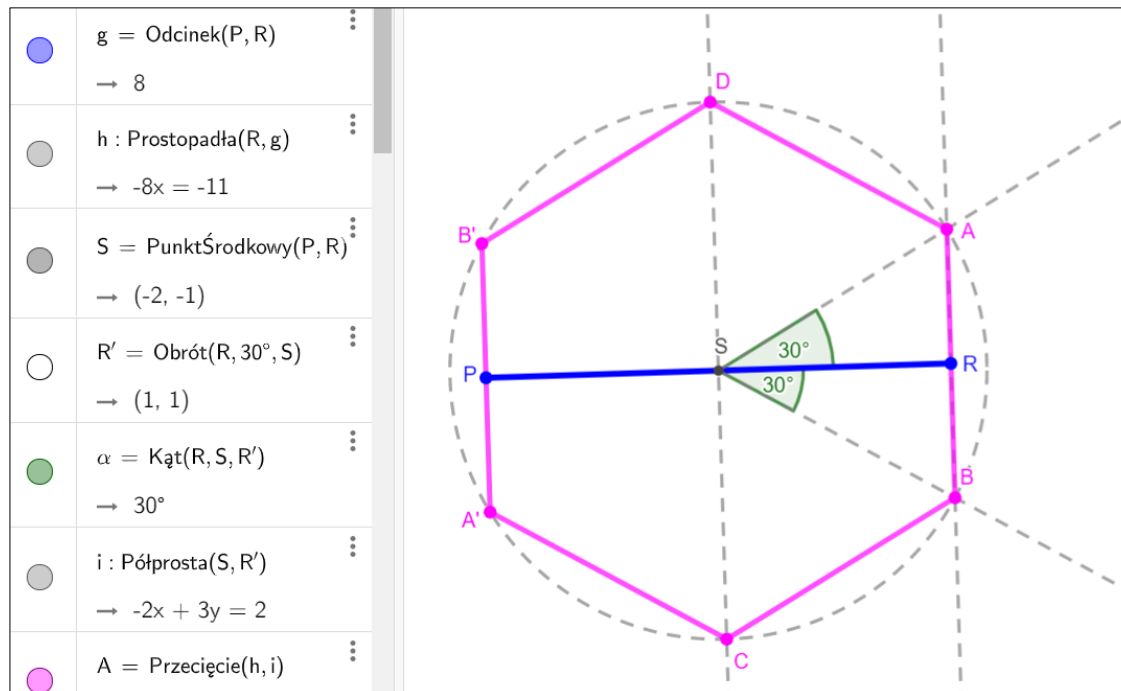
Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Odcinek (P,R)	Wstaw odcinek, którego końcami są punkty P, R	Odcinek g
2.	Prostopadła (R,g)	Wstaw prostą prostopadłą do odcinka g, przechodzącą przez punkt R	Prosta h
3.	Środek (P,R)	Wstaw środek odcinka PR	Punkt S
4.	Kąt (R,S,R')	Wstaw kąt o mierze $30^\circ$ , którego jedno z ramion zawiera odcinek SR	Kąt $\alpha$
5.	Półprosta (S,R')	Wstaw półprostą o początku S, przechodzącą przez punkt R'	Półprosta i
6.	Przecięcie (h,i)	Wstaw punkt przecięcia prostej h i półprostej i; ukryj punkt R'	Punkt A
7.	Kąt (R' <sub>1</sub> ,S,R)	Wstaw kąt o mierze $30^\circ$ , którego jedno z ramion zawiera odcinek SR (zgodnie z ruchem wskazówek zegara)	Kąt $\beta$
8.	Półprosta (S,R' <sub>1</sub> )	Wstaw półprostą o początku S, przechodzącą przez punkt R' <sub>1</sub>	Półprosta f



L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
9.	Przecięcie (f,h)	Wstaw punkt przecięcia prostej h i półprostej f; ukryj punkt $R'_1$	Punkt B
10.	Równoległa (S,h)	Wstaw prostą równoległą do prostej h, przechodzącej przez punkt S	Prosta j
11.	Okrąg (S,A)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt A, którego środkiem jest punkt S	Okrąg c
12.	Przecięcie (c,j)	Wstaw punkty przecięcia okręgu c z prostą j	Punkty C,D
13.	Symetria (A,S)	Wyznacz obraz punktu A w symetrii środkowej względem punktu S	Punkt A'
14.	Symetria (B,S)	Wyznacz obraz punktu B w symetrii środkowej względem punktu S	Punkt B'
15.	Wielokąt (A,B,C,A',B',D)	Wstaw wielokąt foremny o sześciu boków, którego długość jest równa długości odcinka AF	Sześciokąt

**Uwaga:** Ustaw kolor i styl odcinka PR oraz sześciokąta foremnego. Można zmienić nazwy wierzchołków sześciokąta foremnego.



4. Konstrukcja dziesięciokąta foremnego i pięciokąta foremnego (na podstawie opisu E. Koflera, *Z dziejów matematyki*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1962) .

Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Okrąg (S,P)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt P, którego środkiem jest punkt S	Okrąg c
2.	Odcinek (S,P)	Wstaw odcinek SP	Odcinek f
3.	Prostopadła (S,f)	Wstaw prostą prostopadłą do odcinka f, przechodzącą przez punkt S	Prosta g
4.	Przecięcie (c,g)	Wstaw punkty przecięcia okręgu c i prostej g; ukryj etykietę punktu $C_1$	Punkty A, $C_1$
5.	Odcinek (S,A)	Wstaw odcinek SA	Odcinek h
6.	Środek (S,P)	Wstaw środek odcinka SP	Punkt $S'$
7.	Okrąg ( $S'$ ,P)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt P, którego środkiem jest punkt $S'$	Okrąg d
8.	Odcinek ( $S'$ ,A)	Wstaw odcinek $S'A$	Odcinek i
9.	Przecięcie (d,i)	Wstaw punkt przecięcia okręgu d i odcinka i	Punkt R
10.	Odcinek (A,R)	Wstaw odcinek AR	Odcinek j
11.	Okrąg (A,R)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt R, którego środkiem jest punkt A	Okrąg e
12.	Przecięcie (c,e)	Wstaw punkty przecięcia okręgów c i e; ukryj etykietę punktu $C_2$	Punkty B, $C_2$
13.	Okrąg (B,A)	Wstaw okrąg przechodzący przez punkt A, którego środkiem jest punkt B	Okrąg k
14.	Przecięcie (c,k)	Wstaw punkty przecięcia okręgów c i k; ukryj etykietę punktu $D_1$	Punkty $D_1$ , C
15.	Symetria (B,f)	Wstaw punkt E, który jest obrazem punktu B w symetrii względem f	Punkt E
16.	Symetria (C,f)	Wstaw obraz punktu C w symetrii osiowej względem f	Punkt D



L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
17.	Łamana (A,B,C,D,E,C <sub>1</sub> )	Wstaw łamaną ABCDEC <sub>1</sub> ; C <sub>1</sub> =F	Łamana I
18.	Symetria (I,g)	Wstaw obraz łamanej I w symetrii osiowej względem g	Dziesięciokąt
19.	Wielokąt (A,C,E,E',C')	Wstaw wielokąt ACEE'C'	Pięciokąt

- i = Odcinek(A, S')
- 6
- Przecięcie(d, i)
- R = (-4, 4)
- j = Odcinek(A, R)
- 4
- e : Okrąg(A, R)
- $(x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 13$
- Przecięcie(c, e)
- B = (-9, 6)
- C<sub>2</sub> = (-3, 6)

**Uwaga:** Ustaw kolor i styl odcinka AR, dziesięciokąta foremnego oraz pięciokąta foremnego. Można zmienić nazwy wierzchołków dziesięciokąta foremnego.

## Zadania

1. Wyznacz miarę kąta wewnętrznego:

- a) pięciokąta foremnego,
- b) sześciokąta formnego,
- c) dziesięciokąta foremnego,
- d) dwunastokąta foremnego.



**2.** Znajdź wielokąt foremny, którego miara stopniowa kąta wewnętrznego jest liczbą naturalną:

a) parzystą (5 przykładów),

b) nieparzystą (3 przykłady).

**3.** Dany jest sześciokąt foremny. Wyznacz miarę kąta między:

a) przekątnymi, które wychodzą z jednego wierzchołka,

b) dwiema najkrótszymi przekątnymi.

**4.** Wykaż, że przekątne w pięciokącie foremnym są równe.

**5.** Dany jest dziesięciokąt foremny. Wyznacz miarę kąta między dwiema najkrótszymi przekątnymi.

**6.** Narysuj pięciokąt foremny i sześciokąt foremny, a następnie - wszystkie przekątne w obu wielokątach. W pięciokącie foremnym powstanie gwiazda o pięciu ramionach, a w sześciokącie foremnym – o sześciu ramionach. Oblicz miary kątów wewnętrznych każdej z gwiazd.





# GeoGebra

## Math Calculators

# Skrypt 5.

- Odcinki i linie w trójkącie
- Ilustracje twierdzeń o:
  - wysokościach trójkąta
  - środkowych trójkąta
  - dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta
  - symetralnych boków trójkąta
- Okrąg wpisany w trójkąt
- Okrąg opisany na trójkącie
- Zadania

## Ilustracje. Zadania

### 1. Odcinki i linie w trójkącie

#### Instrukcja:

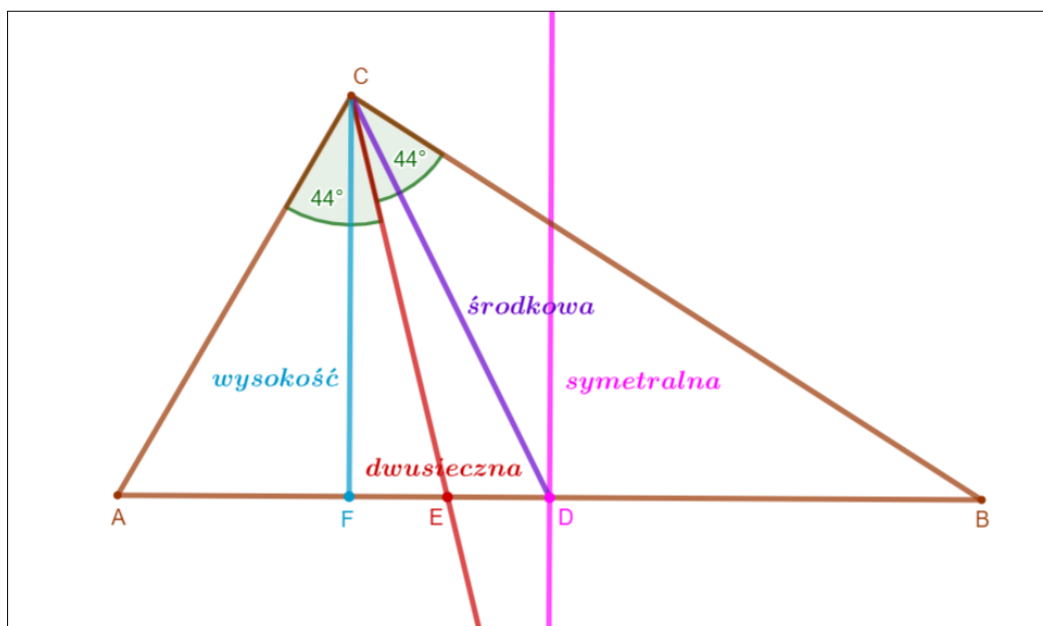
Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

L.p.	Nazwa	Opis	Rezultat
1.	Wielokąt(A, B, C)	Wstaw wielokąt A,B,C	Trójkąt t1 Odcinek BC – a Odcinek AC – b Odcinek AB – c
2.	Środek(A, B)	Wstaw środek odcinka AB	Punkt D
3.	Prostopadła (D,c)	Wstaw prostą prostopadłą do boku c, przechodzącą przez punkt D	Prosta f
4.	Tekst	Wstaw tekst: tekst1 = "symetralna"	Symetralna
5.	Odcinek(C, D)	Wstaw odcinek CD	Odcinek g
6.	Tekst	Wstaw tekst: tekst2 = "środkowa"	Środkowa
7.	Dwusieczna(A, C, B)	Dwusieczna kąta ACB	Prosta h
8.	Przecięcie(h, c)	Wstaw punkt przecięcia prostej h z odcinkiem AB; ukryj prostą h	Punkt E
9.	Półprosta(C, E)	Wstaw półprostą o początku w punkcie C, przechodzącą przez punkt E	Półprosta i
10.	Kąt(A, C, E)	Wstaw kąt ACE ( $\alpha$ ), pokaż jego wartość	Miara kąta
11.	Kąt(E, C, B)	Wstaw kąt ECB ( $\alpha$ ), pokaż jego wartość	Miara kąta
12.	Prosta (C, c)	Wstaw prostą prostopadłą do odcinka AB, przechodzącą przez punkt C	Prosta j
13.	Przecięcie(c, j)	Wstaw punkt przecięcia odcinka c z prostą j; ukryj prostą j	Punkt F
14.	Odcinek (C, F)	Wstaw odcinek CF	Odcinek k
15.	Tekst	Wstaw tekst: tekst3 = "dwusieczna"	Dwusieczna
16.	Tekst	Wstaw tekst: tekst4 = "wysokość"	Wysokość



## 2. Twierdzenie o wysokościach trójkąta

Każdy trójkąt ma trzy wysokości. Proste, które zawierają wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie (ortocentrum trójkąta).

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

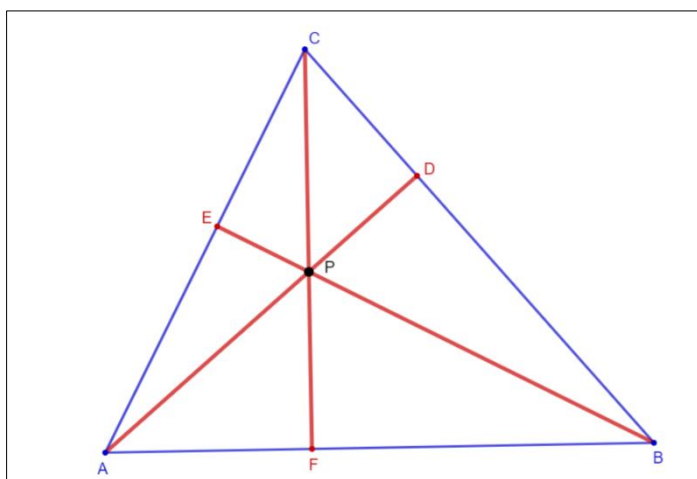
Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

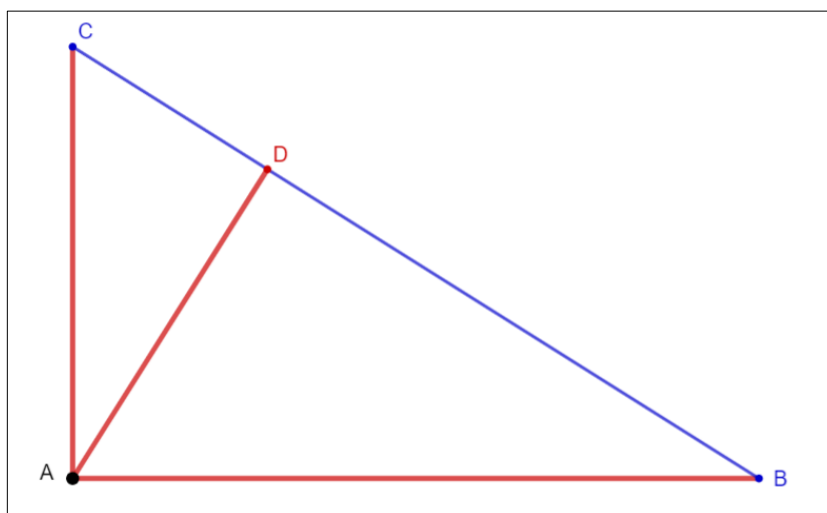
### a) trójkąt ostrokątny

- Wstaw trójkąt ostrokątny ABC (Wielokąt o Stałym Kształcie)
- Wstaw prostą prostopadłą  $f$  do boku BC, przechodzącą przez punkt A
- Wstaw punkt przecięcia D prostej prostopadłej  $f$  z odcinkiem BC
- Wstaw odcinek AD (wysokość trójkąta); ukryj prostą prostopadłą  $f$
- Analogicznie wyznacz wysokości poprowadzone z wierzchołka B oraz wierzchołka C
- Wstaw punkt przecięcia wysokości tego trójkąta (punkt P)



### b) trójkąt prostokątny

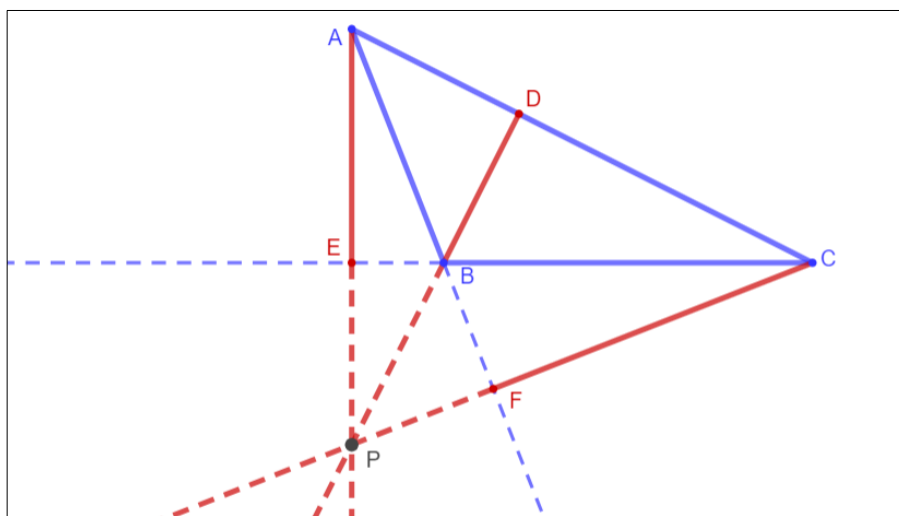
- Wstaw trójkąt prostokątny ABC (np. wstaw: dwie proste prostopadłe, prostą przecinającą te proste oraz punkty przecięcia prostych A, B, C; wstaw odcinki AB, BC, AC; ukryj proste)
- Wstaw prostą prostopadłą h do boku BC, przechodzącą przez punkt A
- Wstaw punkt przecięcia D prostej prostopadłej h z odcinkiem BC
- Wstaw odcinek AD (wysokość trójkąta); ukryj prostą prostopadłą h
- Zaznacz pozostałe wysokości oraz ortocentrum tego trójkąta (punkt A=P)





### c) trójkąt rozwartokątny

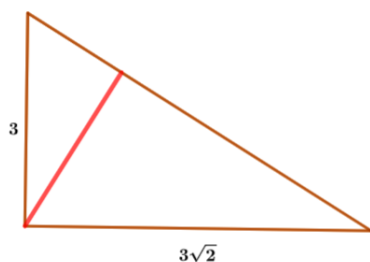
- Wstaw trójkąt rozwartokątny ABC (Wielokąt o Stałym Kształcie)
- Wstaw prostą prostopadłą  $f$  do boku BC, przechodzącą przez punkt A
- Wstaw punkt przecięcia D prostej prostopadłej  $f$  z odcinkiem BC
- Wstaw odcinek AD (wysokość trójkąta); ukryj prostą prostopadłą  $f$
- Analogicznie wyznacz wysokości poprowadzone z wierzchołka B oraz wierzchołka C
- Wstaw punkt przecięcia wysokości tego trójkąta (punkt P)



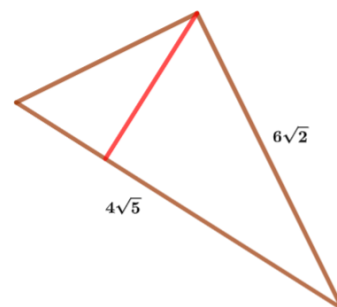
### Zadania

1. Wysokość trójkąta równobocznego jest równa  $h$ . Wyznacz pole i obwód tego trójkąta.
2. Wyznacz długość boku trójkąta równobocznego wiedząc, że wysokość tego trójkąta jest o 3 cm krótsza od jego boku.
3. W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długość tej wysokości, korzystając z informacji podanych na rysunku.

a)



b)





4. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 15 cm, a wysokość CD, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego –  $5\sqrt{2}$  cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt D podzielił przeciwprostokątną.
5. W trójkącie ABC długości boków wynoszą:  $|AB|= 10$ ,  $|BC|= 5$ ,  $|AC|= 4\sqrt{6}$ , a wysokość poprowadzona z wierzchołka A – 8. Jaką długość mają wysokości poprowadzone z wierzchołka B, C?
6. Obwód trójkąta jest równy 48 cm, a jego wysokości wynoszą: 8 cm,  $9\frac{15}{17}$  cm,  $16\frac{4}{5}$  cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.
7. W trójkącie równoramiennym ABC boki mają długości:  $|AC|= |BC|= 12$ ,  $|AB|= 18$ . Wyznacz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka A.
8. Obwód trójkąta równoramiennego ABC ( $|AC|= |BC|$ ) wynosi 36 dm, a wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość 12 dm. Jaką długość ma wysokość poprowadzona z wierzchołka A?
9. Jaką długość mają wysokości trójkąta, którego boki wynoszą: 17, 25, 28?

### 3. Twierdzenie o środkowych trójkąta

Każdy trójkąt ma trzy środkowe. Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1. Punkt przecięcia środkowych nazywa się środkiem ciężkości trójkąta.

#### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra.

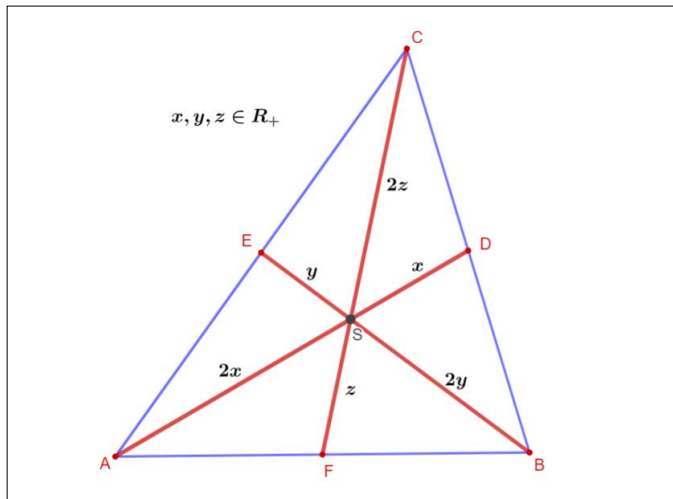
Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

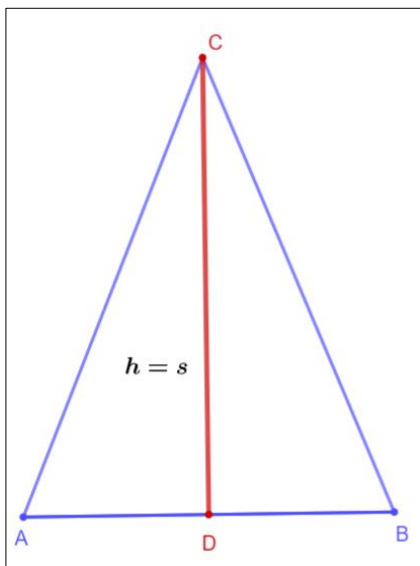


- Wstaw trójkąt ABC
- Wstaw środek odcinka: BC, AC, AB
- Wstaw odcinki: AD, BE, CF
- Wstaw punkt przecięcia odcinka AD i BE
- Wstaw tekst:  $2x, x, 2y, y, 2z, z; x, y, z \in R_+$

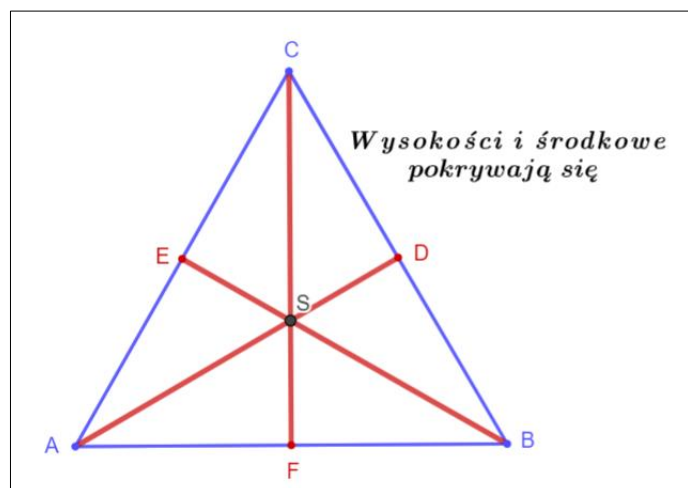


**Uwaga:**

1. Trójkąt równoramienny

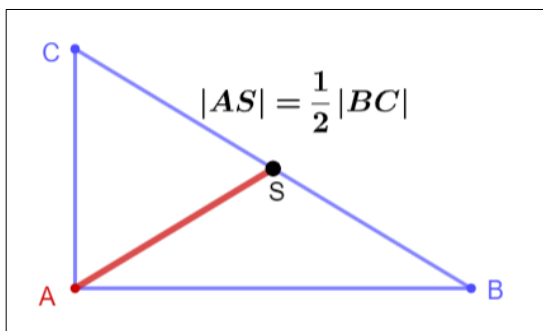


2. Trójkąt równoboczny





### 3. Trójkąt prostokątny



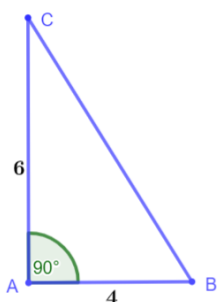
#### Konstrukcja trójkąta prostokątnego

W Polu Wprowadzania wstawiono punkty:  
A=(0,0), B=(5,0), C=(0,3)

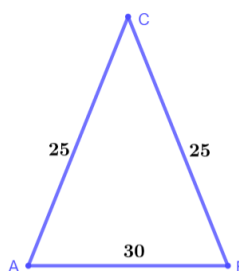
#### Zadania

1. Oblicz długość środkowych trójkąta, korzystając z informacji podanych na rysunku.

a)



b)



2. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 32 cm, a środkowa AE – 30 cm. Oblicz długość środkowej CD oraz ramienia tego trójkąta.

3. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość  $2\sqrt{2}$  i  $4\sqrt{3}$ . Oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od środka ciężkości w tym trójkącie.

4. Oblicz obwód trójkąta równoramiennego ABC, w którym środkowe AE i BD są prostopadłe, a ich długość wynosi 12cm.

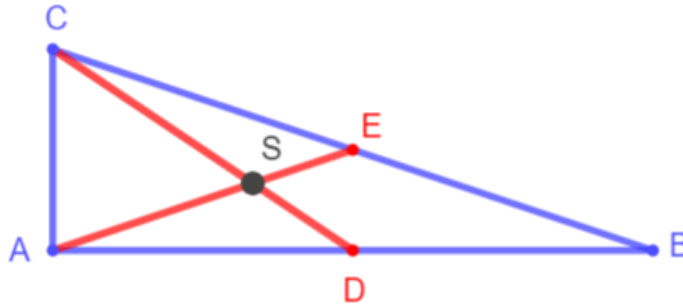
5. W trójkącie ABC podstawa AB jest równa 60 cm, wysokość CD – 12 cm, a środkowa CE poprowadzona do podstawy – 13 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

6. Punkt E jest dowolnym punktem środkowej CD trójkąta ABC. Wykaż, że pole trójkąta AEC jest równe polu trójkąta BEC.





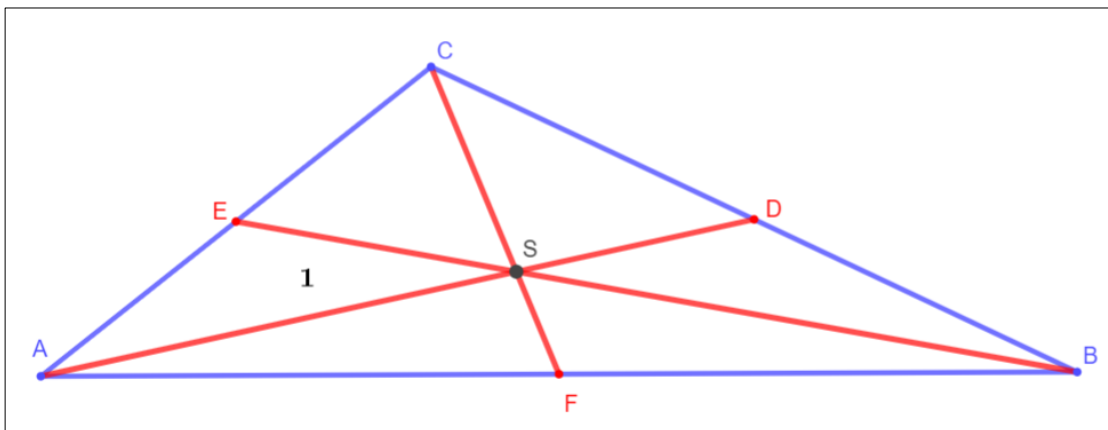
7. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment parku, w którym alejki AC i AB przecinają się pod kątem prostym. Oblicz długość drogi spacerowej CS wiedząc, że  $|AC| = 50$  m,  $|AE| = 65$  m. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 metra.



8. Odcinek CD jest środkową boku AB w trójkącie ABC. Oblicz miarę kąta ACB, jeśli  $|CD| = |DB|$ .
9. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym  $|AC| = |BC|$  i którego obwód wynosi 50, poprowadzono środkowe AD i BE. Oblicz długości boków trójkąta ABC wiedząc, że obwód trójkąta ABE jest o 8 większy od obwodu trójkąta ACD.

(A. Śnieżek, P. Tęcza, *Zbiór zadań z geometrii płaszczyzny dla szkół średnich*, WSiP, Warszawa 1998)

10. Środkowe AD, BE, CF trójkąta ABC podzieliły ten trójkąt na sześć trójkątów (rysunek poniżej). Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli  $P_1 = 10$  ( $P_1$  – pole trójkąta nr 1).



#### 4. Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie

W dowolnym trójkącie  $ABC$ , w którym  $CD$  jest dwusieczną kąta wewnętrznego tego trójkąta,

zachodzi równość:  $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DB|}$ .

Instrukcja:

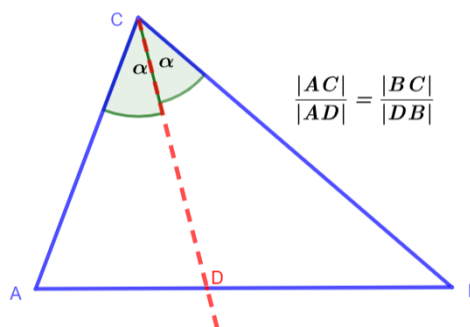
Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

- Wstaw trójkąt  $ABC$
- Wstaw dwusieczną kąta wewnętrznego  $ACB$
- Wstaw kąty  $ACD$  i  $DCB$  oraz tekst:  $\alpha, \alpha$
- Wstaw tekst  $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DB|}$



#### Zadania

1. W trójkącie prostokątnym  $ABC$  przyprostokątne  $AC$ ,  $BC$  mają długości 8 cm i 15 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.
2. Długości boków trójkąta  $ABC$  wynoszą:  $|AB| = 10$  cm,  $|BC| = 11$  cm,  $|AC| = 13$  cm. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą przeciwległe boki.
3. Wiadomo, że w trójkącie  $ABC$  długość boku  $AB$  wynosi 6 cm, a boku  $BC$  – 9 cm oraz jeden z odcinków, na które dwusieczna kąta  $ABC$  dzieli bok  $AC$ , jest równy jednemu z danych boków. Wyznacz długość trzeciego boku trójkąta  $ABC$ .
4. Obwód trójkąta  $ABC$  wynosi 19 cm, a dwusieczna kąta wewnętrznego  $CAB$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $P$  takim, że  $|BP| = 5$  cm, a  $|PC| = 2$  cm. Wyznacz długości boków trójkąta  $ABC$ .
5. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną tego trójkąta na odcinki o długościach 5 cm i 7 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.



## 5. Twierdzenie o dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta

W dowolnym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

### Instrukcja:

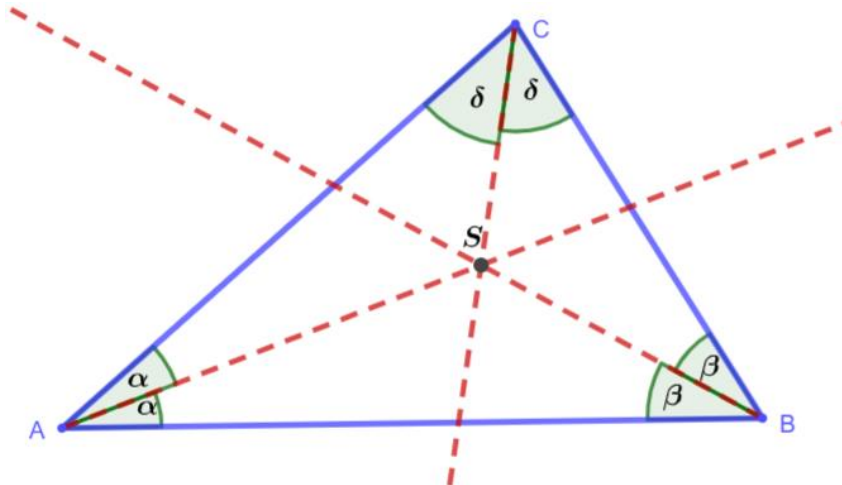
Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

- Wstaw trójkąt ABC
- Wstaw dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta
- Wstaw punkt S przecięcia dwusiecznych





Instrukcja:

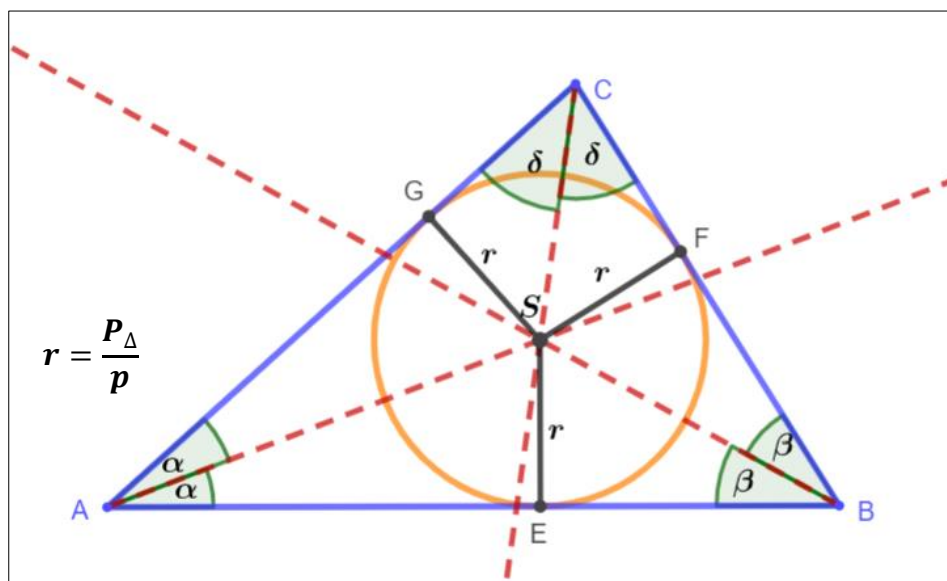
Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

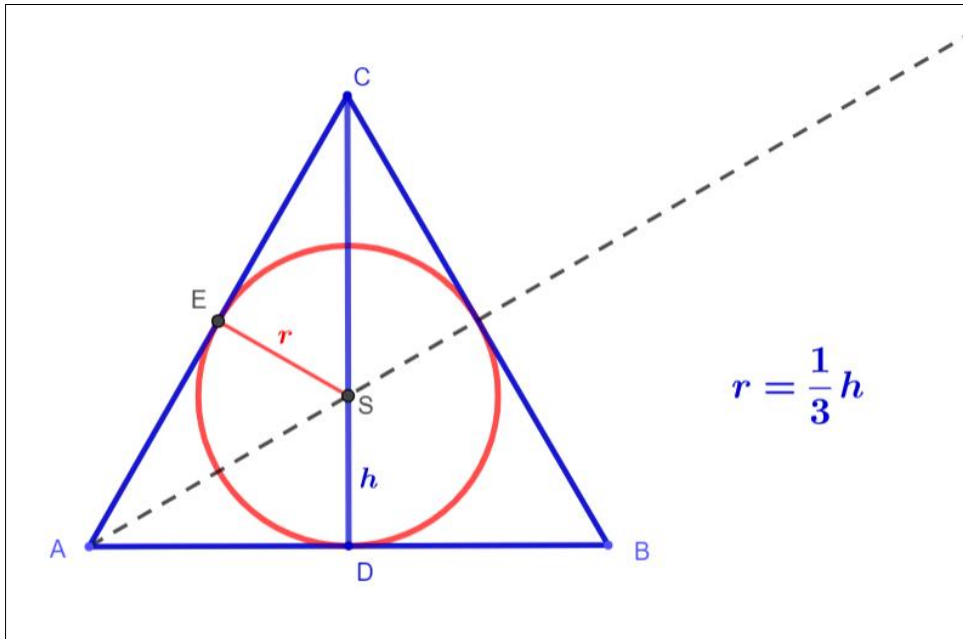
- Wstaw trójkąt ABC
- Wstaw dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta
- Wstaw punkt S przecięcia dwusiecznych
- Wstaw odcinki SE, SF, SG, które są prostopadłe odpowiednio do boków trójkąta: AB, BC, AC
- Wstaw okrąg o środku S i promieniu równym długości odcinka SE
- Wstaw tekst:  $\alpha, \alpha, \beta, \beta, \delta, \delta, r, r, r$



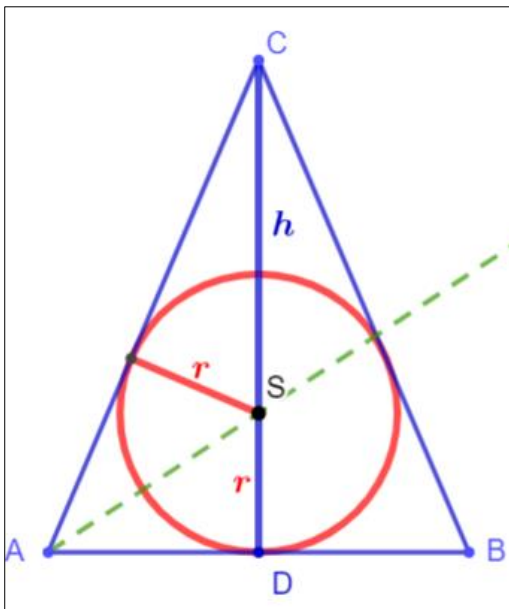
**Uwaga:** Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że:  $|AE| = |AG|$ ,  $|BE| = |BF|$ ,  $|CF| = |CG|$



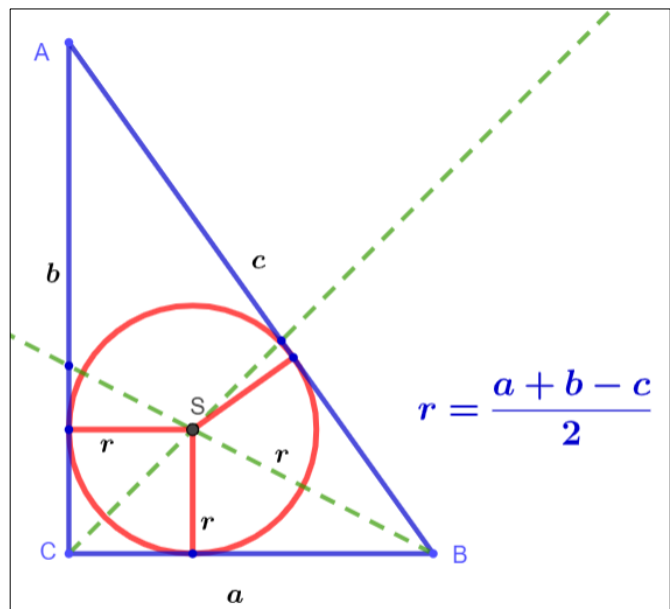
### Okrąg wpisany w trójkąt równoboczny



### Okrąg wpisany w trójkąt równoramienny



### Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny





## Zadania

1. Oblicz pole i obwód okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości 10 dm.
2. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy 6 cm. Oblicz wysokość oraz pole tego trójkąta.
3. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt:
  - a) równoramienny o bokach długości 10 cm, 13 cm, 13 cm,
  - b) prostokątny o przyprostokątnych długości 2 cm,  $4\sqrt{2}$  cm,
  - c) o bokach długości 13 dm, 14 dm, 15 dm.
4. W trójkąt równoramienny ABC, w którym długości boków wynoszą:  $|AB|=18$ ,  $|AC|=|BC|=15$ , wpisano okrąg. Oblicz długość promienia oraz odległości środka tego okręgu od wierzchołków trójkąta ABC.
5. W trójkącie prostokątnym ABC miara  $\angle ACB$  jest równa  $90^\circ$ , długość przeciwprostokątnej wynosi 25 cm, a jednej z przyprostokątnych – 7 cm. W ten trójkąt wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki tego trójkąta.
6. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC, jeśli przeciwprostokątna AB ma długość  $5\sqrt{2}$ , a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy  $\sqrt{2}$ .
7. Pole trójkąta równoramiennego ABC wynosi  $168 \text{ cm}^2$ , jego podstawa AB ma długość 14 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 5,25 cm. Oblicz długość ramienia trójkąta ABC.



## 6. Twierdzenie o symetralnych boków trójkąta

W dowolnym trójkącie symetralne trzech boków przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

### Instrukcja:

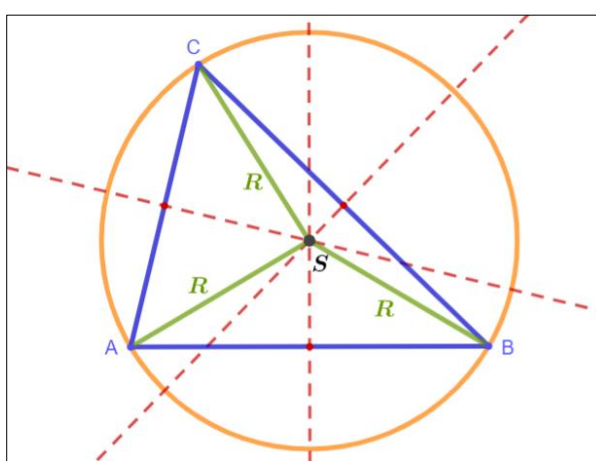
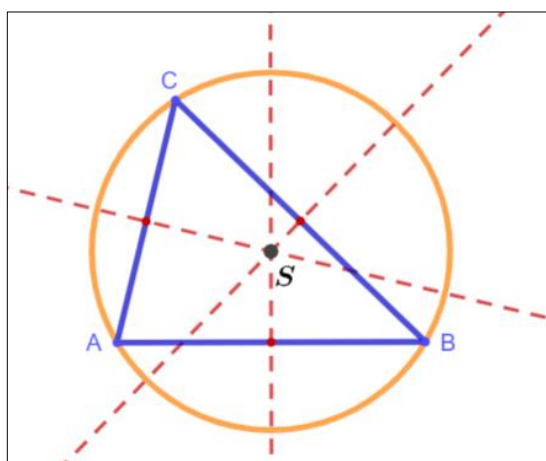
Uruchom program GeoGebra.

Włącz Widok Grafiki i Widok Algebry. Wyłącz: Osie, Siatkę.

Z Menu wybierz: Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

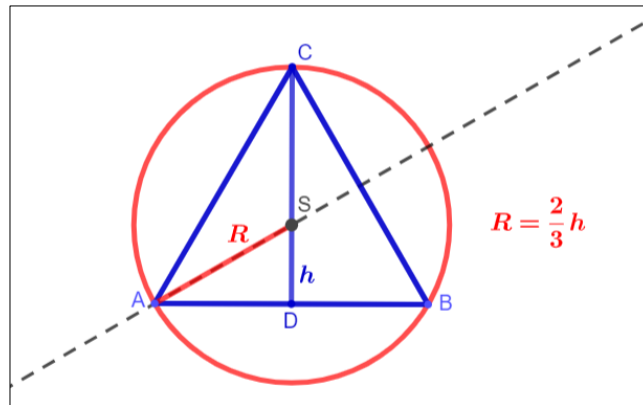
Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

- Wstaw trójkąt ABC
- Wstaw symetralne boków trójkąta i punkt S przecięcia symetralnych
- Wstaw odcinki SA, SB, SC
- Wstaw okrąg o środku S i promieniu równym długości odcinka SA
- Wstaw tekst:  $R, R, R$

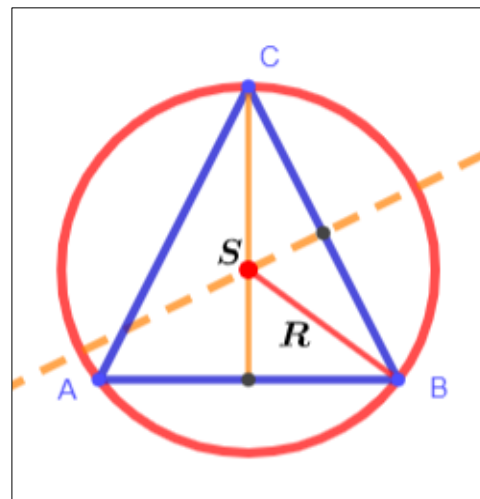
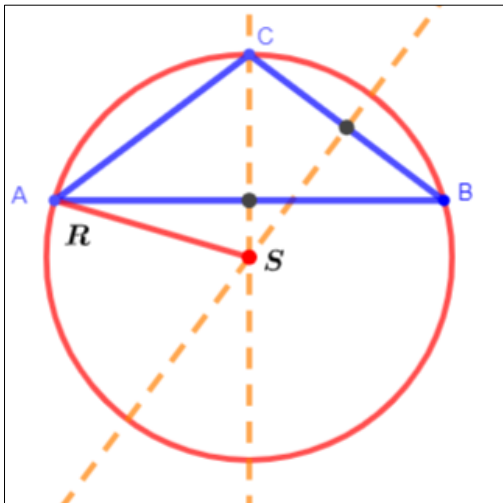


$$R = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4P_{\Delta}}$$

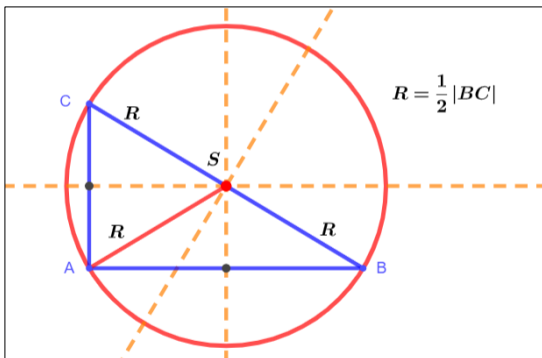
### Okrąg opisany na trójkącie równobocznym



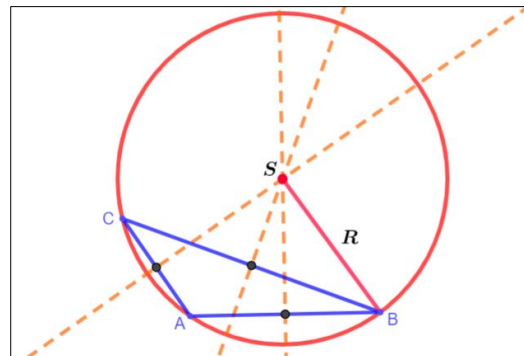
### Okrąg opisany na trójkącie równoramiennym



### Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym



### Okrąg opisany na trójkącie rozwartokątnym







## Zadania

1. Oblicz pole i obwód okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości 15 dm.
2. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy 9 cm. Oblicz wysokość oraz obwód tego trójkąta.
3. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie:
  - a) równoramiennym o bokach długości 10 cm, 13 cm, 13 cm,
  - b) prostokątnym o przyprostokątnych długości 2 cm,  $4\sqrt{2}$  cm,
  - c) prostokątnym o przyprostokątnej długości  $8\sqrt{2}$  i przeciwległym do niej kącie o mierze  $60^\circ$ ,
  - d) o bokach długości 13 dm, 14 dm, 15 dm.
4. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 18 cm, a ramiona AC i BC są równe 15 cm. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie ABC od jego ramienia.
5. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 6 cm krótszy od jego wysokości. Oblicz długość boku tego trójkąta.
6. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, w którym różnica długości promieni okręgu opisanego i wpisanego w ten trójkąt wynosi 5 cm.
7. Na trójkącie równoramiennym ABC opisano okrąg o promieniu 4 cm. Podstawa AB tego trójkąta jest oparta na  $\frac{2}{5}$  okręgu. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego pole.



# GeoGebra

## Math Calculators

# Skrypt 6.

- Wstęp
- Przykłady wykresów funkcji. Zadania
- Funkcja liniowa
- Funkcja kwadratowa
- Proporcjonalność odwrotna
- Funkcja homograficzna
- Zadania



## I. Ustawienie parametrów układu współrzędnych

The screenshot shows the 'Podstawowe' settings panel with the following options:

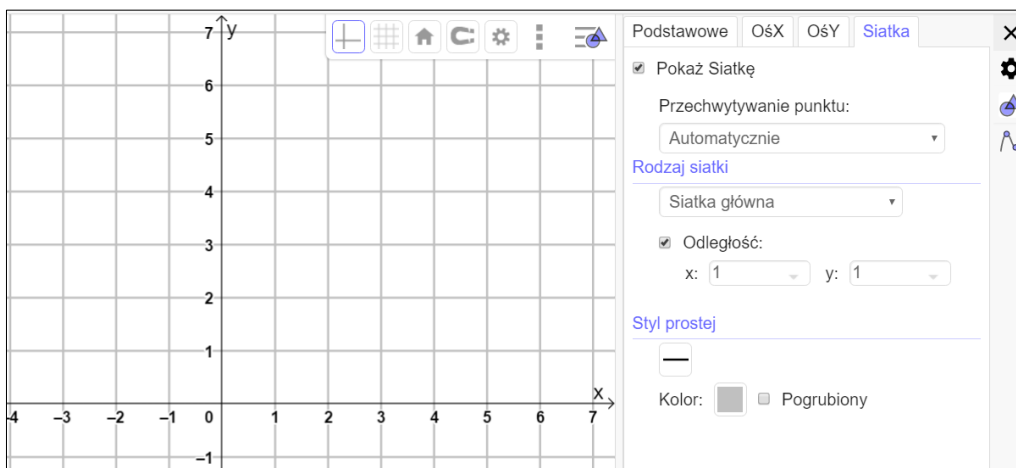
- Wymiary:** xMin: -4.06794, xMax: 0.39717, yMin: -8.67719, yMax: 4.96002. OśX : OśY: 1 : 1.
- Osie:**  Pokaż Osie,  Pogrubiony. Kolor: [black square], Styl prostej: [arrow]. Styl Etykiety:  Serif,  Pogrubiony,  Kursywa.
- Pasek nawigacji etapów konstrukcji:**  Pokaż,  Przycisk odtwarzania,  Przycisk otwarcia okna protokołu konstrukcji.
- Inne:** Kolor tła: [white square], Tooltips (dymki z komentarzem): Automatyczny,  Pokaż Współrzędne Kursora Myszki, Styl kąta prostego: [dot].

The screenshot shows the 'OśX' settings panel with the following options:

- Pokaż oś OX
- Pokaż liczby na osi
- Tylko wartości dodatnie
- Odległość: 1
- Znacznik: |||
- Etykieta: x
- Jednostka: [empty]
- Przecięcie w: 0
- Trzymaj się krawędzi
- Wybór dozwolony

The screenshot shows the 'OśY' settings panel with the following options:

- Pokaż oś OY
- Pokaż liczby na osi
- Tylko wartości dodatnie
- Odległość: 1
- Znacznik: |||
- Etykieta: y
- Jednostka: [empty]
- Przecięcie w: 0
- Trzymaj się krawędzi
- Wybór dozwolony



## II. Przykłady wykresów funkcji. Zadania

### 1. Przedstawienie kilku funkcji w jednym aplikacji

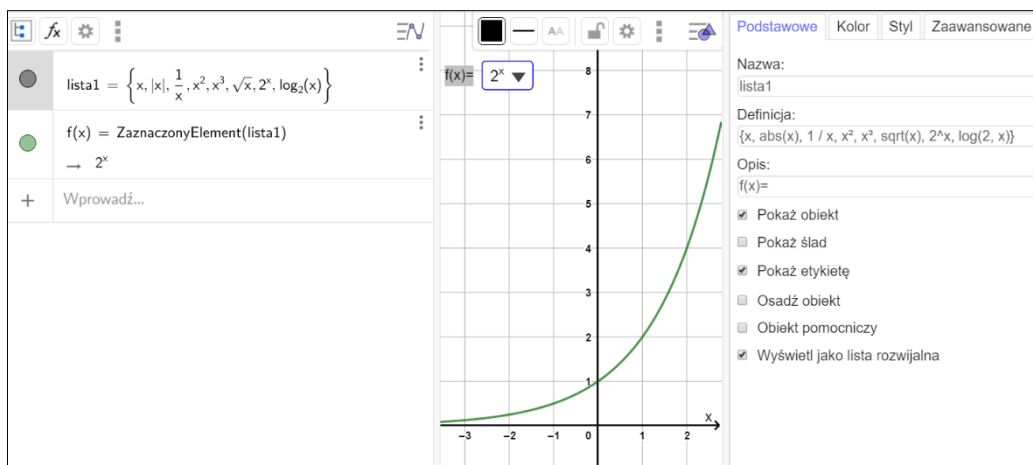
#### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebra, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz listę funkcji  $lista1 = \left\{ x, |x|, \frac{1}{x}, x^2, x^3, \sqrt{x}, 2^x, \log_2 x \right\}$ .
2. We właściwościach obiektu lista1 w Opisie wpisz  $f(x)=$  oraz wybierz: Wyświetl jako lista rozwijalna.
3. W Widoku Algebra wpisz polecenie:  $f(x)=\text{Zaznaczony Element}(lista1)$ .





## Zadanie

1. Korzystając z wykresu funkcji, podaj:

- jej dziedzinę i zbiór wartości,
- współrzędne punktów, w których wykres przecina osie układu współrzędnych (o ile istnieją),
- najmniejszą i największą wartość funkcji (o ile istnieją).

## 2. Wykres funkcji – łamana

### Instrukcja:

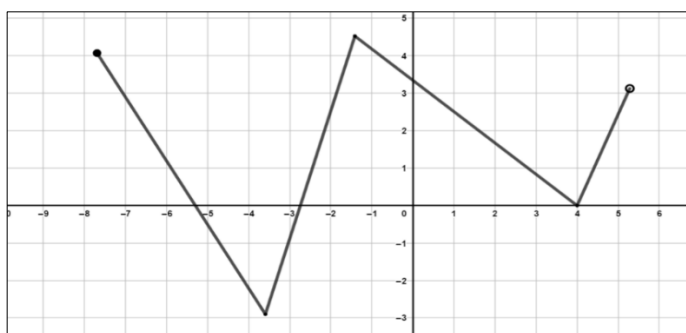
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

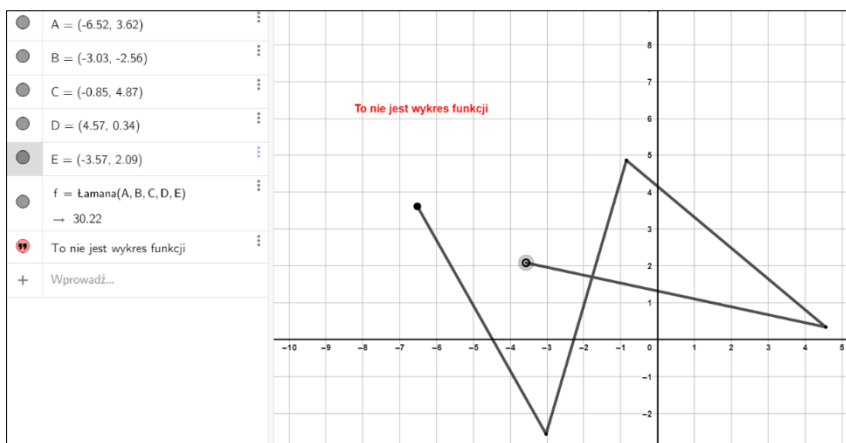
- Wstaw łamaną ABCDE i ustaw jej grubość na 8. Ukryj etykiety wszystkich punktów i zmień ich kolor na czarny. Zmień wielkość punktów B, C, D na 2 oraz styl (w razie potrzeby) punktów A, E.



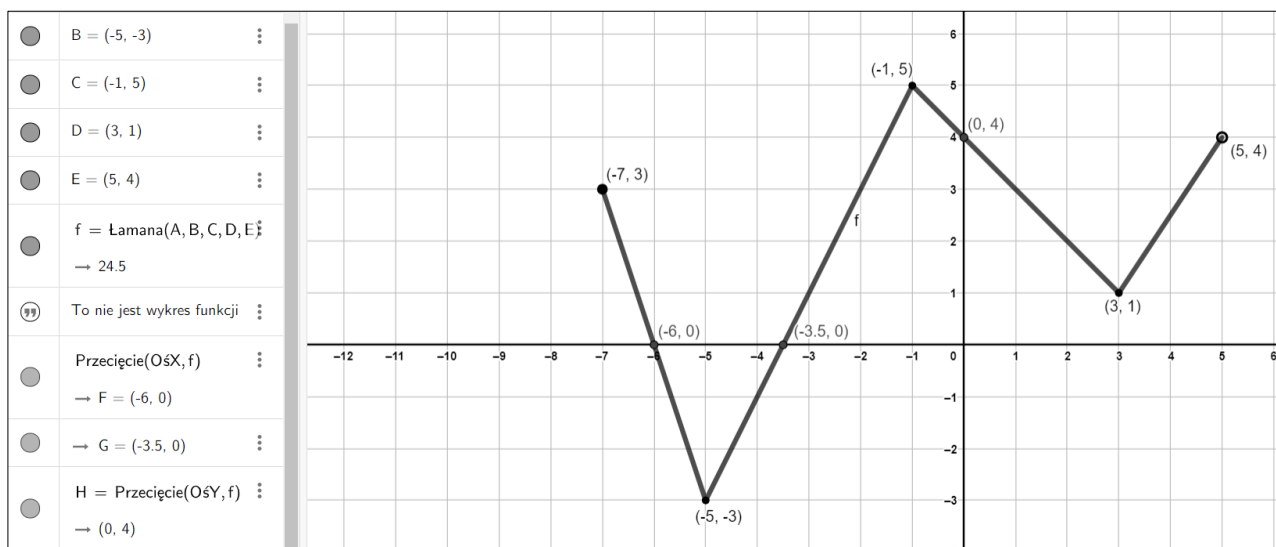
**Uwaga:** Można zmieniać kształt łamanej, przesuwając jej wierzchołki. Wówczas może się zdarzyć, że otrzymamy wykres, który nie będzie wykresem funkcji.

- Wstaw tekst: "To nie jest wykres funkcji" (enter), a następnie w Ustawieniach w zakładce Zaawansowane wpisz Warunek wyświetlania obiektu:  $\neg(x(A) < x(B) < x(C) < x(D) < x(E))$

Zmień kolor tekstu na czerwony, można go pogrubić.



3. Ustaw łamaną tak, by była wykresem funkcji, miała miejsca zerowe oraz przecinała oś OY.  
Wyznacz punkty przecięcia łamanej z osiami układu współrzędnych oraz kliknij w Widoku Algebry : → Ustawienia → Pokaż etykiety: Wartość.



### Przykład

Korzystając z wykresu funkcji (rysunek powyżej), podaj:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,

- d) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- e) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie,
- f) czy funkcja jest różnowartościowa
- g) przedziały monotoniczności funkcji,
- h) największą i najmniejszą wartość funkcji.

a)  $D_f = \langle -7; 5 \rangle$

b)  $ZW_f = \langle -3; 5 \rangle$

c)  $f(x) = 0$ , jeśli  $x \in \{-6; -3,5\}$

d)  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -7; -6 \rangle \cup \langle -3,5; 5 \rangle$

e)  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -6; -3,5 \rangle$

f) funkcja f nie jest różnowartościowa

g) I sposób:

Jeśli:

$x \in \langle -7; -5 \rangle$ , to funkcja jest malejąca

$x \in \langle -5; -1 \rangle$ , to funkcja jest rosnąca

$x \in \langle -1; 3 \rangle$ , to funkcja jest malejąca

$x \in \langle 3; 5 \rangle$ , to funkcja jest rosnąca

II sposób:

! Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów:  $\langle -7; -5 \rangle, \langle -1; 3 \rangle$ .

! Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów:  $\langle -5; -1 \rangle, \langle 3; 5 \rangle$ .

h) Największa wartość funkcji f jest równa 5, a najmniejsza wynosi (-3).

### Zadanie

Zmień kształt wykresu funkcji f i odczytaj własności tej funkcji z jej wykresu.

### 3. Funkcja liniowa

#### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

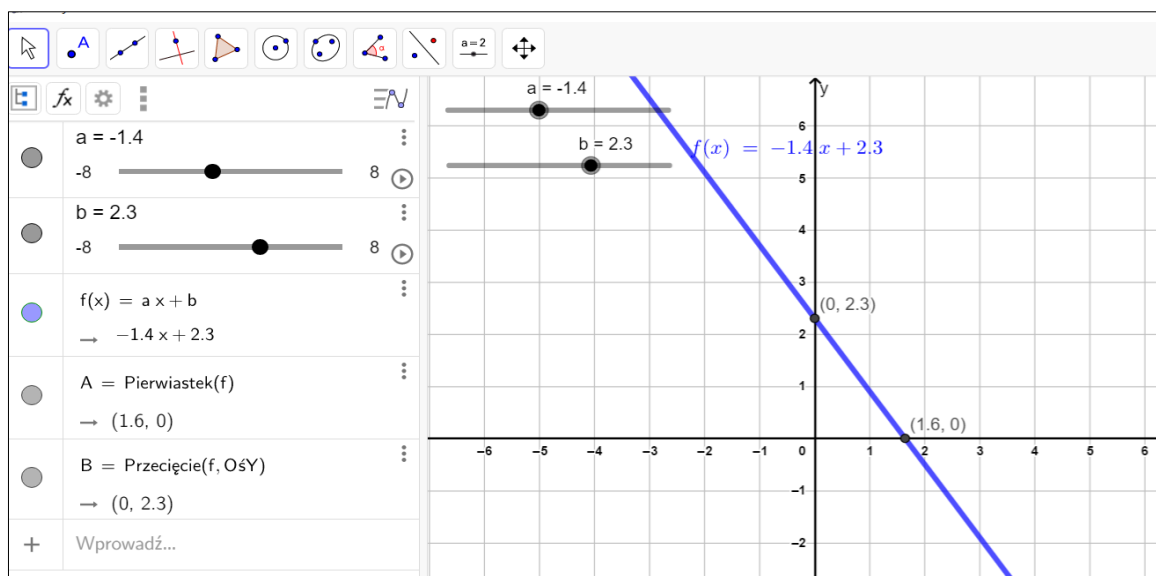
Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

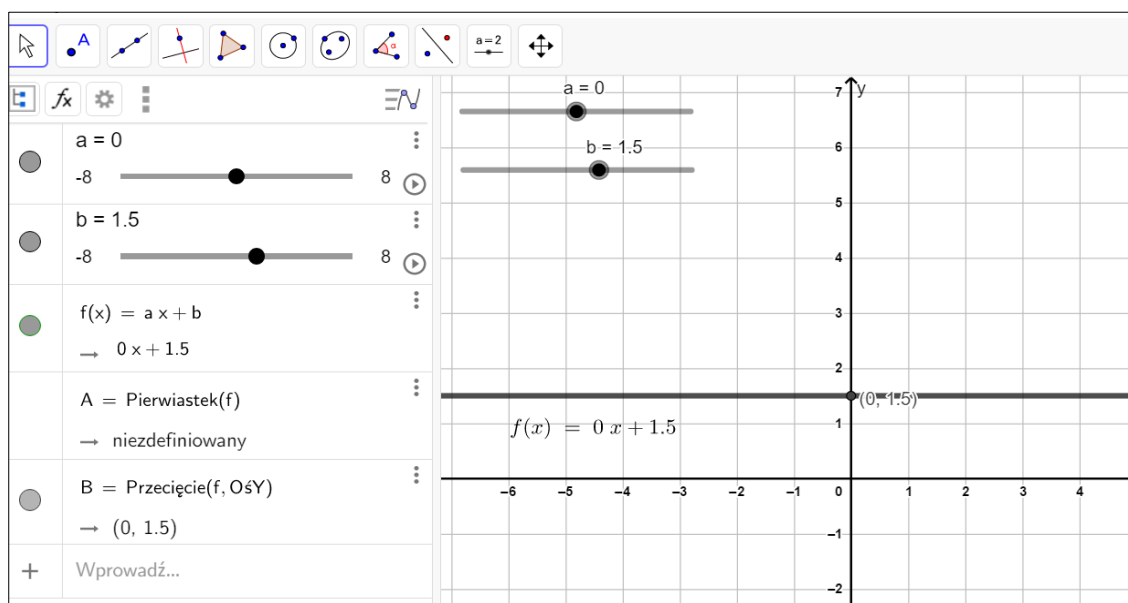
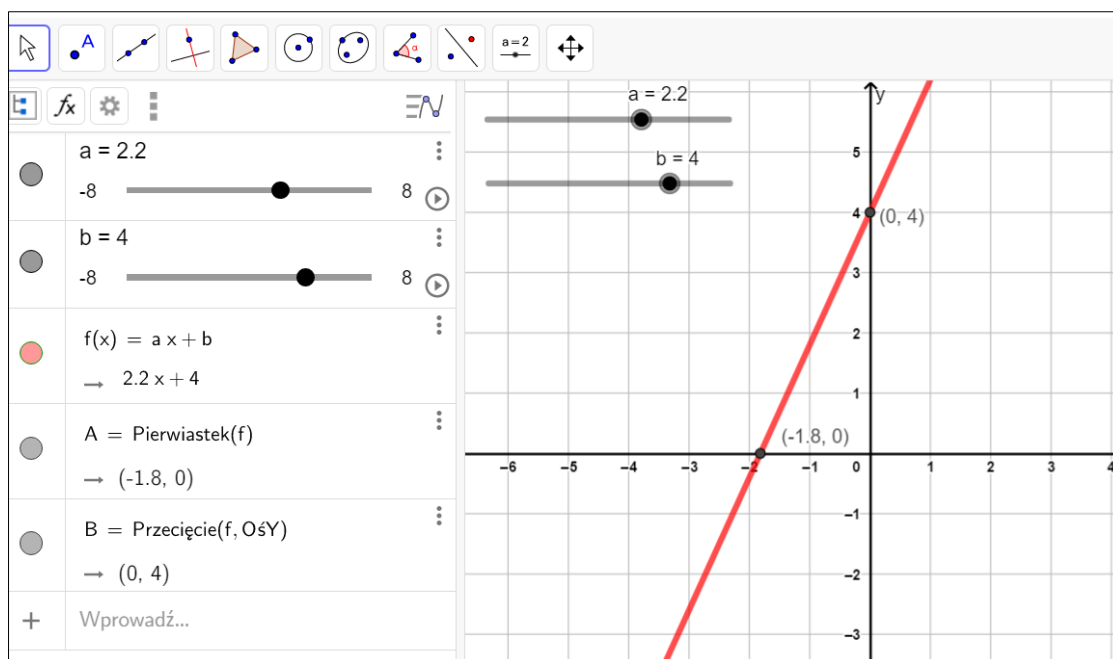
Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwaki a oraz b: zakres od  $-8$  do  $8$ , krok  $0.1$ , szybkość  $0.5$ .
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = ax + b$ . Ustaw grubość linii wykresu na  $10$ , włącz etykietę Nazwa i wartość (klik w Widoku Algebry w  $:$  bądź prawy klawisz myszy na wykresie: Ustawienia → zakładka Podstawowe), a w Ustawieniach w zakładce Zaawansowane, wprowadź kolory dynamiczne: czerwony:  $a > 0$ , zielony:  $a = 0$ , niebieski:  $a < 0$ .
3. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych, np. klik w Widoku Algebry w  $:$  → Ustawienia → Punkty Specjalne i zmień: Ustawienia → Pokaż etykietę: Wartość.

**Uwaga:** Uruchom animację suwaka a, b.







## Zadania

1. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwaku a.
2. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwaku b.



- 3.** Ustal znaki współczynników  $a$ ,  $b$ , by wykres funkcji liniowej przechodził przez:
- I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych,
  - II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
- 4.** Ustal znaki współczynników  $a$ ,  $b$ , by funkcja liniowa:
- miała dokładnie jedno miejsce zerowe,
  - miała dokładnie jedno ujemne miejsce zerowe,
  - miała nieskończenie wiele miejsc zerowych,
  - nie miała miejsc zerowych.
- 5.** Ustal znaki współczynników  $a$ ,  $b$ , by funkcja liniowa przyjmowała wartości nieujemne dla  $x \in R$ .
- 6.** Podaj wzór funkcji liniowej, wiedząc że:
- funkcja jest rosnąca oraz liczba 3 jest jej miejscem zerowym,
  - liczba  $-8$  jest miejscem zerowym tej funkcji i jej wykres przecina oś  $OY$  w punkcie o współrzędnych  $(0, -20)$ ,
  - funkcja przyjmuje wartości ujemne dla  $x < 12$  i punkt  $A(5, -42)$  należy do wykresu tej funkcji.
- 7.** Uzasadnij, że nie istnieje funkcja liniowa, która przyjmuje wartości dodatnie dla  $x < -2$  i jest funkcją rosnącą.



## 4. Funkcja kwadratowa

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra

Włącz: Widok Algebra, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

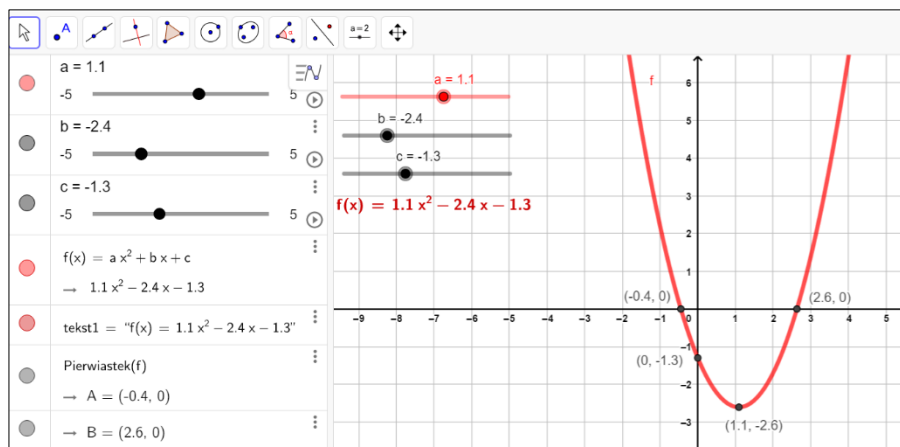
Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

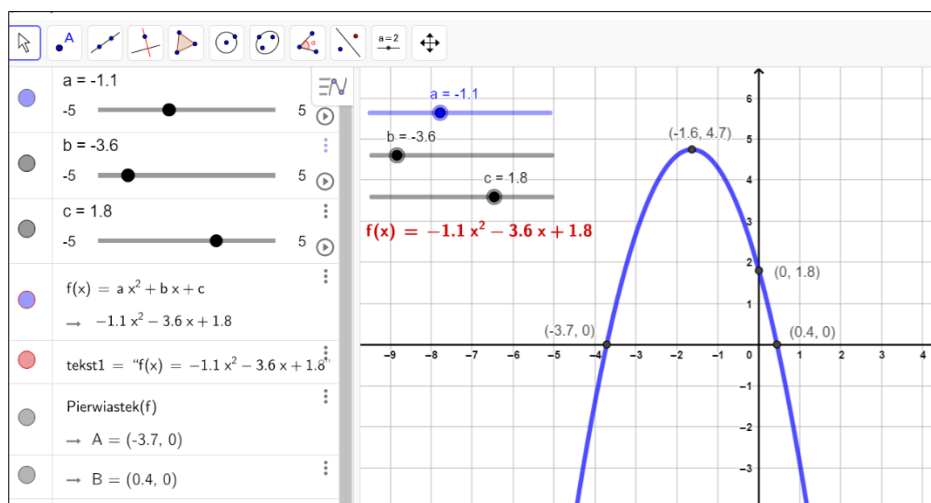
Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

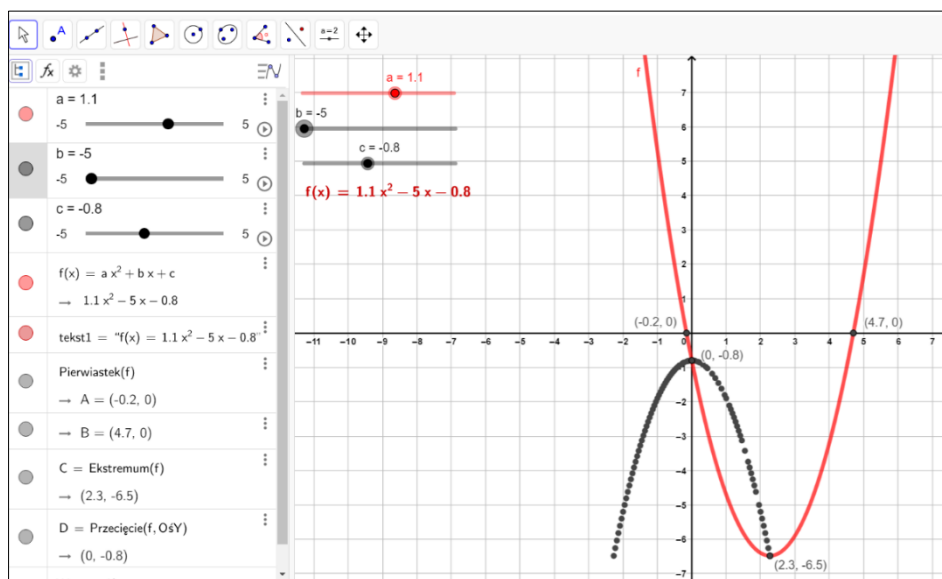
1. Utwórz suwaki a, b oraz c: zakres od -5 do 5, krok 0.1, szybkość 0.5. Włącz etykietę Przypnij do ekranu (prawy klik myszy).
2. W Widoku Algebra wprowadź wzór funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Ustaw grubość linii wykresu na 10, włącz etykietę: Nazwa. Przeciągnij wzór funkcji z Widoku Algebra do Widoku Grafiki. Ustaw go pod suwakami, co ułatwi obserwację zmian wzoru funkcji oraz jej wykresu. Zmień kolor wzoru na czerwony i pogrub go. Włącz etykietę Przypnij do ekranu. W Ustawieniach w zakładce Zaawansowane, wprowadź kolory dynamiczne: czerwony:  $a > 0$ , zielony:  $a = 0$ , niebieski:  $a < 0$ .
3. Wyznacz punkty specjalne paraboli (klik w Widoku Algebra w :), a następnie we właściwościach punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych oraz wierzchołku, zmień: Ustawienia → Pokaż etykietę: Wartość.

**Uwaga:** Uruchom animację suwaka a, b, c (każdego z osobna) i obserwuj zmiany wykresu funkcji oraz wzoru funkcji.





4. Dla wierzchołka paraboli (punkt C) włącz Pokaż ślad. Następnie uruchom suwak b i obserwuj zmiany na wykresie.



## Zadania

1. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwaku a.
2. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwaku b.
3. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwaku c.
4. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwakach a i b.

## Wykorzystaj aplet do rozwiązania poniższych zadań:

1. Podaj przykład wzoru funkcji kwadratowej  $f$ , jeśli:

- a) zbiorem wartości funkcji jest przedział  $(-\infty; 4)$ ,
- b) największa wartość funkcji jest równa  $-1$  dla argumentu  $5$ ,
- c) liczby  $-6$  i  $14$  są miejscami zerowymi tej funkcji,
- d) funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty; 2)$  i malejąca w przedziale  $\langle 2; +\infty)$ .

2. Zmień wartości na suwakach, a następnie odczytaj z wykresu funkcji  $f$ :

- a) przedziały monotoniczności funkcji,
- b) równanie osi symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ ,
- c) wszystkie argumenty, dla których wartości tej funkcji są ujemne,
- d) rozwiązanie nierówności  $f(x) \geq 0$ ,
- e) największą i najmniejszą wartość funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -3; 5)$ ,
- f) liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$ , w zależności od parametru  $m$ , jeśli  $m \in \mathbb{R}$ .

3. Znajdź wzór funkcji kwadratowej  $f$ , wiedząc że:

- a) liczby  $3$  oraz  $-8$  są jej miejscami zerowymi i punkt o współrzędnych  $(0, 5)$  należy do jej wykresu,
- b) prosta o równaniu  $x = 1$  jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ , a liczba  $3$  – miejscem zerowym funkcji  $f$ . Ponadto najmniejsza wartość funkcji wynosi  $-9$ .
- c) punkt o współrzędnych  $(-4, 7)$  jest wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$  oraz punkt  $A(-2, 5)$ .

4. a) Dla jakich wartości parametru  $k$  funkcja  $f$  opisana wzorem  $f(x) = -4x^2 + x + 3k$  przecina oś  $OY$  w punkcie o współrzędnych  $(0, -2)$ ?

b) Funkcja  $f$  jest opisana wzorem  $f(x) = a(x - 5)^2 + 1$ . Dla jakiej wartości  $a$  funkcja  $f$  będzie miała dwa miejsca zerowe?



5. Rozwiąż graficznie następujące układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 + 2x - 8 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 4 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

## 5. Proporcjonalność odwrotna

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra

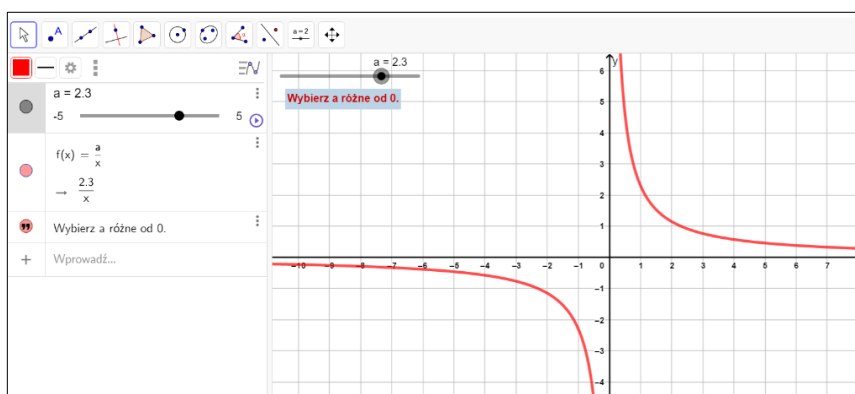
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

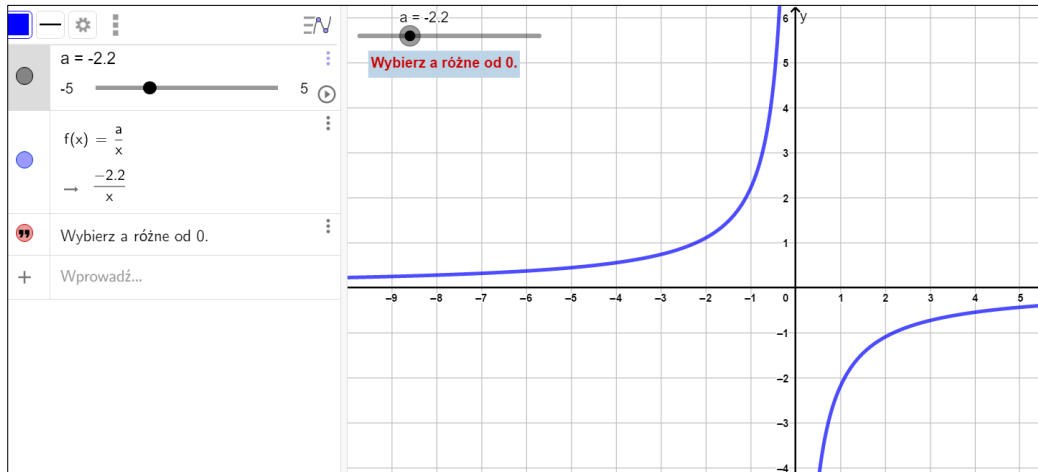
Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwak a: zakres od -5 do 5, krok 0.1, szybkość 0.5. Włącz etykietę Osadź obiekt (prawy klik myszy).
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, włącz etykietę Nazwa i wartość, a w Ustawieniach w zakładce Zaawansowane wpisz Warunek wyświetlania obiektu:  $a < > 0$  (znaczy:  $a \neq 0$ ) oraz wprowadź kolory dynamiczne: czerwony:  $a > 0$ , niebieski:  $a < 0$ .
3. Poniżej suwaka wstaw Tekst: „Wybierz a różne od 0” (ustal kolor tła, czcionki, pogrub czcionkę), włącz etykietę Osadź obiekt.



### Uwaga:

Uruchom animację suwaka a.



## Zadania

1. Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwaku a.
2. Zmień wartość na suwaku. Korzystając z wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ , podaj:
  - a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
  - b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
  - c) przedziały monotoniczności funkcji,
  - d) rozwiązanie równania  $\frac{a}{x} = -2,5$ ,
  - e) rozwiązanie nierówności  $\frac{a}{x} \geq 3,2$ .
3. Punkt  $A(3, -4)$  należy do hiperboli, która jest wykresem funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Wyznacz współczynnik a.

## 6. Funkcja homograficzna

### Instrukcja:

Uruchom program GeoGebra

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

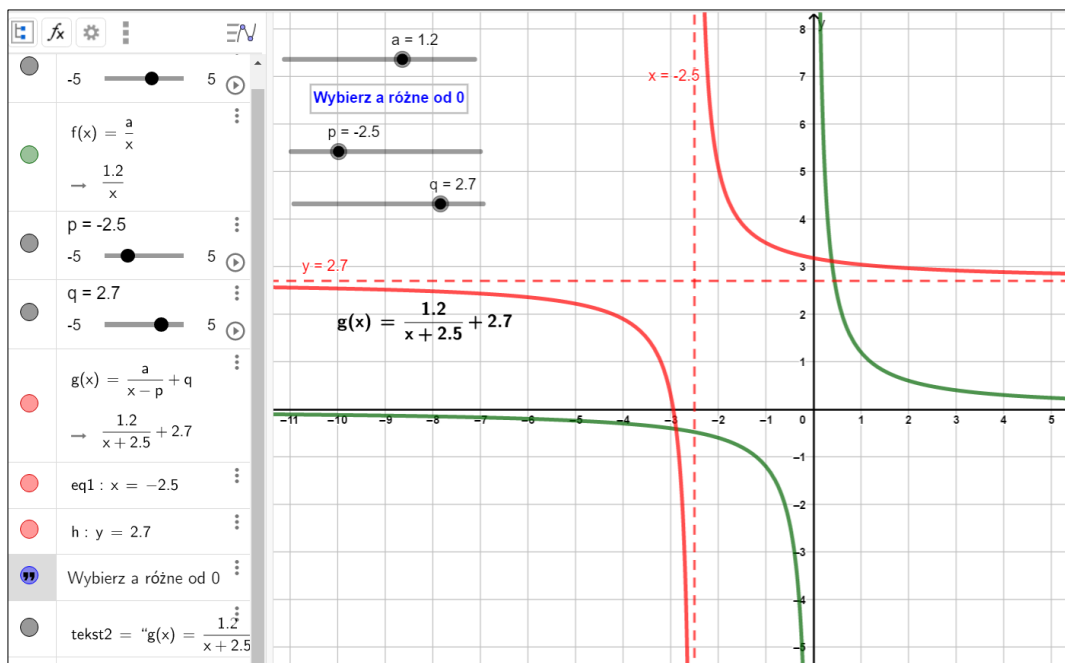
Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Zaokrąglenia: 1 miejsca po przecinku

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwak a: zakres od -5 do 5, krok 0.1, szybkość 0.5. Włącz etykietę Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor zielony, a w Ustawieniach w zakładce Zaawansowane wpisz Warunek wyświetlania obiektu:  $a > 0$  (znaczy:  $a \neq 0$ ).
3. Utwórz suwaki p, q: zakres od -5 do 5, krok 0.1, szybkość 0.5. Włącz etykietę Osadź Obiekt.
4. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8 oraz wprowadź kolory dynamiczne: czerwony:  $a > 0$ , niebieski:  $a < 0$ .
5. Wstaw równania prostych:  $x = p$ ,  $y = q$ . Ustaw czerwony kolor linii, styl - linia przerywana oraz ustaw Etykietę Wartość.
6. Poniżej suwaka a wstaw Tekst: „Wybierz a różne od 0” (ustal kolor czcionki i ją pogrub). Włącz etykietę Osadź Obiekt.
7. Przeciągnij wzór funkcji g z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Pogrub czcionkę.





## Zadania

- Wyciągnij wnioski z obserwacji zmian wartości na suwakach:  $a$ ,  $p$ ,  $q$ .
- Zmień wartości na suwakach. Korzystając z wykresu funkcji  $g(x) = \frac{a}{x-p} + q$ , podaj:
  - dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
  - przedziały monotoniczności funkcji,
  - współrzędne wspólnego punktu hiperboli i osi  $y$ .
- Dana jest funkcja  $g$  opisana wzorem  $g(x) = \frac{3}{x-3} - 2$ , gdzie  $x \neq 3$ .
  - Podaj: dziedzinę i zbiór wartości funkcji, równania asymptot wykresu funkcji.
  - Oblicz współrzędne punktów, w których wykres funkcji  $g$  przecina osie układu współrzędnych.



# GeoGebra

## Math Calculators

# Skrypt 7.

Ilustracje przekształceń wykresów funkcji

- Translacje wykresów funkcji o wektor
- Przekształcenia symetryczne wykresów funkcji
- Zadania

## Ilustracje przekształceń wykresów funkcji. Zadania

### I. Translacja wykresu funkcji $f$ o wektor

#### 1. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji (łamana) o wektor

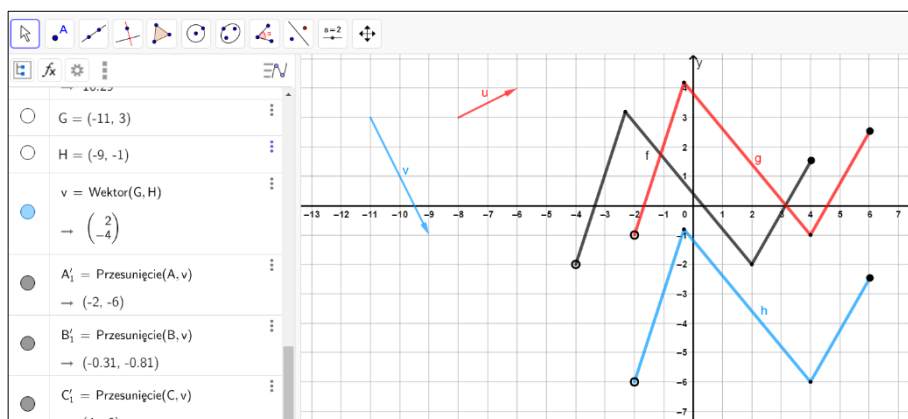
##### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Wstaw łamaną ABCD i ustaw jej grubość na 8. Ukryj etykiety wszystkich punktów i zmień ich kolor na czarny. Zmień wielkość punktów B, C na 2 oraz styl (w razie potrzeby) punktów A, D.
2. Wstaw tekst: "To nie jest wykres funkcji" (enter), a następnie w Ustawieniach w zakładce Zaawansowane wpisz Warunek wyświetlania obiektu:  $\neg(x(A) < x(B) < x(C) < x(D))$   
Zmień kolor tekstu na czerwony, można go pogrubić.
3. Ustaw łamaną tak, by była wykresem funkcji ( $f$ ).
4. Przesuń wykres funkcji  $f$  o wektor  $\overrightarrow{EF} = [2; 1]$ . Otrzymamy wykres funkcji  $f'$ . Zmień jego nazwę na  $g$  oraz kolor wykresu na czerwony. Ukryj punkty E, F (prawy przycisk myszy i odznacz Pokaż obiekt) i wyświetl nazwę wektora ( $u$ ). Zmień kolor wektora na czerwony.
5. Przesuń wykres funkcji  $f$  o wektor  $\overrightarrow{GH} = [2; -4]$ . Otrzymamy wykres funkcji  $f_1'$ . Zmień jego nazwę na  $h$  oraz kolor wykresu na niebieski. Ukryj punkty G, H (prawy przycisk myszy i odznacz Pokaż obiekt) i wyświetl nazwę wektora ( $v$ ). Zmień kolor wektora na niebieski.





## Zadania

1. Podaj dziedziny funkcji:  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . Co zauważyłeś?
2. Podaj zbiory wartości funkcji:  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . Co zauważyłeś?
3. Wykres funkcji  $g$  otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Podaj współrzędne wektora  $\vec{u}$ , jeśli:
  - a)  $g(x) = f(x - 5)$
  - b)  $g(x) = f(x) + 8$
  - c)  $g(x) = f(x + 3) - 1$
  - d)  $g(x) = f(x - 6) - 6$
  - e)  $g(x) = f(x + 12) + 2021$
  - f)  $g(x) = f(x - 23)$
4. Przedział liczbowy  $\langle -20; -3 \rangle$  jest dziedziną funkcji  $f$ , a przedział  $\langle -4; 11 \rangle$  jest jej zbiorem wartości. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ , jeśli:
  - a)  $g(x) = f(x - 7) - 2$
  - b)  $g(x) = f(x + 12)$
  - c)  $g(x) = f(x) + 10$
5. Funkcja  $f$  maleje w przedziale  $\langle 2; 6 \rangle$ . Podaj przedział, w którym funkcja  $g$  jest malejąca, jeśli:
  - a)  $g(x) = f(x) - 12$
  - b)  $g(x) = f(x + 4) + 24$
  - c)  $g(x) = f(x - 9)$
6. Miejscem zerowym funkcji  $f$  jest tylko liczba  $-1$ . Podaj miejsce zerowe funkcji  $g$ , jeśli:
  - a)  $g(x) = f(x + 13)$
  - b)  $g(x) = f(x - 5)$

## 2. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji liniowej o wektor

### Instrukcja:

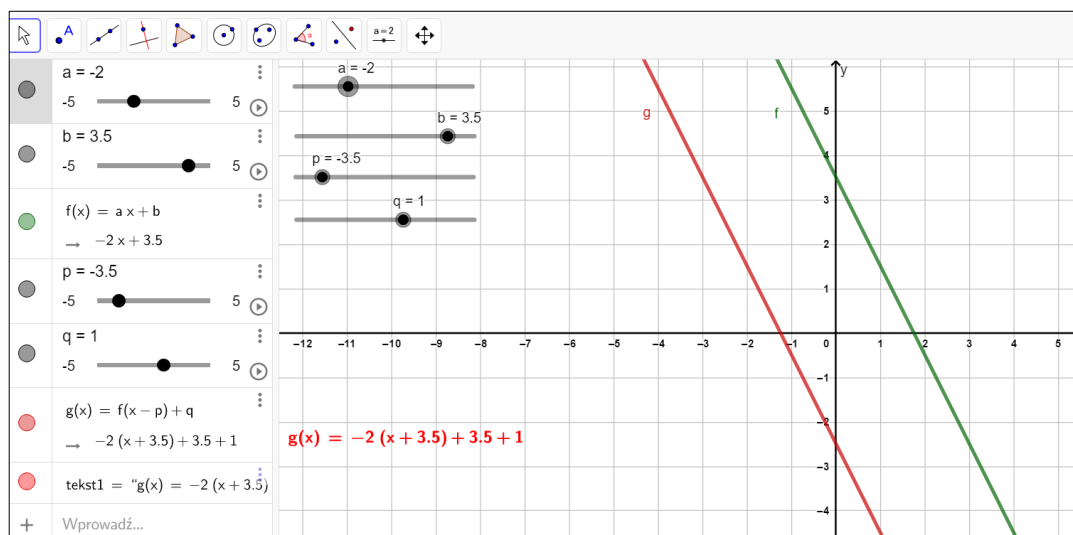
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwaki  $a$  oraz  $b$ : zakres od  $-5$  do  $5$ , krok  $0.1$ . We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = ax + b$ . Ustaw grubość linii wykresu na  $8$ , włącz etykietę Nazwa.
3. Utwórz suwaki  $p$  oraz  $q$ : zakres od  $-5$  do  $5$ , krok  $0.1$ . We własnościach odznacz Osadź Obiekt.

4. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = f(x - p) + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor czerwony.
5. Przeciągnij wzór funkcji  $g$  z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, pogrub czcionkę, zmień kolor na czerwony.



## Zadanie

Podaj wzór funkcji liniowej  $f$  oraz współrzędne wektora  $\vec{u}$ , a następnie napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres powstał z przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Zmień wartości na suwakach i sprawdź, czy otrzymałeś poprawny wzór funkcji  $g$ .

## 3. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji kwadratowej o wektor

a)

### Instrukcja:

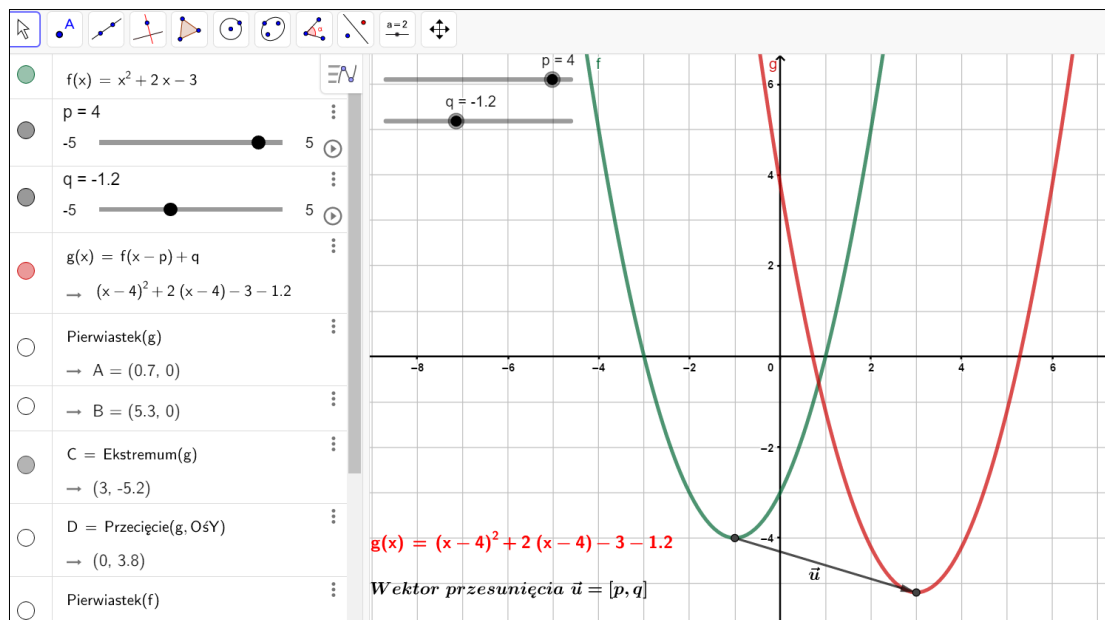
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. W Widoku Algebry utwórz funkcję  $f$  opisaną wzorem  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . Ustaw kolor linii wykresu na zielony, grubość na 8, włącz etykietę Nazwa.

2. Utwórz suwaki  $p$  oraz  $q$ : zakres od  $-5$  do  $5$ , krok  $0.1$ . We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
3. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = f(x - p) + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na  $8$ , kolor czerwony, włącz etykietę Nazwa.
4. Dla funkcji  $g$  kliknij Punkty Specjalne. Schowaj punkty (wystarczy kliknąć w kółko w Widoku Algebry, w pierwszej kolumnie): A, B (pierwiastki), D (przecięcie wykresu funkcji  $g$  z osią  $OY$ ). Ustal styl punktu C na  $4$  i odznacz Pokaż etykietę.
5. Dla funkcji  $f$  kliknij Punkty Specjalne. Schowaj punkty: E, F (pierwiastki), H (przecięcie wykresu funkcji  $f$  z osią  $OY$ ). Ustal styl punktu G na  $4$  i odznacz Pokaż etykietę.
6. Utwórz wektor  $\vec{GC} = \vec{u}$ . Ustaw jego grubość na  $5$ , kolor czarny.
7. Wstaw Tekst:  $\vec{u}$  i umieść go pod wektorem (korzystamy z formuły LaTeX). Ustaw tekst na Mały, styl czcionki na pogrubioną, kolor czarny.
8. Przeciągnij wzór funkcji  $g$  z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, pogrub czcionkę i zmień jej kolor na czerwony.
9. Wstaw (poniżej wzoru funkcji  $g$ ) Tekst: "Wektor przesunięcia  $\vec{u} = [p, q]$ ", korzystając z formuły LaTeX. Ustaw tekst na Mały, styl czcionki na pogrubioną, kolor czarny.





b)

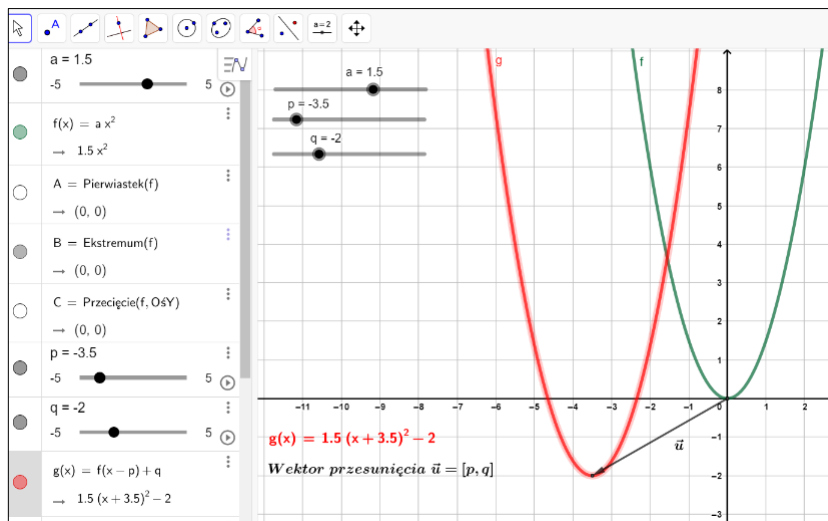
Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwak a: zakres od  $-5$  do  $5$ , krok  $0.1$ . We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = ax^2$ . Ustaw grubość linii wykresu na  $8$ , kolor zielony, włącz etykietę Nazwa.
3. Dla funkcji  $f$  kliknij Punkty Specjalne. Schowaj punkty: A (pierwiastek), C (przecięcie wykresu funkcji  $f$  z osią  $OY$ ). Ustal styl punktu B na  $4$  i odznacz Pokaż etykietę.
4. Utwórz suwaki  $p$  oraz  $q$ : zakres od  $-5$  do  $5$ , krok  $0.1$ . Umieść je poniżej suwaka  $a$ . We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
5. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = f(x - p) + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na  $8$ , kolor czerwony.
6. Dla funkcji  $g$  kliknij Punkty Specjalne. Schowaj punkty D, E (pierwiastki), G (przecięcie wykresu funkcji  $g$  z osią  $OY$ ). Ustal styl punktu F na  $4$  i odznacz Pokaż etykietę.
7. Utwórz wektor  $\overrightarrow{BF} = \vec{u}$ . Ustaw jego grubość na  $5$ , kolor czarny.
8. Przeciągnij wzór funkcji  $g$  z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, ustaw Tekst na Mały, pogrub czcionkę, zmień kolor na czerwony.
9. Wstaw (poniżej wzoru funkcji  $g$ ) Tekst: „Wektor przesunięcia  $\vec{u} = [p, q]$ ”. Ustaw tekst na Mały, styl czcionki na pogrubioną, kolor czarny.
10. Wstaw Tekst:  $\vec{u}$  i umieść go pod wektorem. Ustaw tekst na Mały, styl czcionki na pogrubioną, kolor czarny.



c)

Instrukcja:

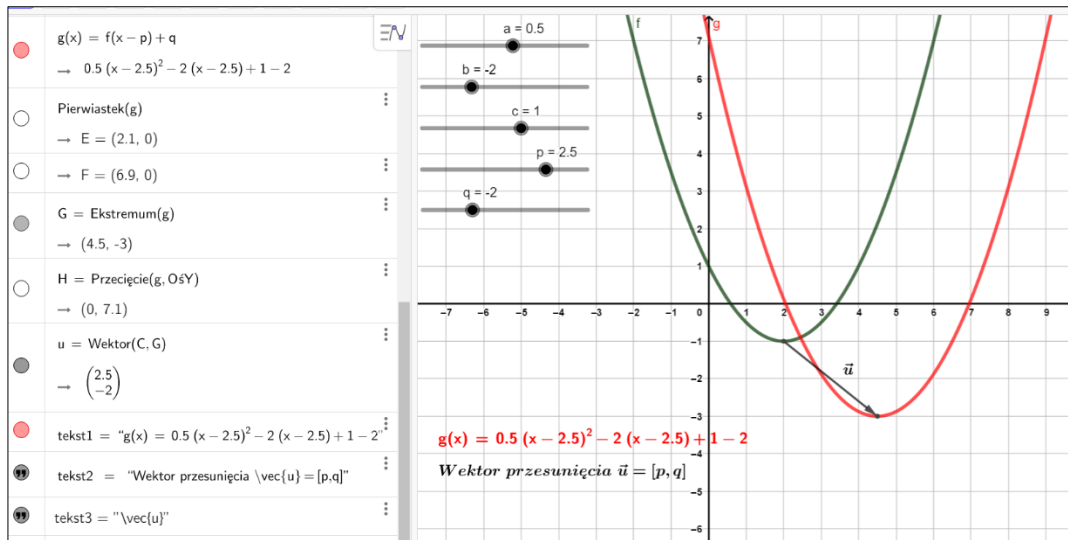
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwaki a, b, c: zakres od -5 do 5, krok 0.1. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor zielony, włącz etykietę Nazwa. Kliknij Punkty Specjalne. Schowaj punkty: A, B (pierwiastki), D (przecięcie wykresu funkcji f z osią OY). Ustal styl punktu C na 4 i odznacz Pokaż etykietę.
4. Utwórz suwaki p oraz q: zakres od -5 do 5, krok 0.1. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
5. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = f(x - p) + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor czerwony. Kliknij Punkty Specjalne. Schowaj punkty: E, F (pierwiastki), H (przecięcie wykresu funkcji f z osią OY). Ustal styl punktu G na 4 i odznacz Pokaż etykietę.
6. Utwórz wektor  $\vec{CG} = \vec{u}$ . Ustaw jego grubość na 5, kolor czarny.
7. Przeciągnij wzór funkcji g z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, pogrub czcionkę, zmień kolor na czerwony.
8. Wstaw (poniżej wzoru funkcji g) Tekst: „Wektor przesunięcia  $\vec{u} = [p, q]$ ”. Ustaw tekst na Mały, styl czcionki na pogrubioną, kolor czarny.





## Zadania

1. Podaj wzór funkcji kwadratowej  $f$  oraz współrzędne wektora  $\vec{u}$ , a następnie napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres powstał z przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Zmień wartości na suwakach i sprawdź, czy otrzymałeś poprawny wzór funkcji  $g$ .

2. Wykres funkcji  $g$  otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji  $f(x) = -2x^2$  o wektor  $\vec{u} = [p; q]$ . Podaj współrzędne wektora  $\vec{u}$ , jeśli:

a)  $f(x) = -2(x + 4)^2 - 2$

c)  $f(x) = -2(x - 2,5)^2$

b)  $f(x) = -2(x + 11)^2 - 11$

d)  $f(x) = -\frac{3(x-5)^2}{4} + 4$

3. Parabola o wierzchołku  $W$  powstała przez przesunięcie równoległe wykresu funkcji  $f(x) = 2x^2$ . Napisz wzór funkcji  $g$ , której wykresem jest ta parabola, jeśli:

a)  $W(-5, 9)$

b)  $W(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

c)  $W(-8, 0)$



#### 4. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$ o wektor

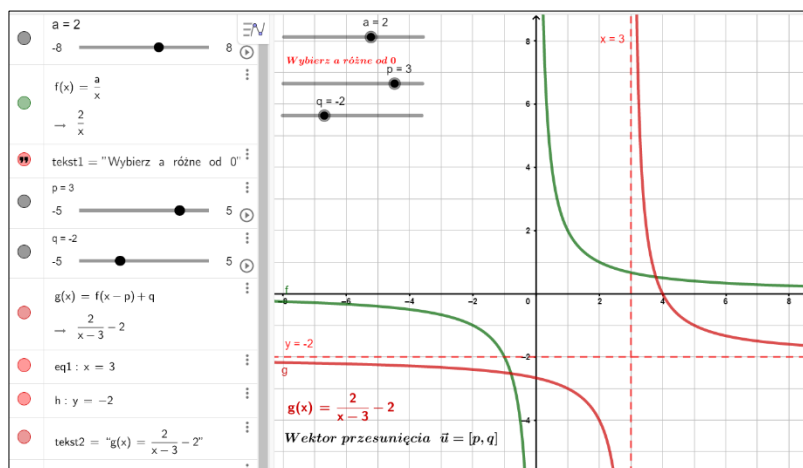
##### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwak a: zakres od -8 do 8, krok 0.1. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, włącz etykietę Nazwa, a w Ustawieniach w zakładce Zaawansowane wpisz Warunek wyświetlania obiektu:  $a < > 0$  (znaczy:  $a \neq 0$ ). Poniżej suwaka wstaw Tekst: „Wybierz a różne od 0” (ustaw tekst na Bardzo mały, kolor czcionki, pogrub czcionkę), włącz etykietę Osadź obiekt.
3. Utwórz suwaki p oraz q: zakres od -5 do 5, krok 0.1. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
4. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = f(x - p) + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor czerwony.
5. W Widoku Algebry wprowadź równania prostych:  $x = p$ ,  $y = q$ . Ustaw grubość linii na 5, kolor czerwony, styl prostej – przerywany.
6. Przeciągnij wzór funkcji g z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, pogrub czcionkę, zmień kolor na czerwony.
7. Wstaw (poniżej wzoru funkcji g) Tekst: „Wektor przesunięcia  $\vec{u} = [p, q]$ ”. Ustaw tekst na Bardzo mały, pogrub czcionkę, kolor czarny.





## Zadania

1. Podaj wzór funkcji opisanej wzorem  $f(x) = \frac{a}{x}$  oraz współrzędne wektora  $\vec{u}$ , a następnie napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres powstał z przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Zmień wartości na suwakach i sprawdź, czy otrzymałeś poprawny wzór funkcji  $g$ .

2. Wykres funkcji  $f$  opisanej wzorem  $f(x) = \frac{-5}{x}$  przesunięto równoległe o wektor  $\vec{u}$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Podaj współrzędne wektora  $\vec{u}$ , jeśli:

a)  $g(x) = \frac{-5}{x-5} - 5$       b)  $g(x) = \frac{-5}{x+6}$       c)  $g(x) = \frac{-5}{x-1} - 8$       d)  $g(x) = \frac{-5}{x} + 6$

3. Wykres funkcji  $f$  opisanej wzorem  $f(x) = \frac{3}{x}$  przesunięto równoległe o wektor  $\vec{u} = [-2; -1]$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ .

a) Napisz wzór funkcji  $g$ .

b) Podaj dziedzinę, zbiór wartości, równania asymptot oraz przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .

c) Wyznacz wszystkie punkty o współrzędnych całkowitych, które należą do wykresu funkcji  $g$ .

## 5. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji wykładniczej o wektor

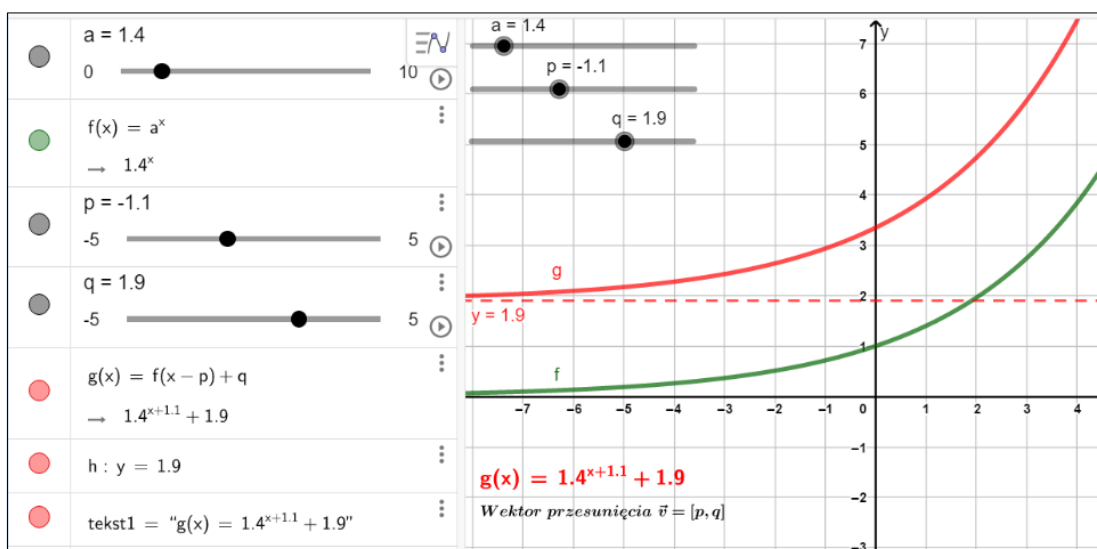
### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwak  $a$ : zakres od 0 do 10, krok 0.1. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = a^x$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor zielony, włącz etykietę Nazwa.
3. Utwórz suwaki  $p$  oraz  $q$ : zakres od  $-5$  do  $5$ , krok 0.1. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
4. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = f(x - p) + q$ . Ustaw grubość linii wykresu na 8, kolor czerwony i włącz etykietę Nazwa.
5. Wprowadź równanie prostej  $y = q$ . Ustaw grubość linii na 5, kolor czerwony, styl – linia przerywana i włącz etykietę Nazwa.
6. Przeciągnij wzór funkcji  $g$  z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, pogrub czcionkę, zmień kolor na czerwony.
7. Wstaw (poniżej wzoru funkcji  $g$ ) Tekst: „Wektor przesunięcia  $\vec{v} = [p; q]$ ”. Ustaw tekst na Bardzo mały, styl czcionki na pogrubioną, kolor czarny.





## Zadania

1. Podaj wzór funkcji wykładniczej  $f$  oraz współrzędne wektora  $\vec{u}$ , a następnie napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres powstał z przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Zmień wartości na suwakach i sprawdź, czy otrzymałeś poprawny wzór funkcji  $g$ .

2. Naszkicuj wykres funkcji opisanej wzorem  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$ , a następnie odczytaj z wykresu:

a) zbiór wartości funkcji  $g$ , jej miejsce zerowe, równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji  $g$ .

b) rozwiązania nierówności:  $g(x) \leq -1$  oraz  $g(x) > 0$ .



## II. Przekształcenia symetryczne wykresów funkcji

a)

### Instrukcja:

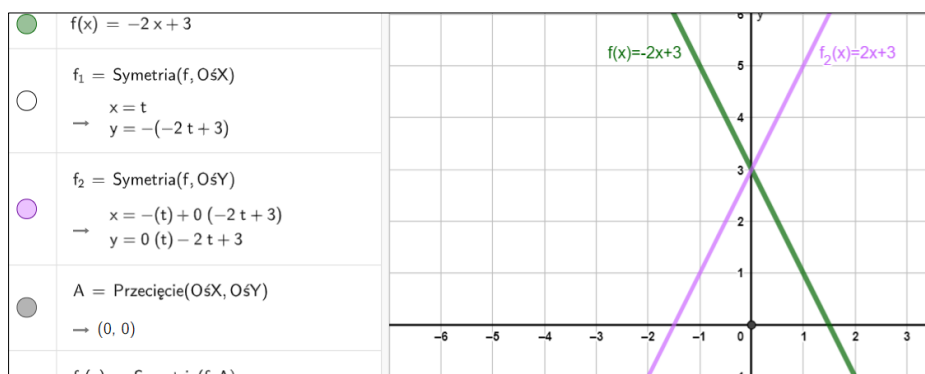
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16

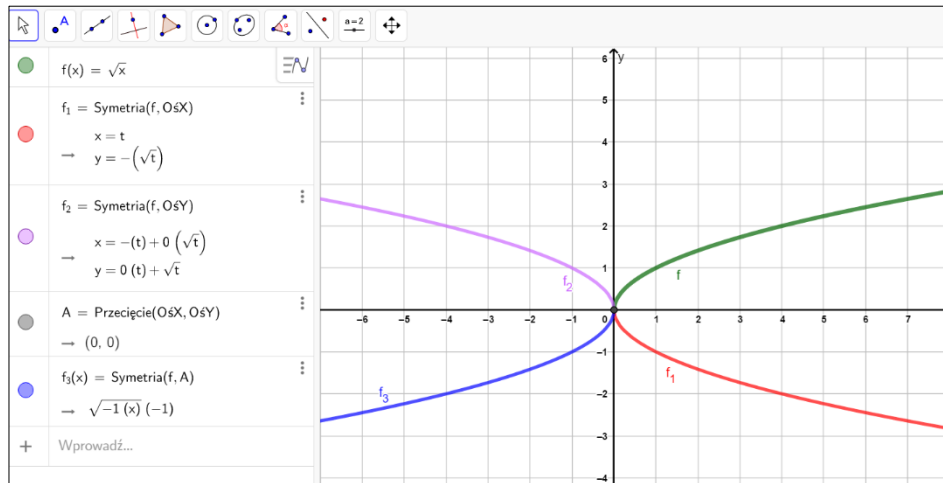
Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = -2x + 3$ . Ustaw kolor linii wykresu na zielony, grubość na 10. W ustawieniach w zakładce Podstawowe, Opis wpisz  $f(x) = -2x + 3$  i zaznacz Pokaż etykietę: Opis.
2. Wybierz narzędzie Symetria osiowa: należy kliknąć w wykres funkcji  $f$ , a następnie – w oś OX. Ustaw kolor linii wykresu na czerwony, grubość na 8. W ustawieniach w zakładce Podstawowe, Opis wpisz  $f_{\{1\}}(x) = 2x - 3$  i zaznacz Pokaż etykietę: Opis.
3. Wybierz narzędzie Symetria osiowa: należy kliknąć w wykres funkcji  $f$ , a następnie – w oś OY. Ustaw kolor linii wykresu na fioletowy, grubość na 8. W ustawieniach w zakładce Podstawowe, Opis wpisz  $f_{\{2\}}(x) = 2x + 3$  i zaznacz Pokaż etykietę: Opis.
4. Wyznacz punkt przecięcia osi układu współrzędnych i ukryj jego etykietę.
5. Wybierz narzędzie Symetria środkowa: należy kliknąć w wykres funkcji  $f$ , a następnie – w punkt przecięcia osi OX i OY. Ustaw kolor linii wykresu na niebieski, grubość na 8. W ustawieniach w zakładce Podstawowe, Opis wpisz  $f_{\{3\}}(x) = -2x - 3$  i zaznacz Pokaż etykietę: Opis.

**Uwaga!** Widok Grafiki będzie bardziej przejrzysty, jeśli ukryjemy dwie funkcje spośród funkcji  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , klikając w Widoku Grafiki w kolorowe kółka.



**Uwaga:** W Widoku Algebry można wprowadzić inny wzór funkcji  $f$ . Wówczas zobaczymy wykres funkcji  $f$  i zmienione pozostałe wykresy. Wykresy te można pokazywać bądź ukrywać (spójrz poniżej).



**b)**

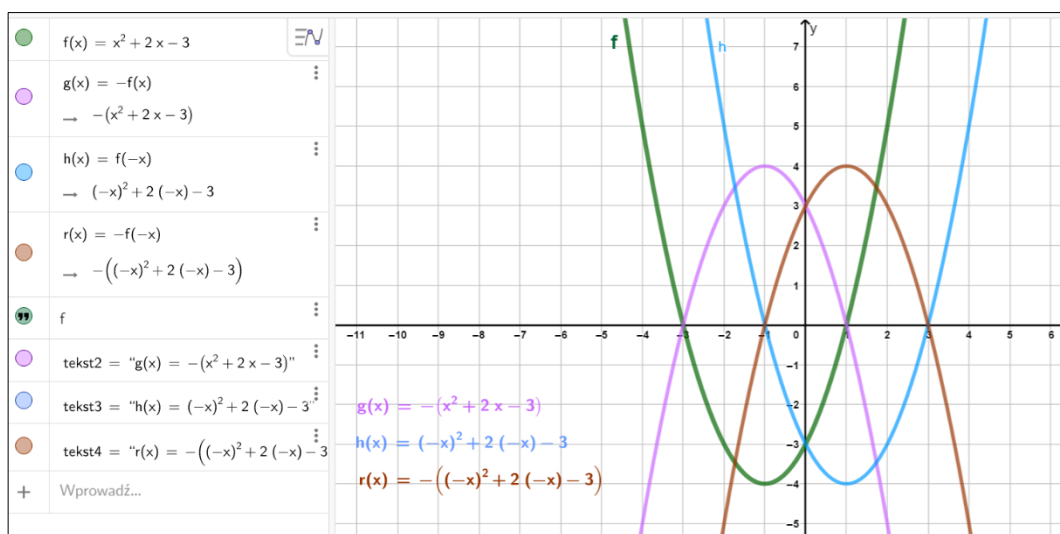
Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

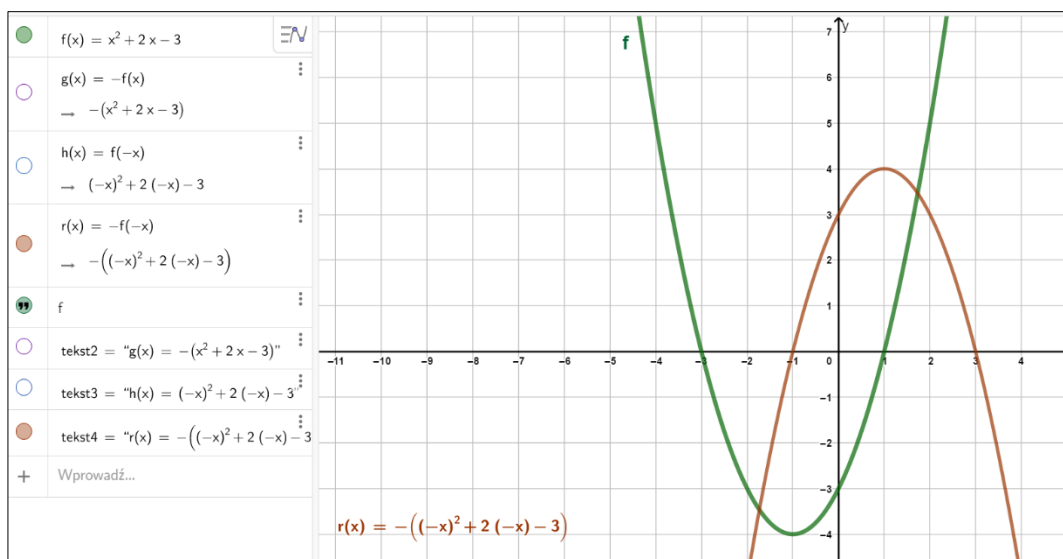
Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . Ustaw kolor linii wykresu na zielony, grubość na 10.
2. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = -f(x)$ . Ustaw kolor linii wykresu na fioletowy, grubość na 8 i włącz etykietę Nazwa.
3. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $h(x) = f(-x)$ . Ustaw kolor linii wykresu na niebieski, grubość na 8 i włącz etykietę Nazwa.
4. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $r(x) = -f(-x)$ . Ustaw kolor linii wykresu na brązowy, grubość na 8 i włącz etykietę Nazwa.
5. Wstaw Tekst " f ". Ustaw Tekst na Średnia, kolor zielony, styl czcionki na pogrubioną.
6. Przeciągnij wzory funkcji g, h, r z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Odznacz Osadź Obiekt, pogrub czcionkę, zmień kolor odpowiednio na fioletowy, niebieski, brązowy.



Ukryjemy dwie funkcje i ich wzory spośród funkcji g, h, r, klikając w Widoku Grafiki w kółka w tym samym kolorze co wykresy.

Po uwzględnieniu uwagi:









### III. Wykres funkcji $y = |f(x)|$

#### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. W Widoku Algebry Utwórz listę funkcji:

$$lista1 = \left\{ -2x + 1, x^2 - 4, -x^2 + 1, -x^3 - 3, -\sqrt{x} + 2, -2^{x+3}, \log_{\frac{1}{2}} x \right\}.$$

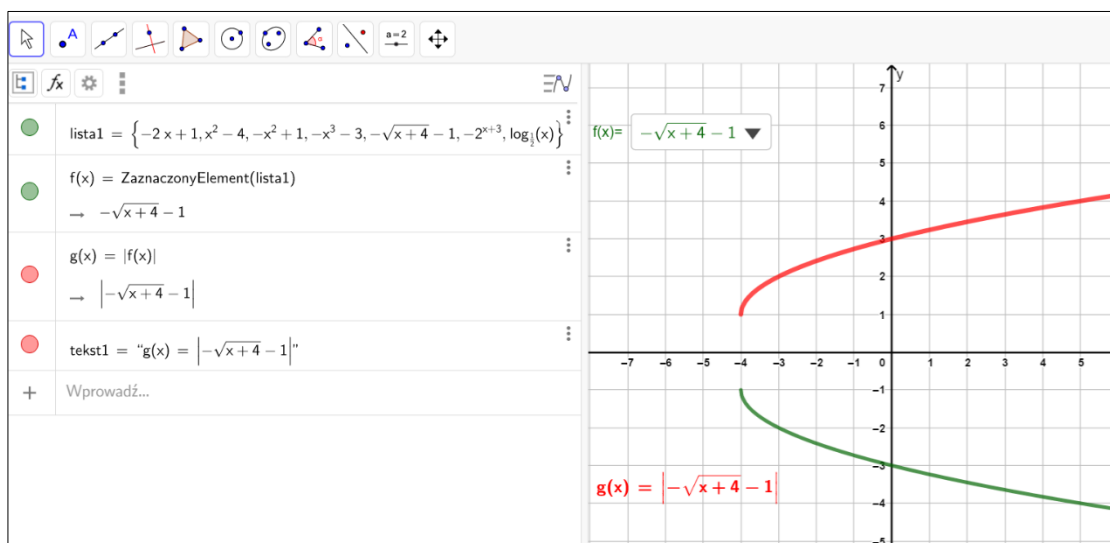
2. We właściwościach obiektu lista1 w Opisie wpisz:  $f(x) =$  oraz wybierz: Wyświetl jako lista rozwijalna.

3. W Widoku Algebry wpisz polecenie:  $f(x) = \text{ZaznaczonyElement}(lista1)$ .

4. Ustaw grubość linii wykresu funkcji  $f$  na 8, kolor zielony.

5. W Widoku Algebry wprowadź wzór funkcji  $g(x) = \text{abs}(f(x))$ . Ustaw grubość linii wykresu funkcji  $g$  na 10, kolor czerwony.

6. Przeciągnij wzór funkcji  $g$  z Widoku Algebry do Widoku Grafiki. Ustaw styl czcionki na Mały, pogrubiony. Odznacz Osadź Obiekt.





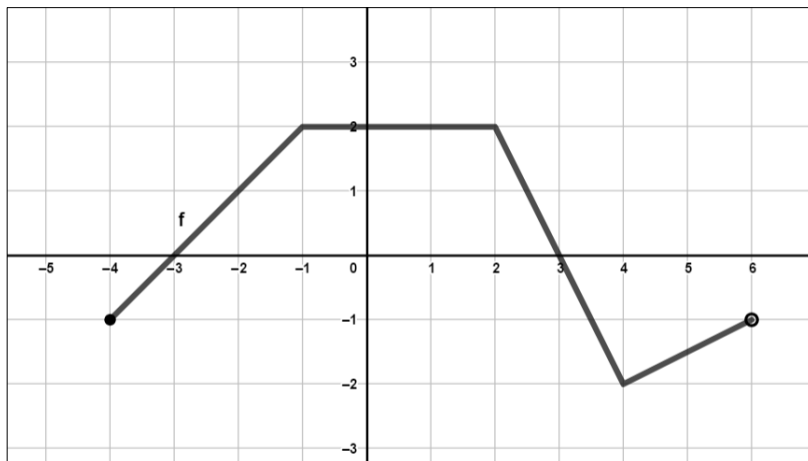
## Zadanie

1. Podaj własności funkcji  $f$  (wybranej z listy rozwijalnej) oraz funkcji  $g$ : dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność. Wzory funkcji można zmieniać.

2. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji  $f$ .

a) Naszkicuj wykres funkcji  $g$ , jeśli  $g(x) = -f(x + 3) - 1$ . Opisz kolejne przekształcenia, które należy wykonać, by otrzymać wykres funkcji  $g$ .

b) Podaj własności funkcji  $g$ : dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały monotoniczności funkcji, współrzędne punktów, w których wykres przecina osie układu, zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



3. Dana jest funkcja  $f$  opisana wzorem  $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$  dla  $x \in \langle -4; 2 \rangle$ . Opisz kolejne przekształcenia, które należy wykonać, by otrzymać wykres funkcji  $g$  i naszkicuj jej wykres, jeśli:

a)  $g(x) = -f(x + 1)$                       b)  $g(x) = -|f(x - 2) + 3| + 4$       c)  $g(x) = f(-x + 1) - 3$

4. Podaj kolejne przekształcenia, które należy wykonać, by z wykresu funkcji  $f$  otrzymać wykres funkcji  $g$ , jeśli:

a)  $g(x) = -f(-x) + 2$                       b)  $g(x) = f(-x) - 3$                       c)  $g(x) = -f(-x - 2) + 1$

d)  $g(x) = |f(-x) - 2|$                       e)  $g(x) = |f(x - 3) - 1| + 2$                       f)  $g(x) = -|f(x + 3) + 1|$



GeoGebra

**Math Calculators**

# Skrypt 8.

- Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi
- Zadania



## I. Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Zadania

### 1. Układ oznaczony

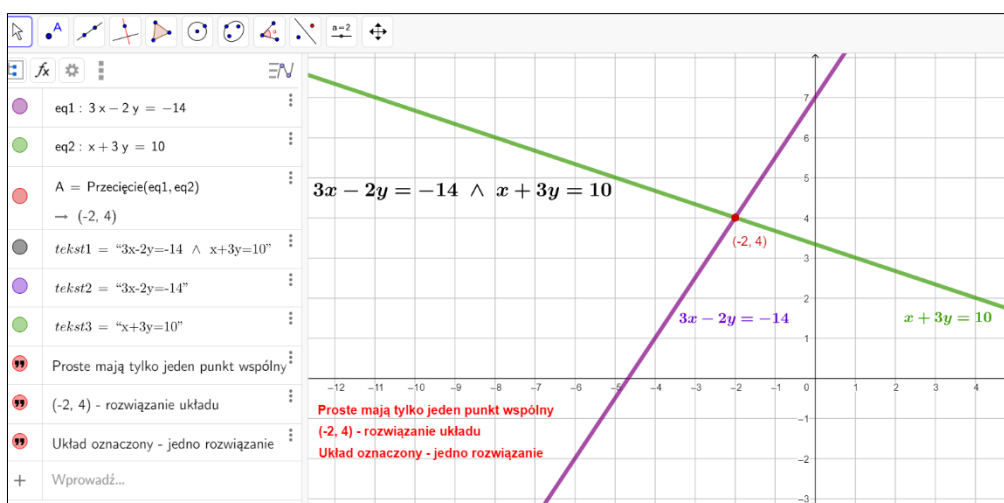
#### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

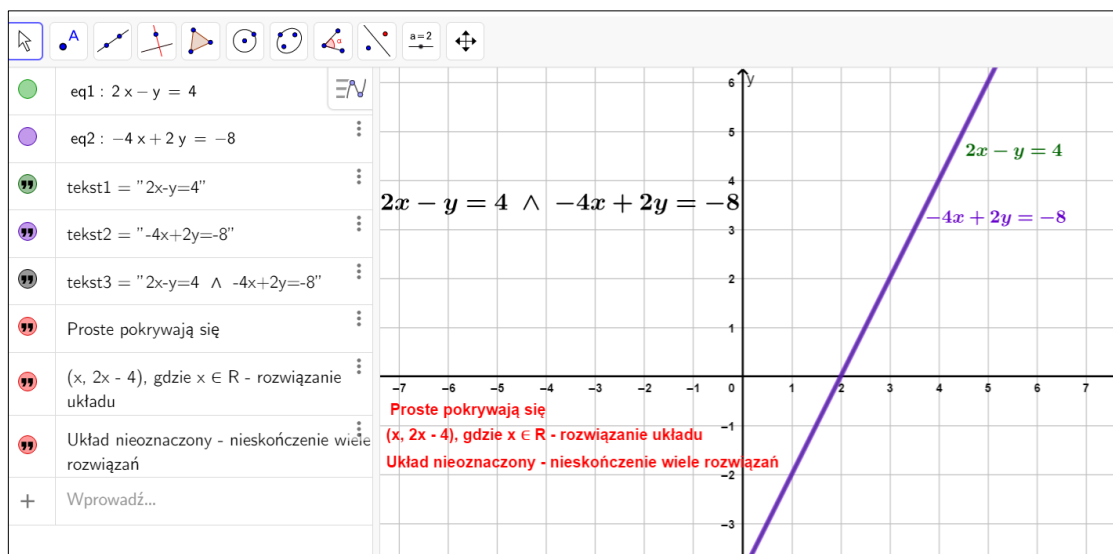
1. W Widoku Algebry wstaw równanie  $3x - 2y = -14$ , a następnie  $x + 3y = 10$ . Ustaw grubość linii wykresu na 10, kolor fiolet (wykres pierwszy) i zielony (wykres drugi).
2. Wyznacz punkt przecięcia prostych (grubość 5, kolor czerwony) i Pokaż etykietę: Wartość.
3. W Widoku Grafiki wprowadź tekst " $3x - 2y = -14 \wedge x + 3y = 10$ " (Tekst: Średnia, czcionka pogrubiona, włączona formuła LaTeX). Włącz etykietę Osadź Obiekt.
4. W Widoku Grafiki wstaw teksty: " $3x - 2y = -14$ " (kolor fiolet) oraz " $x + 3y = 10$ " (kolor jasnozielony). Tekst: Mały, czcionka pogrubiona, włączona formuła LaTeX. Włącz etykietę Osadź Obiekt.
5. W Widoku Grafiki wstaw teksty: "Proste mają tylko jeden punkt wspólny", " $(-2, 4)$  – rozwiązanie układu", "Układ oznaczony – jedno rozwiązanie (czcionka pogrubiona, kolor czerwony). Włącz etykietę Osadź Obiekt.





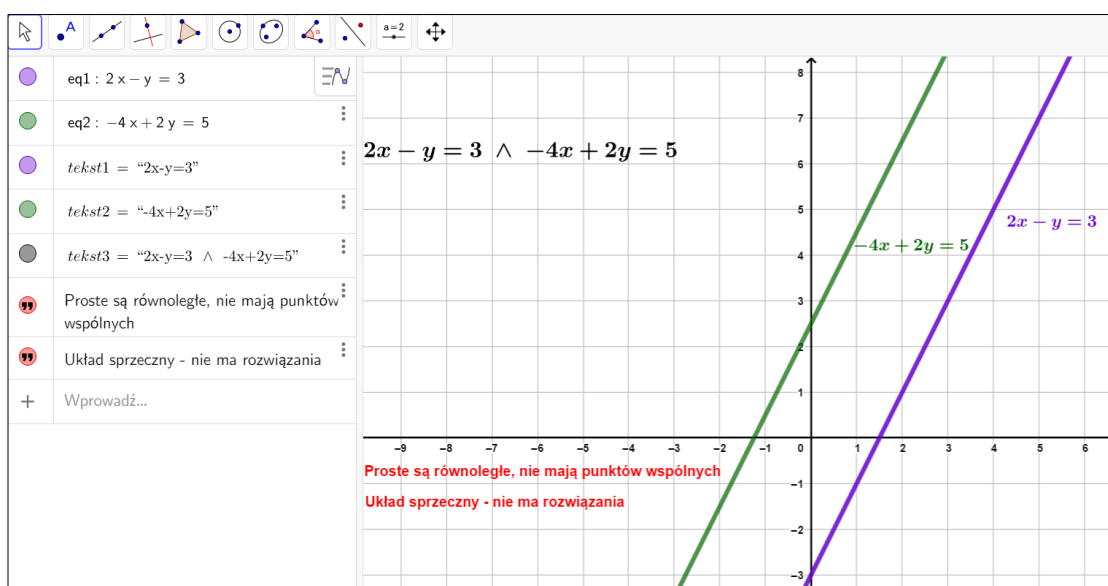
## 2. Układ nieoznaczony

Postępujemy analogicznie jak w punkcie 1. oraz wykorzystujemy informacje zapisane w Widoku Algebra (rysunek poniżej).



## 3. Układ sprzeczny

Postępujemy analogicznie jak w punkcie 1. oraz wykorzystujemy informacje zapisane w Widoku Algebra (rysunek poniżej).





### Przykład 1.

Rozwiąż graficznie układ równań 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = \frac{23}{12} \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = -\frac{37}{6} \end{cases}$$

- Przekształcamy układ równań do postaci: 
$$\begin{cases} 4x + 3y = 23 \\ 4x - 9y = -37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3} \\ y = \frac{4}{9}x + \frac{37}{9} \end{cases}$$

- Rysujemy prostą o równaniu  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}$ .

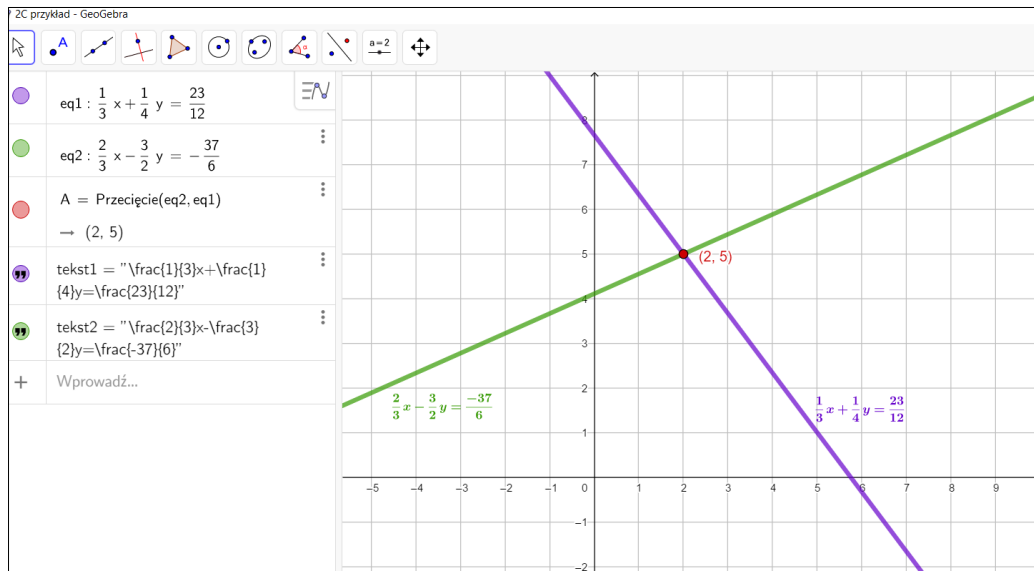
Punkty, które należą do tej prostej:  $(-1, 9)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(5, 1)$ .

- Rysujemy prostą o równaniu  $y = \frac{4}{9}x + \frac{37}{9}$ .

Punkty, które należą do tej prostej:  $(-7, 1)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(11, 9)$ .

- Odczytujemy z rysunku rozwiązanie układu.

Poniżej rysunek wykonany z wykorzystaniem narzędzi GeoGebry.



Odp. 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$



## Przykład 2.

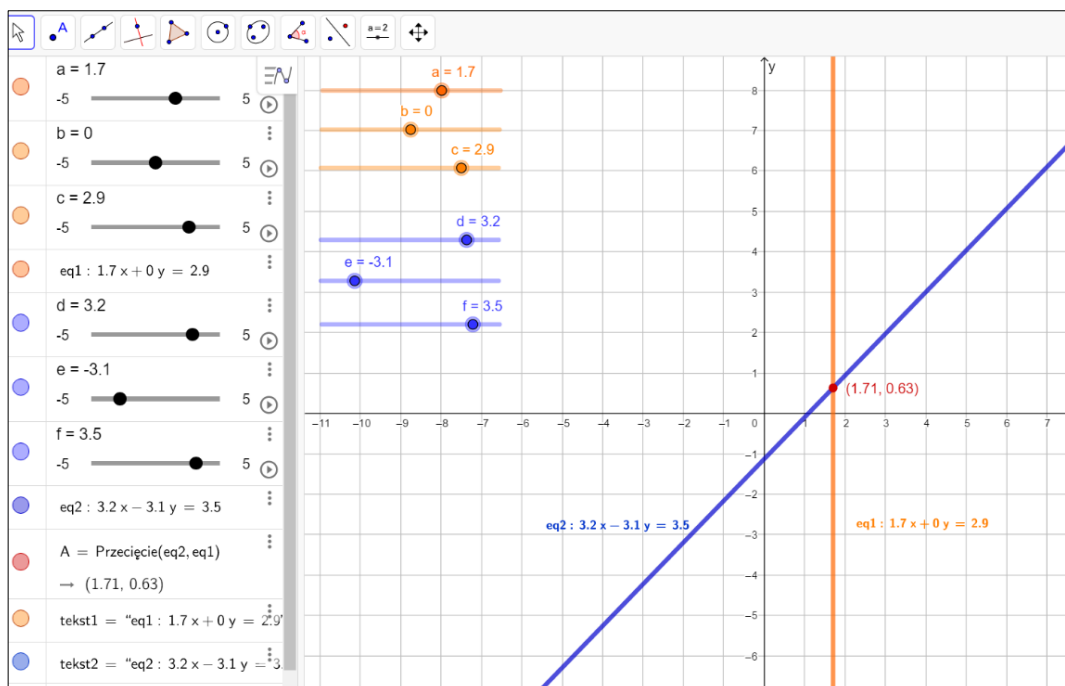
### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. Utwórz suwaki a, b oraz c: zakres od -5 do 5, krok 0.1, kolor pomarańczowy. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
2. W Widoku Algebry wprowadź równanie prostej  $ax + by = c$ . Ustaw grubość linii wykresu na 10, kolor pomarańczowy.
3. Utwórz suwaki d, e oraz f: zakres od -5 do 5, krok 0.1, kolor niebieski. We własnościach odznacz Osadź Obiekt.
4. W Widoku Algebry wprowadź równanie prostej  $dx + ey = f$ . Ustaw grubość linii wykresu na 10, kolor niebieski.
5. Zmieniaj wartości na suwakach i obserwuj zmiany, jakie zachodzą w Widoku Grafiki.







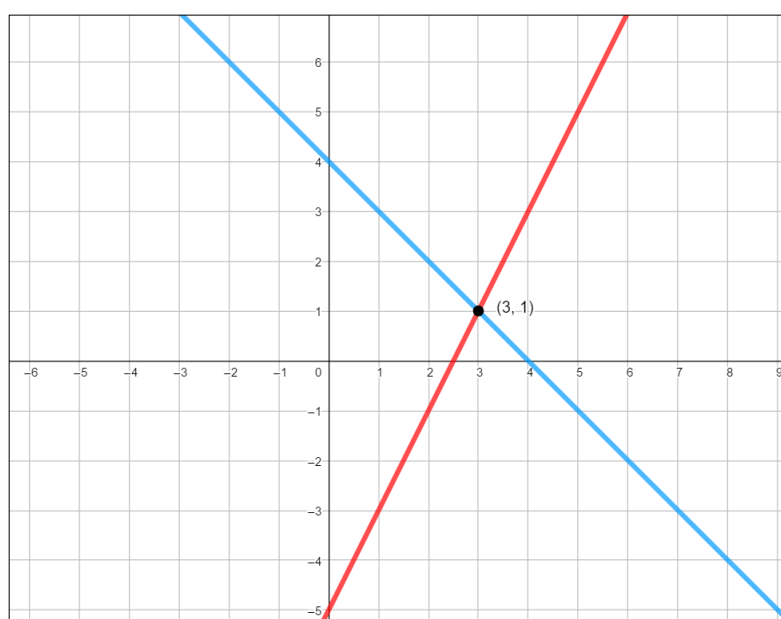
## Zadania

1. Rozwiąż graficznie układ równań  $\begin{cases} 0,5x - 2y = -5 \\ 3x - 0,5y = 4,5 \end{cases}$

2. Przedstaw takie równanie, by układ równań  $\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$  był:

- a) oznaczony                      b) nieoznaczony                      c) sprzeczny

3. Napisz układ równań, którego ilustracją graficzną przedstawiono na rysunku poniżej.





## II. Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

### 1. Interpretacja geometryczna nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

#### Instrukcja:

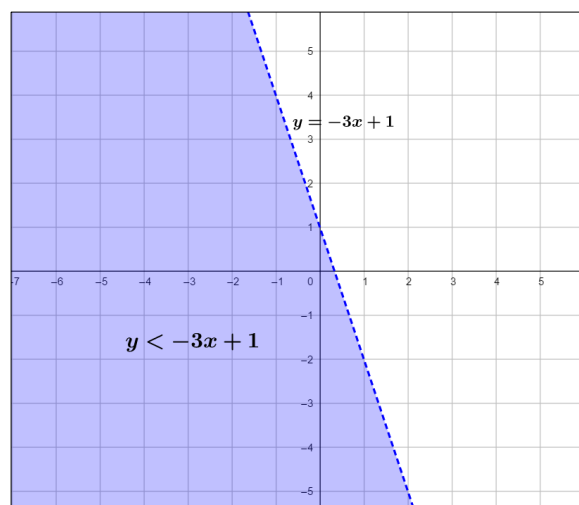
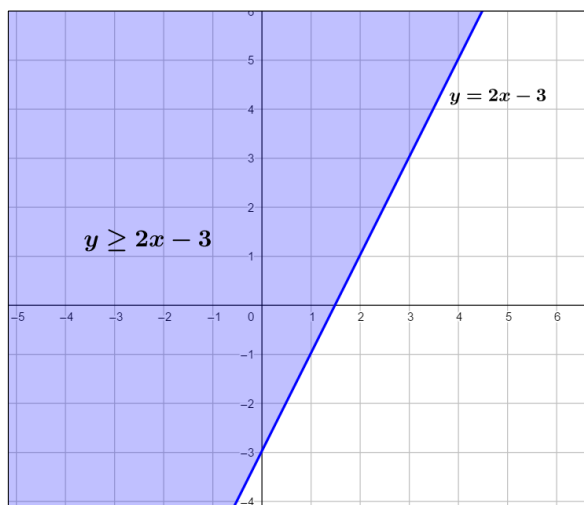
Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

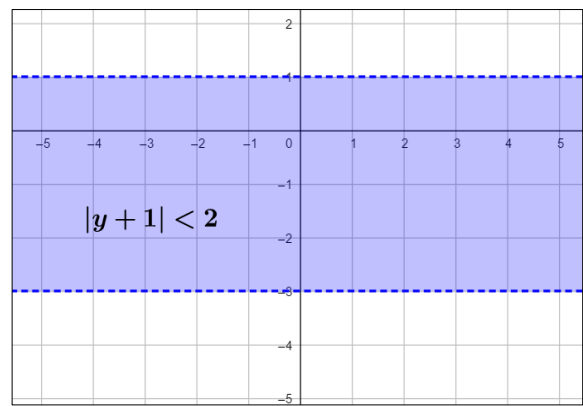
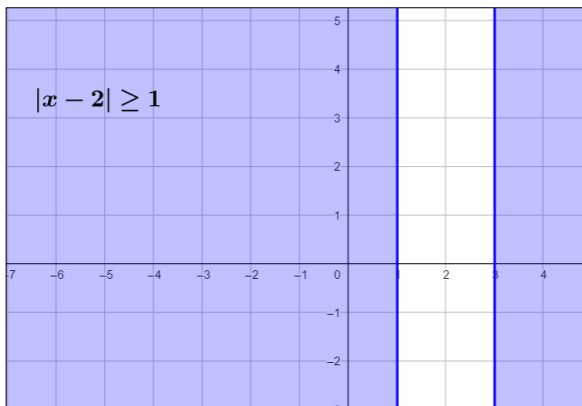
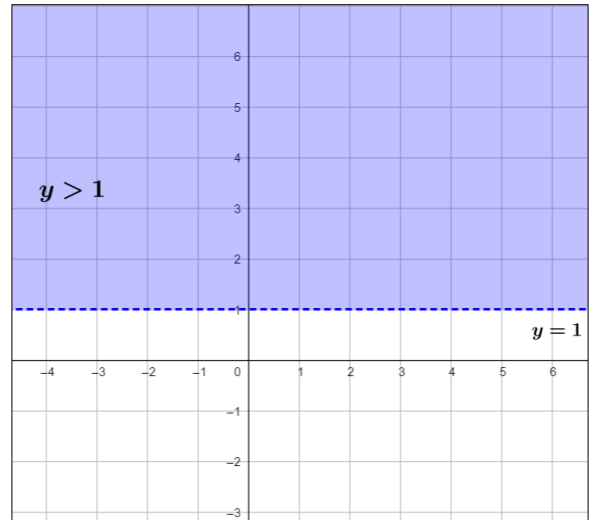
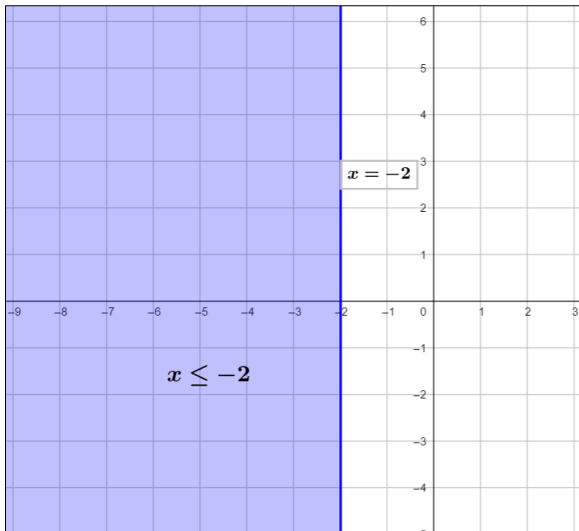
Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

1. W Widoku Algebry wstaw nierówność  $y \geq 2x - 3$ . Ustaw styl linii - ciągła, grubość na 5, kolor półprzezroczysty i prostej - fiolet.
2. W Widoku Grafiki wstaw tekst: " $y = 2x - 3$ " (kolor fiolet). Tekst: Mały, czcionka pogrubiona, włączona formuła LaTeX. Włącz etykietę Osadź Obiekt.
3. W Widoku Grafiki wprowadź tekst " $y \geq 2x - 3$ ". Tekst: Średnia, czcionka pogrubiona, włączona formuła LaTeX. Włącz etykietę Osadź Obiekt.

Analogicznie postępujemy (w prostokątnym układzie współrzędnych) przy wyznaczaniu zbioru punktów, których współrzędne spełniają nierówności:  $y < -3x + 1$ ,  $x \leq -2$ ,  $y > 1$ ,  $|x - 2| \geq 1$ ,  $|y + 1| < 2$ . Jeśli nierówność jest postaci  $y < -3x + 1$ , to współrzędne punktów należących do prostej  $y = -3x + 1$  nie spełniają tej nierówności, więc prostą rysujemy linią przerywaną.







## 2. Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

### Przykład 1.

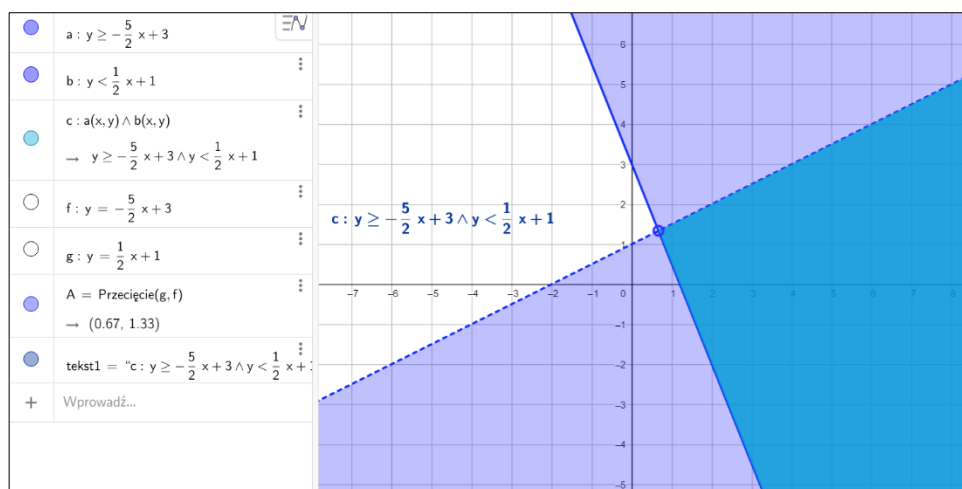
#### Instrukcja:

Włącz: Widok Algebry, Widok Grafiki (Osie, Siatkę)

Z Menu wybierz: Ustawienia → Rozmiar czcionki: 16 pkt

Ustawienia → Etykietowanie → Tylko nowe punkty

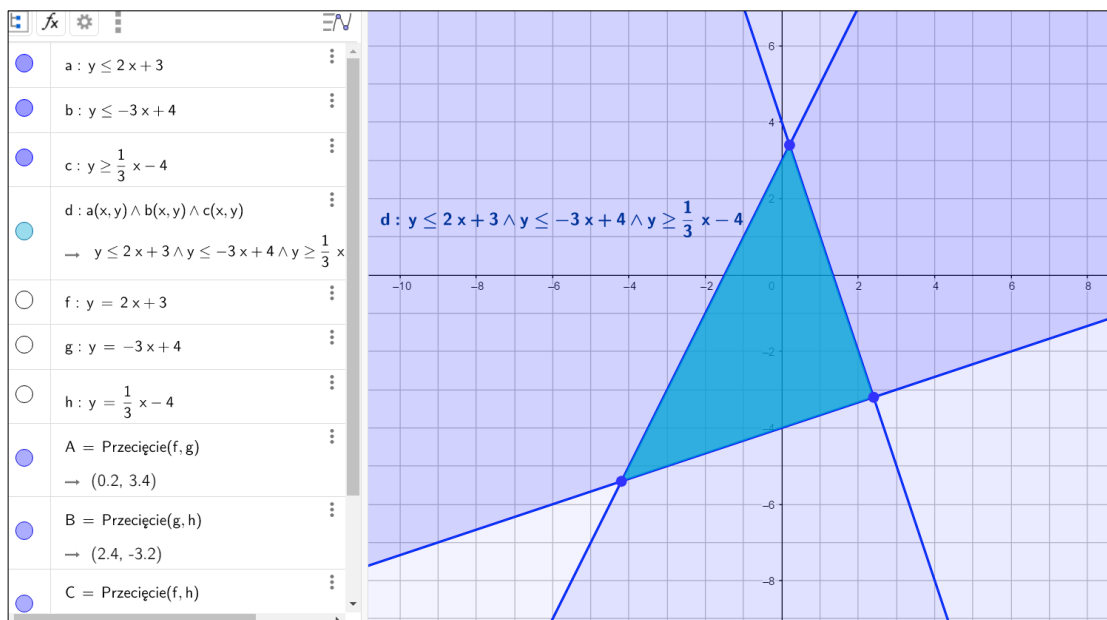
1. W Widoku Algebry wstaw nierówność  $y \geq -\frac{5}{2}x + 3$ . Ustaw styl linii - ciągła, grubość na 5, kolor półprzezroczysty i prostej – fiolet.
2. W Widoku Algebry wstaw nierówność  $y < \frac{1}{2}x + 1$ . Ustaw styl linii - przerywana, grubość na 5, kolor półprzezroczysty i prostej – fiolet.
3. W Widoku Algebry wstaw układ nierówności  $y \geq -\frac{5}{2}x + 3 \wedge y < \frac{1}{2}x + 1$ . Ustaw kolor części wspólnej półprzezroczysty na niebieski.
4. W Widoku Algebry wstaw równania prostych:  $y = -\frac{5}{2}x + 3$  (prosta f) oraz  $y = \frac{1}{2}x + 1$  (prosta g), a następnie wyznacz ich punkt wspólny (wielkość punktu – 6, styl – okrąg, kolor – niebieski; odznacz etykietę: Pokaż etykietę). Ukryj proste f, g.
5. W Widoku Grafiki wprowadź tekst " $y \geq -\frac{5}{2}x + 3 \wedge y < \frac{1}{2}x + 1$ " (Tekst: Mały, czcionka pogrubiona, kolor niebieski, włączona formuła LaTeX). Włącz etykietę Osadź Obiekt.



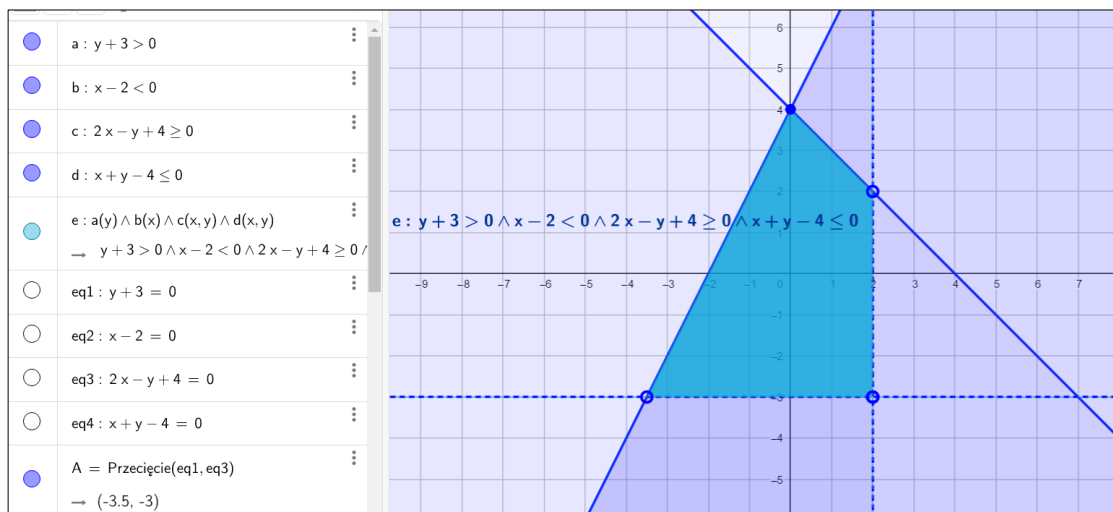


Analogicznie postępujemy w poniższych przykładach.

### Przykład 2.

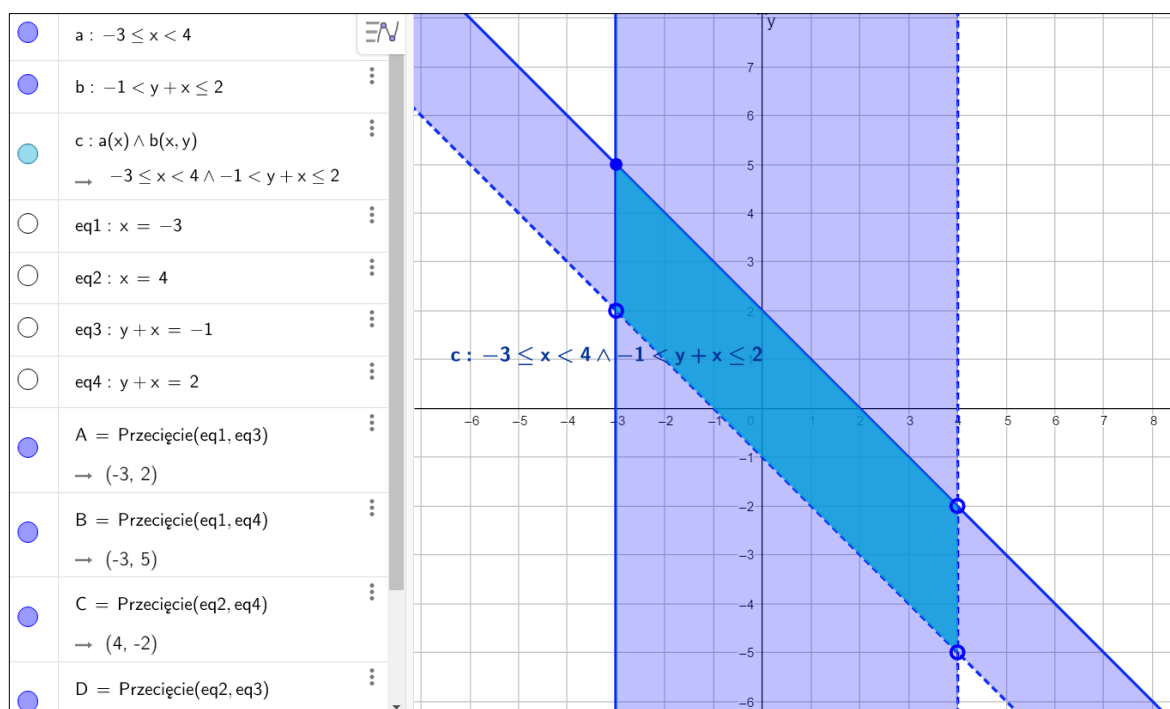


### Przykład 3.





## Przykład 4.



## Zadania

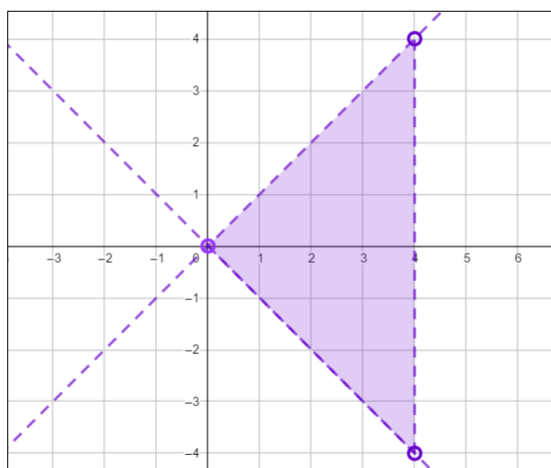
1. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności:

a)  $\begin{cases} y \leq -3x + 2 \\ -3 < x \leq 1 \end{cases}$

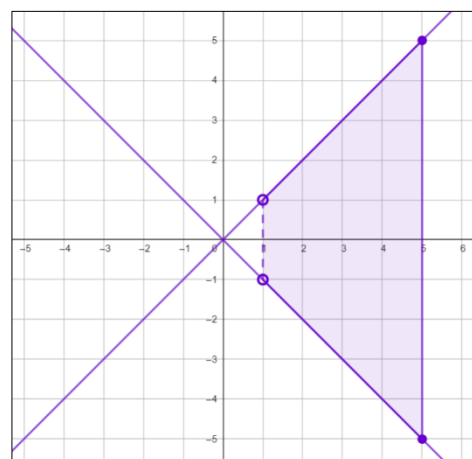
b)  $\begin{cases} |x| < 3 \\ |y - 1| \geq 1 \\ y \geq x + 1 \end{cases}$

2. Napisz układ nierówności, który opisuje figurę geometryczną przedstawioną na rysunku:

a)

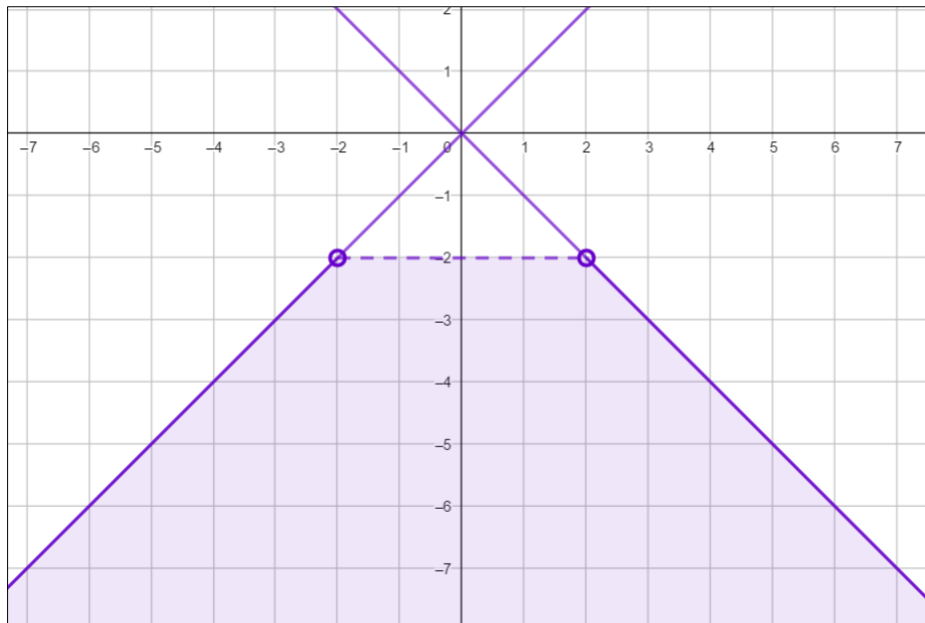


b)





c)



d)

